

S. 804. B.



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCC. LXXXVIII.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,
pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCC. XCI.

UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

1925

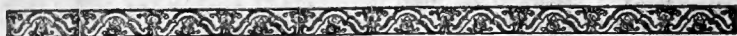


TABLE

POUR L'HISTOIRE.

<i>RAPPORT</i> fait à l'Académie des sciences, par MM. Borda, Lagrange, Lavoisier, Tillet & Condorcet, le 27 Octobre 1790.....	Page 1
<i>Rapport</i> fait à l'Académie des sciences sur le choix d'une unité de mesures par MM. Borda, Lagrange, Laplace, Monge & Condorcet.....	7
<i>Exposé</i> des travaux de l'Académie sur le projet de l'uniformité des mesures & des poids.....	17

<i>Ouvrages</i> présentés à l'Académie.....	21
<i>Éloge</i> de M. de Laffone.....	23
<i>Éloge</i> de M. le Cardinal de Luynes.....	33
<i>Eloge</i> de M. de Fouchy.....	37
<i>Éloge</i> de M. Buffon.....	50



T A B L E

POUR LES MÉMOIRES.

SUR l'Eclipsé du Soleil du 15 juin 1787. Par M. LE
MONNIER. Page 1

Nouvelles comparaisons des hauteurs solsticiales, faites au quart-de-cercle mobile, suivies de quelques autres dont la date est moins ancienne, & qui ont été faites soit au foyer d'un verre objectif de 80 pieds, soit au plus grand des quarts-de-cercle muraux. Par le même. 4

C'est en 1738, que pour la première fois M. le Monnier a pu observer au gnomon qu'il a élevé dans l'église de Saint-Sulpice, la différence de hauteurs solsticiales. Il l'a observée cette année au bout d'un demi siècle, & a trouvé que les variations de cette différence répondoient à une diminution apparente de 10" dans l'obliquité de l'écliptique.

Extrait du Registre des Observations astronomiques de l'année 1680, concernant quelques longitudes de la Lune observées, & relatives à l'écrit inséré dans le volume de l'année 1787 de nos Mémoires. Par le même. 9

Mémoire où l'on expose une Méthode analytique, pour résoudre les Problèmes relatifs à la structure des Cristaux. Par M. l'Abbé HAUY. 13

L'objet de ce Mémoire est de déduire d'une méthode générale les différentes formes de polyèdres qui peuvent être engendrés par un rhomboïde composé de lames superposées, dont on imagine que les angles & les côtés décroissent suivant une loi régulière, par la suppression des rangées de molécules dont ces lames sont formées.

Par ce moyen, M. l'abbé Haüy parvient à connoître toutes les formes de cristaux, qui, malgré une difformité apparente, appartiennent cependant à une première forme primitive.

On fait que cette idée d'appliquer la géométrie à reconnoître les loix de la figure des cristaux, en attendant qu'elle puisse calculer celles de leur formation, proposée d'abord par Bergman, a été suivie avec tant de succès par M. Haüy, qu'elle est devenue en quelque sorte son domaine.

Mémoire sur la double réfraction du Spath d'Islande. Par M. l'Abbé HAÜY..... Page 34

Le phénomène d'un corps transparent dans lequel un rayon de lumière éprouve une réfraction double, est très-sensible dans le cristal d'Islande, & peut être observé dans plusieurs autres substances cristallisées. Newton en a donné une explication, qui suppose que ces substances exercent sur les rayons de lumière une action particulière.

M. Haüy s'est proposé dans ce mémoire d'analyser ce phénomène avec une nouvelle précision, & cette analyse le conduit au même résultat que Newton.

Extrait des Observations astronomiques & physiques, faites par ordre de Sa Majesté à l'Observatoire royal, en l'année 1788. Par M. CASSINI, Directeur. MM. NOUET, DE VILLENEUVE & RUELLE, Élèves. 62

C'est à dater de l'année 1785, que l'institution d'élèves astronomes attachés à l'Observatoire, permet à M. Cassini de publier un recueil complet des observations météorologiques & astronomiques qui ont pu être faites dans l'année.

Il avoit joint à celles de 1787, un tableau abrégé des précédentes observations depuis 1777 jusqu'en 1785. Ce volume contient celles qui ont été faites depuis 1767 jusqu'en 1777, & il se propose de donner ainsi successivement l'histoire de toutes les observations rassemblées à l'Observatoire depuis son institution.

Recherches sur les Principes de la différenciation, & sur les Intégrales connues jusqu'ici sous le nom d'Intégrales particulières. Par M. CHARLES..... Page 115

Suite du Mémoire sur les Principes de la différenciation. &c.
Par le même..... 132

M. Charles avoit montré (*Mémoire de l'Académie 1786*) que les équations aux différences finies, peuvent dans certain cas avoir deux intégrales, dont l'une n'est pas comprise dans l'équation que les géomètres regardoient comme l'intégrale générale de la proposée.

Il examine ici ce que cette seconde intégrale devient dans les cas des différences infiniment petites, & il établit qu'alors elle donne cette espèce de solution connue sous le nom d'intégrale particulière, qui n'est qu'une intégrale incomplète comprise dans cette nouvelle solution.

Analyse de la Prase & de la Chrysoprase, ou Calcédoine verte de Cosémitz en Silésie, dans le Comté de Glatz.
Par M. SAGE..... 140

L'espèce d'agate verdâtre, connue sous le nom de *prase*, est colorée par le cobalt & par le nikel; elle porte le nom de *chrysoprase* lorsqu'elle est parsemée de taches couleur d'or, & alors elle contient de la terre martiale jaune.

Analyse du Spath pesant aéré, transparent & strié, d'Alston-moor. Par le même..... 143

Ce spath très-pur ne contient ni terre calcaire, ni chaux métallique lorsqu'il est blanc & transparent.

M. Sage examine dans ce mémoire, les sels formés par la combinaison de ce spath avec les trois acides minéraux.

Mémoire sur le genre du Muscadier myristica. Par M. DE LA MARCK..... 148

Quoique le fruit du muscadier soit en usage depuis plusieurs siècles, le monopole exercé sur le commerce des épiceries

par les Hollandois, avoit empêché jusqu'ici de connoître l'arbre qui le produit. M. Poivre l'a transporté à l'Isle de France, & c'est à des branches de cet arbre envoyées par M. Céré, directeur du jardin du Roi, dans cette île, que nous en devons la première description exacte.

Les fleurs mâles & les fleurs femelles se trouvent sur des individus séparés.

Recherches sur l'espèce d'acier la plus propre à recevoir la vertu magnétique. Par M. BRISSON..... Page 173.

Il résulte des expériences rapportées dans ce mémoire, que l'acier d'Angleterre est le plus propre à recevoir la vertu magnétique: l'acier d'Allemagne connu sous le nom d'*étouffe de sons*, vient immédiatement après. Les aciers fondus ne peuvent acquérir que très-peu de force magnétique.

Conjonction inférieure de Vénus le 7 août 1788, avec une nouvelle détermination de l'aphélie de Vénus, & de son moyen mouvement. Par M. DE LA LANDE. ... 169

Sur la parallaxe de la Lune. Quatrième Mémoire. Par le même..... 183

Mémoire sur le diamètre de la Lune. Par le même.. 189

Dans ces deux derniers mémoires, M. de la Lande suppose d'un 500^e l'aplatissement de la terre, & c'est d'après cette hypothèse qu'il corrige les élémens qu'il s'est proposé d'y déterminer.

Sur le diamètre & la lumière du quatrième Satellite de Jupiter. Par M. DE LA LANDE..... 209

Comme les objets cessent d'être sensibles lorsque leur diamètre est vu sous un angle trop petit, il doit en résulter que les satellites de Jupiter paroissent s'éclipser plus tôt, & sortir plus tard de l'ombre, qu'ils ne le font réellement, ce qui produit une différence entre la durée apparente & la durée réelle de l'éclipse. M. de Fouchy a proposé un moyen très-ingénieux de reconnoître cette différence. M. Bailli, dans les Mémoires de 1771, l'a

employé pour les trois premiers satellites ; mais il n'avoit pu l'étendre au quatrième ; c'est à compléter ce travail qu'est destiné le mémoire de M. de la Lande.

Mémoire sur les Satellites de Saturne. Par M. DE LA
LANDE Page 216

Ce Mémoire renferme les observations & les principes d'après lesquels M. de la Lande a formé les nouvelles tables des satellites de Saturne, insérées dans la Connoissance des temps pour les années 1791, 1792.

Eclipses de Soleil & d'Étoiles observées en 1787 & 1788, avec les résultats des Observations pour les longitudes de divers pays. Par le même 224

Mémoire sur l'Éclipse de Soleil du 16 Août 1765, observée à Rome. Par M. de la Lande 233

L'objet de ces deux Mémoires est principalement d'appliquer les observations qu'ils renferment à la détermination de positions géographiques importantes.

Mémoire sur la période de lumière de l'Étoile Algol. Par le même 240

Les variations de lumière de cette étoile ont été remarquées dans le siècle dernier par Montanari ; mais c'est en 1782 seulement, que M. Goddricke a cherché à en reconnoître la régularité, & en a déterminé la période.

D'après les observations de cet astronome, celles de M. Wurm & les siennes propres, M. de la Lande fixe cette période à $2^{\text{f}} 2^{\text{h}} 49' 2''$.

Ces changemens de lumière & de lieu observés dans un assez grand nombre d'étoiles fixes, offrent, aux astronomes qui nous suivront, un vaste champ de découvertes, & nous permettront peut être de faire encore quelques pas dans la connoissance du système général du monde.

Mémoire sur l'état moyen des eaux de la Seine à Paris. Par le même 244

Théorie des satellites de Jupiter. Par M. DE LA PLACE. Page 249

Ce Mémoire renferme une théorie complète des satellites de Jupiter. M. de la Place a donné depuis long-temps de nouvelles méthodes de résoudre les problèmes de l'astronomie physique, & on en trouve ici l'application à un des plus importants & des plus difficiles de ces problèmes.

Mémoire sur la combustion de plusieurs corps dans le gaz acide muriatique oxigéné. Par M. FOURCROY. . . . 365

L'objet principal de ce Mémoire est de montrer que l'air ou gaz ou l'oxigène muriatique oxigéné sert à la combustion comme l'air vital, mais en présentant des phénomènes particuliers. Le gaz oxigène existe à la vérité dans cet air muriatique, mais dans un état de combinaison, & non simplement mêlé avec d'autres airs comme dans l'atmosphère.

Mémoire sur les Phénomènes qui ont lieu dans la précipitation des dissolutions métalliques, par l'ammoniaque (alkali volatil). Par M. FOURCROY. 376

Les phénomènes que présente la précipitation des métaux par l'alkali volatil, n'ont pu être bien analysés tant qu'on a ignoré que l'alkali, formé par la combinaison de l'azote & du gaz inflammable, se décomposoit plus ou moins dans cette opération. M. de Fourcroy présente ici l'analyse de ces phénomènes.

Mémoire sur une détonation produite par une substance connue sous le nom de sel de verre, lorsqu'étant en fusion on la jette dans l'eau. Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY. 386.*Observations sur plusieurs anciens Monumens gothiques que j'ai remarqués dans cette Capitale, sur lesquels sont gravés les signes du Zodiaque & quelques hiéroglyphes Égyptiens relatifs à la religion d'Isis.* Par M. LE GENTIL. 390*Description du Zodiaque que l'on voit à l'Abbaye des Bénédictins, à Saint-Denys en France.* Par le même. 406

Observations sur un écrit de M. de la Lande, inséré dans le Journal des Savans du mois de Juillet 1788, dans lequel cet Académicien rend compte de mon Mémoire sur le Zodiaque de Notre-Dame de Paris, comparé au Zodiaque Indien des Transactions philosophiques de 1772, & inséré dans le volume de l'Académie, année 1785. Par M. LE GENTIL..... Page 411

M. le Gentil s'occupe, dans ces trois Mémoires, de ces monumens de l'astronomie Égyptienne ou Indienne que les constructeurs ignorans de nos temples gothiques faisoient entrer dans les ornemens de ces édifices sacrés.

On sait que les superstitions Égyptiennes avoient infecté les Gaules ; mais on ignoroit que l'astronomie Indienne, ou du moins les figures symboliques de cette astronomie, y eussent pénétré.

Observations sur une espèce de Varech qui croît sur les côtes occidentales de la basse Normandie, & sur une petite coquille qui se loge dans le tronc de cette plante, & y prend son accroissement. Par le même..... 439

M. le Gentil a observé que presque toutes les tiges d'une espèce de vareck qu'il a rencontrée sur les côtes de Normandie, servoient de retraite à un petit coquillage du genre des patelles, qui s'établissant dans ces tiges, y forme une cavité où il vit, & à laquelle il est adhérent. Ce coquillage est d'une couleur verdâtre très-approchant de celle de la plante.

Recherches sur un Arbrisseau connu des anciens, sous le nom de Lotos de Lybie. Par M. DESFONTAINES... 443

Dans les temps où les peuples n'avoient point de communication entre eux, la nourriture commune des hommes de chaque pays devoit être la graine, le fruit, la racine qu'on y trouvoit en plus grande abondance, qui exigeoit le moins de soins, dont la récolte étoit moins sujette aux accidens. Cette nourriture commune devoit être plus variée qu'on ne l'observe aujourd'hui, où des

rapports plus longs & plus fréquens entre les peuples, les ont rapprochés davantage dans leurs habitudes. Les poètes, les historiens, les naturalistes anciens ont beaucoup parlé d'un peuple d'Afrique, qu'ils appeloient *Lotophages* (*mangeurs de lotos*); mais l'on ignoroit quelle étoit cette nourriture sur laquelle ils ne nous avoient donné que des notions vagues, mêlées de beaucoup de fables. M. Desfontaines qui a visité le pays habité autrefois par ces peuples, prouve que le lotos étoit une espèce de jujubier très-commun encore dans le pays.

Mémoire sur les Intégrales doubles. Par M. LE GENDRE.

Page 454

La recherche des intégrales doubles est principalement utile pour trouver la grandeur des solides, & pour calculer leur attraction; & l'on sent dans combien de questions importantes d'analyse ou de mécanique, cette même recherche peut devenir également nécessaire.

M. le Gendre donne ici un moyen ingénieux & simple d'en diminuer les difficultés à l'aide d'une transformation des variables, & il en déduit plusieurs théorèmes importans sur l'attraction des sphéroïdes.

Observations faites dans un voyage aux Terres Australes en 1773 & 1774. Par M. LE PAUTE D'AGELET.... 487

M. le Paute d'Agelet, quelques mois après son entrée à l'Académie, s'est embarqué avec M. de la Peyrouse, & les observations faites dans ce premier voyage, entrepris par lui à l'âge de vingt ans, doivent augmenter les regrets de ceux qui s'intéressent aux progrès des sciences.

L'art de la liquation, ou du départ de l'argent d'avec le cuivre, par l'intermède du plomb. Par M. DUHAMEL.... 504

Nouvelles Recherches sur la construction des Équations en différences finies du premier ordre, & sur celle des limites de ces Équations. Par M. CHARLES..... 580.

M. Charles examine dans ce Mémoire la solution d'une équation aux différences finies, dans laquelle on

prendroit alternativement les côtés des deux polygones qui, suivant la manière ordinaire d'envisager ces questions, sont le lieu de l'équation, & il montre que cette solution répond précisément à cette deuxième intégrale, qu'il a déjà trouvée par une méthode purement analytique.

Il y joint une formule d'interpolation très-générale & très-simple.

Manière de construire un Aréomètre qui soit tel, que les pesanteurs spécifiques qu'il indique soient en raison inverse des volumes qu'il mesure, & qui en conséquence fait connoître la pesanteur spécifique des liqueurs par sa simple immersion, & sans qu'il soit besoin d'aucun calcul. Par M. BRISSON.....Page 583

Sixième Mémoire sur l'Électricité. Par M. COULOMB.
Suite des Recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs corps conducteurs : détermination de la densité électrique dans les différens points de la surface de ces corps..... 617.

Dans ces Mémoires l'auteur suit constamment la même marche ; il cherche par l'expérience seule la loi du phénomène qu'il examine, & ce n'est qu'après l'avoir trouvée, qu'il examine par le calcul, si cette loi est d'accord avec celles que les premières expériences lui ont fait reconnoître, avec les principes généraux qu'il en a déduits.

L'expérience le conduit encore à l'hypothèse de deux fluides électriques, tels que les molécules de chacun d'eux se repoussent entre elles, & attirent celles de l'autre.

De la jonction des Observatoires de Paris & de Greenwich, & précis des travaux géographiques exécutés en France, qui y ont donné lieu. Par M. DE CASSINI..... 706

On a senti depuis longtemps l'utilité d'une carte générale de la France levée topographiquement, mais dont une suite de triangles astronomiquement déterminés fixent un nombre de points suffisant pour répondre de la précision de tout l'ouvrage. Cet immense travail est terminé, & il

reçoit un nouveau lustre de celui, par lequel on est parvenu à joindre par d'autres triangles astronomiques les observatoires de Paris & de Gréénwich. Par ce moyen les cartes de France & d'Angleterre ne forment plus qu'un même tout, entrent dans un même système, & donnent lieu d'espérer que cette entreprise, dont la France a donné l'exemple, embrassera bientôt l'Europe entière.

Éclipses des satellites de Jupiter, & autres observations faites à Perivaldo par M. Maraldi. Par M. DE CASSINI. Page 718

La vieillesse de M. Maraldi & ses infirmités ne lui permettoient plus de suivre ses travaux astronomiques, que son éloignement de l'Académie n'avoit pas interrompus. Il en avoit chargé M. Jacques-Philippe Maraldi son neveu. La mort nous a enlevé un confrère qui étoit depuis long-temps perdu pour nous, mais qui jusqu'à la fin de sa longue carrière ne l'a point été pour les sciences.

Essai sur l'uniformité des mesures, tant linéaires que de capacité & de poids;

Et sur une nouvelle manière de construire les toises destinées à servir d'étalon. Par M. BRISSON..... 722

Observations sur la combinaison des Oxiaes métalliques, avec les alkalis & la chaux. Par M. BERTHOLLET.. 728

Les métaux combinés avec l'oxigène, donnent des composés qui peuvent se combiner avec les substances alkales, & former avec elles de véritables sels; en sorte que les métaux qui peuvent se dissoudre dans les acides & qui dans ces combinaisons se rapprochent des alkalis & en remplissent en quelque sorte la fonction, deviennent, lorsqu'ils sont oxigenés, des espèces d'acides & entrent comme tels dans de nouvelles combinaisons salines.

Observations & calculs de l'Éclipse de Soleil du 4 juin 1788, au matin. Par M. JEAURAT..... 742

Suite du calcul des triangles qui servent à déterminer la dis-

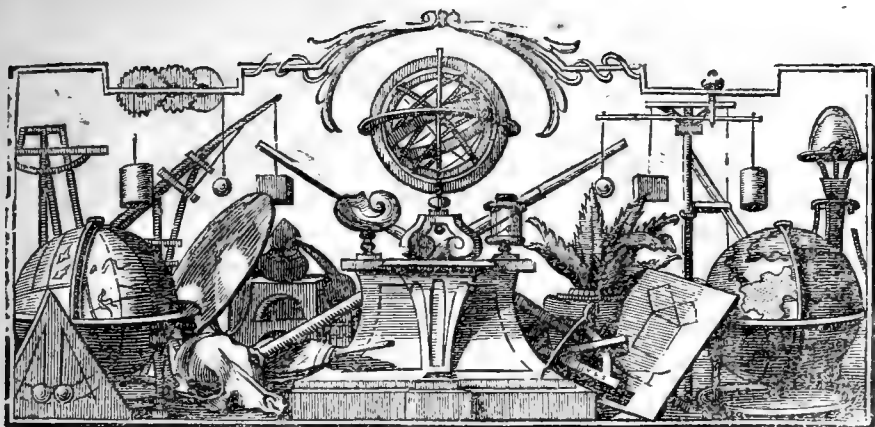
férence de longitude entre l'Observatoire de Paris & celui de Greenwich. Par M. LE GENDRE....Page 747

Suite de l'Essai pour connoître la population du Royaume, & le nombre de ses habitans, en adaptant aux villes, bourgs & villages portés sur chacune des cartes de M. de Cassini, l'année commune des naissances, & en la multipliant par 26. Par MM. DUSEJOUR, CONDORCET & LA PLACE..... 755

Observations sur la manière de former l'alun, par la combinaison directe de ses principes constituans. Par M. CHAPTAL. 768

Cette combinaison faite immédiatement, excéderoit dans beaucoup de pays le prix commun de l'alun. M. Chaptal propose de l'exécuter en soumettant la terre argileuse qui est la base de ce sel à l'action de l'acide qui se degage pendant la combustion du soufre. Mais si on enduit de plomb la chambre où cette combustion s'exécute, il en résulte une dépense trop considérable encore. Il falloit donc chercher un mastic inattaquable par cette vapeur, qui l'empêchât de s'échapper, & que la chaleur ne pût ni gercer ni faire couler. Un mélange de partie égale de poix résine, de térébenthine & de cire lui a présenté tous ces avantages, & ce mastic peut devenir utile à beaucoup d'autres usages importants.





HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXXVIII.

R A P P O R T

*FAIT à l'Académie des Sciences, par MM. BORDA,
LAGRANGE, LAVOISIER, TILLET & CONDORCET,
le 27 Octobre 1790.*

L'ASSEMBLÉE NATIONALE a demandé l'opinion de
l'Académie sur la question de savoir *s'il convient de fixer
invariablement le titre des métaux monnoyés, de manière que les*
Hist. 1788.

A

espèces ne puissent jamais éprouver d'altération que dans le poids, & s'il n'est pas utile que la différence tolérée sous le nom de remède, soit toujours en dehors. Elle a chargé en même temps l'Académie d'indiquer aussi l'échelle de division qu'elle croira la plus convenable, tant pour les poids que pour les autres mesures, & pour les monnoies.

Le titre des monnoies, c'est-à-dire, le rapport entre la masse du métal précieux dont elles sont composées & l'alliage qu'il est d'usage d'y joindre, peut être fixé avec une assez grande précision, mais non avec une exactitude rigoureuse. On peut répondre de ne pas ou tomber au-dessous ou s'élever au-dessus d'un terme fixé, de rester dans une limite très-étroite, mais non d'atteindre exactement un point déterminé.

Ainsi pour l'argent, par exemple, on peut à la rigueur répondre de se tenir dans les limites d'un grain ou d'un grain & demi de fin, c'est-à-dire, qu'on peut répondre de l'exactitude à 2 ou 3 576.^{es} près. Pour l'or, on peut se tenir dans les limites d'un ou deux trente-deuxièmes de karat, c'est-à-dire, qu'on peut répondre de l'exactitude à un ou deux 768.^{es} près.

Cette erreur tient à deux causes; à la difficulté de rendre parfaitement homogènes les métaux alliés, & de prévoir rigoureusement l'altération que l'action du feu peut occasionner, & à l'impossibilité d'avoir une méthode d'essayer absolument rigoureuse: il n'est d'ailleurs aucune expérience de physique, aucune opération réelle qui ne soit exposée à ces petites incertitudes.

Il faut donc laisser une certaine latitude, & par conséquent dire, par exemple: la monnoie d'argent sera au titre de 11 deniers, mais si elle se trouve entre 10 deniers 22 grains & demi & 11 deniers, elle sera réputée bonne; ou dire, la monnoie sera au titre de 11 deniers, mais on tiendra compte au fabricant de ce qu'elle contiendra au-dessus jusqu'à 11 deniers 1 grain & demi. On suppose alors que malgré les soins du fabricant, il ne peut vouloir fabriquer à

11 deniers & non au-dessus, sans risquer de tomber jusqu'à 10 deniers 22 grains & demi, & qu'il ne peut vouloir fabriquer à 11 deniers au moins, sans risquer de s'élever jusqu'à 11 deniers 1 grain & demi.

Il en est de même du poids de chaque monnoie. Si on suppose qu'une pièce doive peser 200 grains, il faut ou regarder comme bonne celle qui n'en pèsera que 199, si telles sont les bornes de l'exaétitude à laquelle on peut parvenir, ou passer au fabricant les pièces suivant leur poids réel, pourvu qu'elles soient entre 200 & 201 grains.

Cette latitude accordée, soit dans le titre, soit dans le poids, s'appelle *remède*. On dit que le remède est en dedans, si on admet comme bonnes les pièces qui sont d'une moindre quantité au-dessous du titre ou du poids établi; on dit que le remède est en dehors, si on exige que les pièces aient au moins le titre & le poids fixés par la loi, mais en tenant compte de l'excédant jusqu'à une limite déterminée.

Les monnoies ne sont prises en général dans le commerce que comme ayant le poids & le titre au-dessous desquels elles seroient condamnées. Ainsi, par exemple, une monnoie d'argent à 11 deniers de fin au remède d'un grain & demi, sera prise comme une monnoie à 10 deniers 22 grains & demi; & si le remède étoit en dehors, une monnoie à 10 deniers 22 grains & demi, mais qui pourroit aller jusqu'à 11 deniers, ne seroit prise également que pour une monnoie à 10 deniers 22 grains & demi.

Il est donc indifférent en soi, sous ce point de vue, de placer le remède en dehors ou en dedans, mais il ne l'est jamais d'employer un langage précis, un langage qui présente les objets tels qu'ils sont, au lieu de celui qui les représente sous un faux jour.

Ainsi, il vaut mieux dire : la monnoie sera au titre de 10 deniers 22 grains & demi, le remède étant en dehors, que de dire, la monnoie sera au titre de 11 deniers avec un remède d'un grain & demi, puisque dans les deux cas elle sera toujours prise comme étant au titre de 10 deniers

22 grains & demi. Il en est de même du remède de poids.

Le seul cas où l'on seroit obligé de mettre en dedans le remède d'aloi, c'est-à-dire, le remède qui se rapporte au titre, mais qui alors seroit très-petit, seroit celui où l'on voudroit fabriquer de la monnoie d'un métal aussi pur que l'art peut le donner. (1)

On pourroit croire qu'il y auroit plus de simplicité à établir que la monnoie contiendrait rigoureusement un tel poids de fin, ce qui confondroit les deux remèdes en un seul; mais cette simplicité apparente auroit un grand inconvénient, on ignorerait si une telle pièce, dont on a vérifié le poids, est au-dessous, par exemple, du poids fixé par la loi, parce qu'elle est réellement trop foible, ou parce qu'elle se trouve à un titre plus élevé. Il convient de séparer l'exactitude du poids de celle du titre, parce que la première peut toujours être vérifiée par des moyens simples; il suffit de peser les pièces avec de bonnes balances.

Le titre des monnoies ne doit être changé que dans les circonstances où il est convenable de faire une refonte

(1) Nous ne nous arrêterons pas à examiner ici les avantages qu'auroit l'adoption de ce principe, qui donneroit une espérance plus grande de voir un jour les différens peuples employer une monnoie uniforme. Les frais de fabrication seroient augmentés à la vérité, mais ces métaux purs conserveroient comme lingots l'augmentation de valeur que l'affinage leur donne dans le commerce, & la conserveroient par-tout. Comme en fondant ces monnoies on perdrait les frais de fabrication qu'alors il faudroit retenir, on n'auroit pas à craindre d'être forcé à une fabrication superflue, & il n'y auroit même alors aucun inconvénient qu'elles fussent fondues en petites parties, pour remplacer les métaux affinés lorsqu'on éprouveroit quelques difficultés à s'en procurer. L'objection la plus forte

contre l'usage des métaux purs dans les monnoies, est la crainte qu'elles ne s'usent plus vite. Mais la dureté que l'alliage leur communique, augmente-t-elle ou diminue-t-elle la perte qu'elles essuient par le frottement? c'est une question qui n'a jamais été résolue par des expériences directes; & l'Académie se propose d'en faire, pour éclairer un fait dont la connoissance peut être utile non-seulement pour l'art de fabriquer les monnoies, mais pour un grand nombre d'autres.

Les premières expériences ont prouvé que les monnoies d'argent pur perdoient moins que les monnoies alliées, lorsque le frottement avoit lieu entre des pièces semblables, mais qu'elles perdoient davantage, lorsque le frottement avoit lieu entre les pièces pures & les pièces alliées.

générale ; autrement on introduit dans le commerce de la monnoie de même métal à deux titres différens, ce qui y jette de la confusion.

Le relèvement du titre est utile : l'expérience a prouvé que plus les monnoies sont pures, plus elles ont de valeur dans les pays où elles n'ont pas cours, & que l'échange en est plus favorable.

Mais c'est dans le cas d'une opération générale qu'il faut s'occuper de ces avantages secondaires.

Nous ne parlons point des altérations de titre qui auroient pour objet de changer la valeur de la livre nominale, comme celle qui conserveroit le nom d'écu de trois livres à une pièce qui ayant le même poids, mais fabriquée d'un métal moins pur, n'auroit que la valeur de cinquante sous. La foi publique proscriit ces sortes d'altérations.

Il est utile que toutes les divisions des mesures, quel que soit l'usage auquel on les emploie, que celles des mesures de longueur, de surface & de contenance, que celles des poids, que celles des monnoies dans leurs valeurs nominales comme pour les pièces employées dans le commerce, soient assujetties à une même échelle. Enfin, l'échelle arithmétique doit servir de base à toutes ces divisions.

On sent combien cette unité simplifie toutes les opérations par lesquelles on est obligé de comparer les volumes avec le poids, les prix avec les poids ou les mesures. De même en prenant pour base commune l'échelle arithmétique, tous les calculs de commerce se réduisent à des calculs de nombres entiers, quelles que soient les dénominations que portent les diverses divisions ; au lieu que si on prend des échelles de division différentes de l'échelle arithmétique, on est obligé, pour chacune, d'avoir des règles particulières. Ainsi, dans l'usage actuel, tel homme sait calculer des sous & des deniers, qui ne sait pas calculer des toises, pieds, pouces & lignes, des livres, onces, gros & grains.

L'adoption de l'échelle arithmétique pour toutes les

divisions, diminuera beaucoup les embarras qui doivent naître de l'établissement des nouvelles mesures, & tous ceux qui sauront l'arithmétique simple, pourront en calculer toutes les divisions, tandis que ceux qui savent calculer les anciennes n'éprouveront aucun embarras, puisqu'ils pourront calculer les nouvelles avec encore plus de facilité.

On auroit pu proposer de changer aussi l'échelle arithmétique, & de prendre l'échelle duodécimale, c'est-à-dire, celle qui emploie onze chiffres, & qui suit la progression des puissances de douze ; mais ce changement ajouté à tous les autres, en ôtant à ceux qui ne sont pas accoutumés au calcul, une base à l'aide de laquelle ils puissent entendre les changemens & s'y conformer, en rendroit le succès presque impossible. Ajoutons que, non-seulement il faudroit deux chiffres nouveaux, mais que l'arithmétique parlée a pour base l'arithmétique décimale, ce qui obligerait à la changer encore, de manière que les effets de tous ces changemens réunis, incommodes aux personnes les plus habituées à réfléchir, seroient insupportables à toutes les autres.

Nous concluons donc que l'échelle décimale doit servir de base à toutes les divisions, & que même le succès de l'opération générale sur les poids & mesures tient en grande partie à l'adoption de cette échelle. L'impossibilité d'avoir en nombres ronds de la division immédiatement inférieure, le quart d'une unité quelconque, & celle d'en avoir jamais le tiers, sont le seul inconvénient de cette échelle ; mais il est très-foible pour le quart. Au lieu de dire, par exemple, que celui d'une livre est quatre onces, on diroit qu'il est deux onces cinq gros, si la livre se divisoit en dix onces, & l'once en dix gros, & celui de la non divisibilité par trois, n'est pas assez important pour sacrifier la concordance de toutes les divisions, ou s'exposer aux embarras qui naîtroient de l'adoption d'une nouvelle échelle arithmétique.



RAPPORT

FAIT À L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

*Sur le choix d'une unité de Mesures.*Par MM. BORDA, LAGRANGE, LAPLACE, MONGE
& CONDORCET.

L'IDÉE de rapporter toutes les mesures à une unité de longueur prise dans la nature, s'est présentée aux mathématiciens dès l'instant où ils ont connu l'existence d'une telle unité & la possibilité de la déterminer. Ils ont vu que c'étoit le seul moyen d'exclure tout arbitraire du système des mesures, & d'être sûr de le conserver toujours le même, sans qu'aucun autre événement, qu'aucune révolution dans l'ordre du monde pût y jeter de l'incertitude; ils ont senti qu'un tel système n'appartenant exclusivement à aucune nation, on pouvoit se flatter de le voir adopter par toutes.

19 mars 1791

En effet, si on prenoit pour unité une mesure déjà usitée dans un pays, il seroit difficile d'offrir aux autres des motifs de préférence capables de balancer l'espèce de répugnance, sinon philologique, du moins très-naturelle, qu'ont les peuples pour une imitation qui paroît toujours l'aveu d'une sorte d'infériorité : il y auroit donc au moins autant de mesures que de grandes nations. D'ailleurs, quand même presque toutes auroient adopté une de ces bases arbitraires, mille événemens faciles à prévoir, pourroient faire naître des incertitudes sur la véritable grandeur de cette base; & comme il n'existeroit point de moyen rigoureux de vérification, il s'établirait à la longue des différences entre les mesures. La diversité qui existe

aujourd'hui entre celles qui sont en usage dans les divers pays, a moins pour cause une diversité originaire qui remonte à l'époque de leur établissement, que des altérations produites par le temps. Enfin, on gagneroit peu, même dans une seule nation, à conserver une des unités de longueur qui y sont usitées; il n'en faudroit pas moins corriger les autres vices du système des mesures, & l'opération entraîneroit une incommodité presque égale pour le plus grand nombre.

On peut réduire à trois les unités qui paroissent les plus propres à servir de base; la longueur du pendule, un quart du cercle de l'équateur, enfin un quart du méridien terrestre.

La longueur du pendule a paru en général mériter la préférence. Elle présente l'avantage d'être plus facile à déterminer & par conséquent à vérifier, si quelques accidens arrivés aux étalons en aïmoient la nécessité. De plus, ceux qui voudroient adopter cette mesure déjà établie chez un autre peuple, ou qui après l'avoir adoptée auroient besoin de la vérifier, ne seroient pas obligés d'envoyer des observateurs à l'endroit où la première opération auroit été faite.

En effet, la loi des longueurs du pendule est assez certaine, assez confirmée par l'expérience pour être employée dans les opérations sans avoir à craindre que des erreurs imperceptibles. Quand même d'ailleurs on ne voudroit pas avoir égard à cette loi, on sent qu'une comparaison de la différence de longueur entre les pendules une fois exécutée, pourroit toujours être vérifiée, & qu'ainsi l'unité de mesure deviendrait invariable pour tous les lieux où cette comparaison auroit été faite; ainsi l'on y pourroit réparer immédiatement l'altération accidentelle des étalons, ou y déterminer la même unité de mesure à quelque époque que l'on prit la résolution de l'adopter. Mais nous verrons dans la suite qu'on peut rendre ce dernier avantage commun à toutes les mesures naturelles,

&

& employer les observations du pendule à les vérifier, quoiqu'elles n'aient pas servi de base à leur détermination.

En employant la longueur du pendule, il paroît naturel de préférer celle du pendule simple, qui bat les secondes au 45.^e degré. En effet, la loi que suivent depuis l'équateur jusqu'aux pôles les longueurs des pendules simples faisant des oscillations égales, est telle, que celle du pendule au 45.^e degré est précisément la valeur moyenne de toutes ces longueurs, c'est-à-dire, qu'elle est égale à leur somme divisée par leur nombre. Elle est également une moyenne & entre les deux longueurs extrêmes prises, l'une au pôle, l'autre à l'équateur, & entre deux longueurs quelconques correspondantes à des distances égales, l'une au nord & l'autre au midi, de ce même parallèle. Ce ne seroit donc pas la longueur du pendule sous un parallèle déterminé qui seroit ici l'unité de mesure, mais la longueur moyenne des pendules inégaux entr'eux qui battent les secondes aux diverses latitudes.

Cependant nous devons observer que cette unité ainsi déterminée, renferme en elle-même quelque chose d'arbitraire. La seconde de temps est la quatre-vingt-six mille quatre centième partie du jour, & par conséquent une division arbitraire de cette unité naturelle. Ainsi, pour fixer l'unité de longueur, on emploie non-seulement un élément hétérogène (le temps), mais un élément arbitraire.

A la vérité on éviteroit ce dernier inconvénient, en prenant pour unité le pendule hypothétique, qui ne feroit qu'une oscillation en un jour, longueur qui, divisée en dix milliards de parties, donneroit une unité de mesure usuelle d'environ vingt-sept pouces; & cette unité répondroit au pendule qui fait cent mille oscillations dans un jour. Mais alors on conserveroit encore l'inconvénient d'admettre un élément hétérogène, d'employer pour déterminer une unité de longueur, le temps, ou ce qui est la même chose ici, l'intensité de la force de gravité à la surface de la terre: or s'il est possible d'avoir une unité de longueur qui ne dépende

d'aucune autre quantité, il paroît naturel de la préférer. D'ailleurs, une unité de mesure prise sur la terre même, a un autre avantage, celui d'être parfaitement analogue à toutes les mesures réelles, que dans les usages communs à la vie, on prend aussi sur la terre, telles que les distances entre des points de sa surface, ou l'étendue de portions de cette même surface. Il est bien plus naturel en effet de rapporter la distance d'un lieu à un autre, au quart d'un des cercles terrestres, que de la rapporter à la longueur d'un pendule.

Nous avons donc cru devoir nous déterminer pour ce genre d'unité de mesure, & préférer ensuite le quart du méridien au quart de l'équateur. Les opérations nécessaires pour déterminer ce dernier élément, ne pourroient s'exécuter que dans des pays trop éloignés de nous, pour qu'elles n'entraînaient pas des dépenses & des difficultés fort au-dessus des avantages qu'on pourroit s'en promettre. Les vérifications, si jamais on vouloit y recourir, seroient plus difficiles pour toutes les nations, du moins jusqu'au temps où les progrès de la civilisation s'étendront aux peuples de l'équateur, temps malheureusement encore bien éloigné de nous. La régularité de ce cercle n'est pas plus assurée que la similitude ou la régularité des méridiens. La grandeur de l'arc céleste, répondant à l'espace qu'on auroit mesuré, est moins susceptible d'être déterminé avec précision; enfin on peut dire que chaque peuple appartient à un des méridiens de la terre; mais qu'une partie seulement est placée sous l'équateur.

Le quart du méridien terrestre deviendrait donc l'unité réelle de mesure, & la dix millionième partie de cette longueur en seroit l'unité usuelle. On voit ici que nous renonçons à la division ordinaire du quart du méridien en degrés, du degré en minutes, de la minute en secondes; mais on ne pourroit conserver cette ancienne division, sans nuire à l'unité du système de mesure, puisque la division décimale qui répond à l'échelle arithmétique, doit être préférée pour les mesures d'usage; & qu'ainsi l'on auroit pour celles

de longueur seules deux systèmes de division, dont l'un s'adapteroit aux grandes mesures, & l'autre aux petites. La lieue, par exemple, ne pourroit être à la fois & une division simple du degré, & un multiple de la toise en nombres ronds. Les inconvénients de ce double système seroient éternels : au contraire ceux du changement seront passagers ; ils ne tomberont d'ailleurs que sur un petit nombre d'hommes accoutumés au calcul, & nous n'avons pas cru que la perfection de l'opération dut être sacrifiée à un intérêt, qu'à beaucoup d'égards nous pouvions regarder comme personnel.

En adoptant ces principes, on n'introduira rien d'arbitraire dans les mesures que l'échelle arithmétique sur laquelle leurs divisions doivent nécessairement se régler. De même il n'y aura rien d'arbitraire dans les poids que le choix de la substance homogène, & facile à retrouver toujours dans le même degré de pureté & de densité, à laquelle il faut rapporter la pesanteur de toutes les autres, comme, par exemple, si on choisit pour base l'eau distillée, pesée dans le vide, ou rappelée au poids qu'elle y auroit, & prise au degré de température où elle passe de l'état de solide à celui de liquide. C'est encore à ce même point de température que seroient rapportées toutes les mesures réelles employées dans les opérations, en sorte qu'il n'existeroit dans tout l'ensemble du système rien d'arbitraire, que ce qui l'est nécessairement & par la nature même des choses. Encore le choix & de cette substance & de ce terme de température est-il fondé sur des raisons physiques, & la conservation de l'échelle arithmétique actuelle prescrite par la crainte du danger auquel ce changement, ajouté à tous les autres, exposeroit le succès de l'opération entière.

La mesure immédiate du quart d'un méridien terrestre seroit impraticable ; mais on peut parvenir à en déterminer la grandeur, en mesurant un arc d'une certaine étendue pour en conclure la valeur de l'arc total, soit immédiatement, soit en déduisant de cette mesure, la grandeur d'un

arc du méridien répondant à la centième partie de l'arc céleste de 90 degrés, & pris de manière qu'une moitié de cet arc soit au midi, & l'autre au nord, du 45° parallèle. En effet, comme cet arc est la valeur moyenne de ceux qui depuis l'équateur jusqu'aux pôles répondent à des parties égales de l'arc céleste, ou ce qui revient au même, à des distances égales en latitudes, en multipliant cette mesure par cent, on aura encore la valeur du quart du méridien. Les accroissemens de ces arcs terrestres suivent la même loi que ceux du pendule, & l'arc qui répond à ce parallèle est moyen entre tous les autres, de la même manière que le pendule du 45° degré l'est entre tous les autres pendules.

On pourroit objecter ici que la loi des accroissemens des degrés, en s'avancant vers les pôles, n'est pas aussi certaine que celle des accroissemens du pendule, quoique l'une & l'autre ne renferment que la même supposition, celle de l'ellipticité des méridiens; on pourroit dire qu'elle n'a pas été confirmée également par les observations. Mais, 1.° il n'existe pas d'autre moyen d'avoir la valeur du quart d'un des cercles terrestres. 2.° Il n'en résulte aucune inexactitude réelle, puisque l'on a la longueur immédiate de l'arc mesuré, avec laquelle celle que l'on aura conclue sera toujours dans un rapport connu. 3.° L'erreur qu'on peut commettre ici dans la détermination de la centième partie du quart du méridien ne seroit pas sensible. L'hypothèse elliptique ne peut s'éloigner de la réalité dans l'arc, dont la grandeur sera mesurée immédiatement; elle représentera nécessairement avec une exactitude suffisante la petite portion de courbe presque circulaire, & un peu aplatie, que forme cet arc. 4.° Enfin, si cette erreur pouvoit être sensible, elle pourroit aussi, par une conséquence nécessaire, être corrigée par les observations même: il ne peut subsister d'erreurs qu'autant qu'elles seroient inappréciables.

Plus l'arc mesuré sera étendu, plus les déterminations

qui en résultent seront précises; en effet, les erreurs commises dans la détermination de l'arc céleste, ou même dans les mesures terrestres, & celles de l'hypothèse, auront une influence d'autant moins sensible sur les résultats, que cet arc sera plus grand. Enfin, il y a de l'avantage à ce que les points extrêmes se trouvent l'un au midi, l'autre au nord du parallèle de 45 degrés, à des distances qui, sans être égales, ne soient pas trop disproportionnées.

Nous proposerons donc de mesurer immédiatement un arc du méridien, depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone, ce qui comprend un peu plus de neuf degrés & demi. Cet arc seroit d'une étendue très-suffisante, & il y en auroit environ six degrés au nord, & trois & demi au midi du parallèle moyen. A ces avantages se joint celui d'avoir les deux points extrêmes également au niveau de la mer : c'est pour satisfaire à cette dernière condition qui donne l'avantage d'avoir des points de niveau invariables & déterminés par la nature, pour augmenter la grandeur de l'arc mesuré, pour qu'il soit partagé d'une manière plus égale, enfin pour s'étendre au-delà des Pyrénées, & se soustraire aux incertitudes que leur effet sur les instrumens peut produire dans les observations, que nous proposons de prolonger la mesure jusqu'à Barcelone. On ne peut satisfaire en même temps à la condition d'avoir les deux points extrêmes au niveau de la mer, & à celle de traverser le 45.^e parallèle, ni en Europe, ni même dans aucune autre partie du monde, sans être obligé de mesurer un arc d'une étendue beaucoup plus grande, à moins de prendre ou la ligne que nous proposons, ou bien un autre méridien plus occidental, depuis la côte de France jusqu'à celle d'Espagne.

Ce dernier arc seroit plus également partagé par le 45.^e parallèle : mais nous avons préféré celui qui s'étend de Barcelone à Dunkerque, parce qu'il suit la méridienne tracée en France, & qu'ainsi il existe déjà une mesure de cet arc, depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan, & qu'il est

avantageux de trouver dans les travaux déjà faits une vérification de ceux que l'on doit exécuter. En effet, si dans les nouvelles opérations on retrouve, pour la distance de Perpignan à Dunkerque, un résultat semblable dans toutes les parties, on a un motif de plus de compter sur la bonté de ses opérations. S'il se trouve des différences, en cherchant quelles en sont les causes, & de quel côté est l'erreur, on sera sûr de découvrir ces causes & de corriger l'erreur. D'ailleurs, en suivant cette direction, on traverse les Pyrénées dans une ligne plus facile à parcourir.

Les opérations nécessaires pour ce travail seroient ;
 1.^o de déterminer la différence de latitude entre Dunkerque & Barcelone, & en général de faire sur cette ligne toutes les observations astronomiques qui seroient jugées utiles ;
 2.^o de mesurer les anciennes bases qui ont servi à la mesure du degré faite à Paris, & aux travaux de la carte de France ; 3.^o de vérifier par de nouvelles observations la suite des triangles qui ont été employés pour mesurer la méridienne, & de les prolonger jusqu'à Barcelone ;
 4.^o de faire au 45.^o degré des observations qui constatent le nombre des vibrations que feroit en un jour dans le vide au bord de la mer, à la température de la glace fondante, un pendule simple, égal à la dix millionième partie de l'arc du méridien, afin que ce nombre étant une fois connu, on puisse retrouver cette mesure par les observations du pendule. On réunit par ce moyen les avantages du système que nous avons préféré, & de celui où l'on auroit pris pour unité la longueur du pendule. Ces observations peuvent se faire avant que cette dix millionième partie soit connue. Connoissant en effet le nombre des oscillations d'un pendule d'une longueur déterminée, il suffira de connoître dans la suite le rapport de cette longueur à cette dix millionième partie, pour en déduire d'une manière certaine le nombre cherché. 5.^o Vérifier par des expériences nouvelles, & faites avec soin, la

pesanteur, dans le vide, d'un volume donné d'eau distillée, prise au terme de la glace. 6.^o Enfin, réduire aux mesures actuelles de longueur les différentes mesures de longueur, de surface ou de capacité usitées dans le commerce, & les différens poids qui y sont en usage, afin de pouvoir ensuite par de simples règles de trois les évaluer en mesures nouvelles lorsqu'elles seront déterminées.

On voit que ces diverses opérations exigent six commissions séparées, occupées chacune d'une de ces parties du travail. Ceux à qui l'Académie en confieroit le soin, seroient en même temps chargés de lui exposer la méthode qu'ils se proposent de suivre.

Nous nous sommes bornés dans ce premier rapport, à ce qui regarde l'unité de mesures; nous nous proposons de présenter dans un autre, le plan du système général qui doit être établi d'après cette unité. En effet, cette première détermination exige des opérations préliminaires qui demandent du temps, & qui doivent être préalablement ordonnées par l'Assemblée Nationale. Nous nous sommes cependant déjà assez occupés de ce plan, & les résultats des opérations tant pour la mesure de l'arc du méridien que pour le poids d'un volume d'eau donné, peuvent être prévus d'une manière assez approchée pour que nous puissions assurer dès aujourd'hui qu'en prenant l'unité de mesure que nous venons de proposer, on peut former un système général où toutes les divisions suivent l'échelle arithmétique, & dont aucune partie ne renferme rien qui puisse gêner dans les usages habituels.

Nous nous bornerons à dire ici, que cette dix millionième partie du quart du méridien qui seroit notre unité usuelle de mesure, ne différeroit du pendule simple, que d'un cent quarante-cinquième environ, & qu'ainsi l'une & l'autre unité conduisent à des systèmes de mesures absolument semblables dans leurs dispositions.

Nous n'avons pas cru qu'il fût nécessaire d'attendre le concours des autres nations, ni pour se décider sur le choix

de l'unité de mesure, ni pour commencer les opérations. En effet, nous avons exclu de ce choix toute détermination arbitraire, nous n'avons admis que des élémens qui appartiennent également à toutes les nations; le choix du quarante-cinquième parallèle n'est point déterminé par la position de la France, il n'est pas considéré ici comme un point fixe du méridien, mais seulement comme celui auquel correspondent la longueur moyenne du pendule & la grandeur moyenne d'une division quelconque de ce cercle. Enfin, nous avons choisi le seul méridien où l'on puisse trouver un arc aboutissant au niveau de la mer, coupé par le parallèle moyen, sans être cependant d'une trop grande étendue qui en rende la mesure actuelle trop difficile. Il ne se présente donc rien ici qui puisse donner le plus léger prétexte au reproche d'avoir voulu affecter une sorte de prééminence.

En un mot, si la mémoire de ces travaux venoit à s'effacer, si les résultats seuls étoient conservés, ils n'offriroient rien qui pût servir à faire connoître quelle nation en a conçu l'idée, en a suivi l'exécution.

Nous concluons en conséquence à présenter ce Rapport à l'Assemblée Nationale, en la priant de vouloir bien décréter les opérations proposées, & les mesures nécessaires pour l'exécution de celles qui doivent s'étendre sur le territoire de l'Espagne.



E X P O S É

DES TRAVAUX DE L'ACADÉMIE,

Sur le projet de l'uniformité des Mesures & des Poids.

L'ÉTABLISSEMENT d'un système de poids & de mesures uniformes dans toutes les parties de la France, & qui, ayant pour base une unité naturelle, pût mériter d'être adopté par toutes les nations, une opération si grande, si utile, devoit être un des bienfaits de l'Assemblée Nationale. Pouvoit-elle négliger un moyen d'épargner au commerce du temps & des erreurs, d'établir plus d'union entre les hommes, plus d'égalité entre les citoyens; de rapprocher les nations comme les individus, de donner enfin plus de justesse aux esprits, en répandant plus de simplicité, plus de clarté sur des opérations qui sont pour tous d'un usage habituel & nécessaire?

Il étoit de sa destinée de ne laisser aucune institution fondée sur l'erreur ou la violence, aucune habitude de l'ignorance ou du préjugé, sans l'avoir ou ébranlée ou détruite, & d'étendre sur tous les objets l'empire éternel & paisible de la raison.

Cette heureuse hardiesse semble en effet former le caractère distinctif de la révolution Française.

Lorsque les Helvétiens & les Bataves chassèrent leurs tyrans, satisfaits d'avoir repris leur antique indépendance, ils conservèrent leurs loix, leurs formes, leurs usages, & ils se crurent libres, parce qu'ils n'obéissoient plus qu'aux coutumes de leurs ancêtres.

L'Angleterre, après trois révolutions, se contenta de confirmer par un acte solennel, & d'établir sous une forme plus régulière quelques points contestés de son ancienne

constitution. L'Amérique s'en donna une nouvelle, & garda le reste de ses loix. Au milieu de ces grandes agitations, tous ont voulu se borner aux réformes nécessaires, tous ont craint de toucher aux parties de l'édifice qui se soutenoient encore. L'idée d'une régénération totale ou ne s'étoit pas offerte à eux ou les avoit effrayés. Leur raison n'avoit pas osé profiter de ses victoires, & ils n'avoient pas senti que les préjugés ébranlés par une première secousse, & dont la ligue une fois rompue n'a pas eu le temps de se former de nouveau, en deviennent plus faciles à vaincre, que c'est là le moment de profiter de leur désunion & de leur foiblesse, pour les en. Lopper dans une destruction commune. Cette gloire étoit réservée à la France; elle a donné la première au monde ce grand exemple & d'audace & de sagesse.

L'Assemblée Nationale a consacré par son approbation les bases adoptées par l'Académie, qui s'est empressée de nommer plusieurs commissions chargées des opérations que nécessite l'exécution des décrets. MM. Cassini, Mechain & le Gendre doivent déterminer la distance en latitude des deux points extrêmes de la ligne méridienne, & en mesurer l'étendue par une suite de triangles qui s'étendront de Dunkerque à Barcelone : depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan ce travail a été exécuté; mais ils le répéteront de nouveau, & soit que les mesures s'accordent, soit qu'elles se contrarient, il en résultera un moyen précieux de vérification. On a réuni ces deux objets dans une seule commission.

MM. Monge & Meusnier mesureront sur le terrain les bases sur lesquelles s'appuie cette suite de triangles. Cette mesure a été déjà faite; ainsi l'on retrouve encore ici l'avantage de ne pouvoir se tromper, ou ce qui est la même chose, d'être assuré de reconnoître l'erreur qu'on auroit pu commettre, & d'avoir des moyens certains d'en deviner les causes & de la corriger.

MM. de Borda & Coulomb détermineront le nombre des oscillations que fait dans un jour au quarante-cinquième parallèle, un pendule simple égal à l'unité de

mesure usuelle. Ainsi, la longueur moyenne du pendule qui fait ses oscillations dans un temps déterminé, suffira sur tous les points du globe pour connoître, pour retrouver cette unité de mesure, & l'on se procurera le seul avantage qui pouvoit faire regretter de n'avoir pas choisi pour unité la longueur du pendule.

MM. Lavoisier & Haüy chercheront le poids d'un volume donné d'eau distillée, prise au terme de la glace & pesée dans le vide.

On sera surpris peut-être de voir répéter ici des opérations déjà faites, des expériences déjà connues; mais cette surprise cessera si l'on songe que depuis un petit nombre d'années, le perfectionnement des instrumens & des méthodes a permis d'aspirer à une précision inconnue jusqu'ici; que l'exactitude des moyens de pratique s'est rapprochée de celle de la théorie: si on considère enfin que des élémens qui peuvent influer sur les habitudes, sur les usages de tous les peuples, doivent être déterminés avec une sorte de solennité, être le résultat d'un plan régulier & combiné d'opérations liées entr'elles, qu'il faut que chacun de ces élémens ait un garant qui puisse répondre de son travail, résoudre toutes les difficultés, dissiper tous les scrupules.

On objectera peut-être encore que ce même perfectionnement des instrumens qui sans doute n'est pas à son dernier terme, est un obstacle à cette même invariabilité de l'unité de mesure, donnée pour un des principaux avantages de l'opération; mais la perfection des instrumens est telle, que jamais le degré de précision qu'ils pourroient acquérir ne deviendra sensible dans l'usage des mesures. La différence d'un étalon & de la mesure usuelle dont il détermine l'étendue, sera toujours plus grande que l'erreur des instrumens employés aujourd'hui, ou du moins l'espace de temps qui nous sépare de celui où les opérations usuelles exigeroient & pourroient atteindre une telle précision, est si étendue, que pour un être d'une aussi courte durée que l'homme, il se confond avec l'éternité même.

Une dernière commission, pour laquelle MM. Tillet, Briffon & Vandermonde ont été nommés, est chargée de comparer avec la toise & la livre de Paris, toutes les mesures de longueur, de superficie ou de capacité, tous les poids usités en France, afin de pouvoir ensuite par le simple calcul, connoître leur rapport avec les nouvelles unités de mesures & de poids, travail immense, dans lequel le patriotisme soutiendra leurs forces.

Chaque commission doit rendre à l'Académie un compte détaillé & motivé des moyens qu'elle se proposera d'employer, de la suite des opérations qu'elle jugera nécessaires. Ainsi, le travail exécuté séparément & par des coopérateurs différens, sera cependant dirigé sur un plan unique & suivi dans un même esprit.

Il ne restera plus qu'à établir sur ces bases immuables un système nouveau de mesures & de poids, travail dont les difficultés purement philosophiques sont plus grandes qu'elles ne le paroissent d'abord, & dans lequel il faut ménager les habitudes sans leur sacrifier la perfection de l'ensemble, adoucir les embarras d'un changement sans rien diminuer des avantages plus éloignés qu'il doit produire.

Tel est le tableau du travail confié au zèle de l'Académie par l'Assemblée Nationale, & accepté avec reconnoissance. Depuis long-temps nos recherches l'avoient préparé, nos vœux en avoient appelé l'exécution. C'est dans le sein de cette compagnie, qu'un homme d'un grand génie, Huyghens, en a conçu & proposé la première idée il y a plus d'un siècle. Il quitta la France parce qu'il ne pouvoit y être libre, & les bienfaits d'un prince qui ne respectoit pas l'asyle de la conscience ne purent l'y retenir : il la choisiroit aujourd'hui pour sa patrie ; car la véritable patrie de l'homme de génie n'est-elle pas le pays où sous l'égide de la liberté il peut suivre en paix ses solitaires méditations, & appliquer immédiatement au bonheur des peuples les vérités qu'elles lui ont révélées ?

LES Mémoires approuvés par l'Académie, & destinés pour le volume des *Savans étrangers*, sont au nombre de vingt-deux.

Sur une pierre silicee, calcaire, alumineuse, ferreuse & magnétienne, de couleur verte, en masse spathique demi-transparente, & dont la surface est cristallisée en faisceaux, par M. Hassenfratz.

Sur un moyen de perfectionner les objectifs des lunettes acromatiques : par M. Grateloup.

Sur l'acide fluorique, son action sur la terre siliceuse, & l'application de cette propriété à la gravure sur verre : par M. de Puymaurin.

Sur les tables de Jupiter & de Saturne, déduites du principe de la pesanteur universelle, suivant la théorie de M. de la Place : par M. de Lambre.

Sur l'origine de l'acide phosphorique qui se trouve dans plusieurs mines de fer : par M. Hassenfratz.

Sur la description d'une machine construite à Vrigny en Gatinois, avec laquelle on a mesuré la quantité d'eau de pluie qui est tombée en 1787, & aussi la quantité de l'évaporation : par M. de Blaveau.

Sur deux plantes, dont la fructification s'exécute dans l'intérieur de la terre & à son extérieur : par M. Gerard.

Sur les élémens de l'orbite solaire : par M. de Lambre.

Observation de la décomposition de l'eau & de la production de l'ammoniaque pendant la dissolution de l'étain dans l'acide nitrique : par M. de Morveau.

Observations sur trois espèces de chênes qui croissent dans le Bearn : par M. l'abbé Palassou.

Examen du sel que l'on obtient en traitant l'étain avec l'acide nitreux : par M. Pelletier.

Sur le muriate d'étain fumant ou liqueur fumante de Libanius : par M. Adet.

Suite d'observations de la comète de 1787, faites à l'île de Bourbon : par M. de Lanux.

Recueil d'observations astronomiques faites à Viviers : par M. Flaugergues.

Sur la nitrière naturelle qui se trouve à Molfetta, dans la terre du Bari en Pouille : par M. Zimmermann.

Sur le mouvement horaire de la lune : par M. de Lambre.

Sur de nouveaux écueils, vigies & dangers qui se trouvent dans le sud de Madagascar, & reconnus depuis 1780 jusqu'à 1787 : par M. Fortin.

Description de la vallée du Gave Béarnois, dans les Pyrénées : par M. Reboul.

Sur les combinaisons qui résultent de l'union directe du phosphore avec les substances métalliques : par M. Pelletier.

Sur la description d'un arc-en-ciel lunaire, observé à Lyon : par M. l'abbé Rozier.

Observations météorologiques faites à la Chine : par M. de Guignes le fils.

Sur la quadrature d'un espace terminé par des arcs de cercle : par M. de la Cipierre.

MACHINE approuvée par l'Académie, & destinée à être insérée dans le *Recueil des Machines*.

Un ventilateur : par M. l'Isle Saint - Martin, lieutenant de frégate,



É L O G E

DE M. DE LASSONE.

JOSEPH - MARIE - FRANÇOIS DE LASSONE, premier médecin du Roi & de la Reine, docteur - régent de la Faculté de Médecine de Paris, de l'Institut de Bologne, de l'Académie de Médecine de Madrid, de la Société de Médecine, & pensionnaire vétérane de l'Académie des Sciences, naquit à Carpentras, le 3 juillet 1717, d'Antoine-Joachim de Lassonne & de Marguerite de Bagnole.

Le père de M. de Lassonne n'avoit accepté la place de médecin ordinaire du Roi, & quitté le comtat Venaissin sa patrie, que pour procurer à son fils ces instructions des grands maîtres que la capitale seule peut offrir, & cependant ne pas le soustraire aux regards paternels, encore plus difficiles à remplacer.

Le succès répondit à la sagesse de ces vues; & à vingt-cinq ans M. de Lassonne entra comme anatomiste à l'Académie des Sciences.

Il ne devoit pas cet honneur à son opiniâtreté dans le travail: plus d'une fois sa famille avoit été alarmée de son goût pour les plaisirs de son âge, & chaque fois il la rassuroit par quelque ouvrage qui lui méritoit ou une couronne académique ou l'estime de ses maîtres. Ces alarmes furent sur-tout très-vives lorsque ses parens apprirent qu'il étoit de la société de cette actrice célèbre par sa beauté, dont le nom lié à celui de Zaïre est devenu immortel. On sut qu'il avoit même fait une comédie, on en exigea le sacrifice: il se soumit, & jamais depuis il n'a voulu dire le titre de cette

pièce, qui cependant avoit été jouée avec succès sous un autre nom, & étoit restée au théâtre. Ce travail si étranger à ses études & ce sacrifice, étoient l'un & l'autre une preuve de la facilité, de la flexibilité qui depuis lui permirent d'acquérir dans plusieurs genres de sciences une juste célébrité.

S'il n'eut pas cette force de tête qui par des combinaisons profondes conduit à des vérités nouvelles, il eut cette heureuse sagacité qui éclaire & qui perfectionne, s'empare de ce que les premiers inventeurs ont laissé échapper, & qui unie à un esprit juste, marche d'un pas égal mais sûr, avance toujours & ne s'égare jamais.

M. de Laffone parut d'abord se livrer presque exclusivement à l'anatomie.

Ses principaux ouvrages ont pour objet la structure intime des os, de la tunique des artères & de la rate.

Il montra que le tissu des os est entièrement fibreux, que c'est dans chaque fibre même & non entre leurs mailles, entre les divers réseaux formés par elles que la matière terreuse se dépose.

Il fit voir qu'une des membranes des artères jouit d'une force musculaire qui lui est propre, & qui contribue avec celle du cœur à entretenir la circulation.

Ruifch regardoit la rate comme entièrement vasculaire. Malpighi y avoit observé une substance pulpeuse & des cellules membraneuses; & les anatomistes étoient partagés entre deux observateurs célèbres par leur exactitude, qui savoient bien voir & qui étoient d'un avis opposé, en ne parlant cependant que de ce qu'ils avoient vu.

M. de Laffone décida cette question; il expliqua pourquoi la substance pulpeuse avoit échappé à Ruifch, & pourquoi cette même substance avoit présenté à Malpighi l'apparence illusoire de véritables membranes.

Il se proposoit de suivre ce travail; il osoit même espérer de deviner l'usage de la rate, qui est encore inconnu, quoique ce viscère, sans être rigoureusement nécessaire à la conservation

conservation instantanée de la vie, paroît l'être à sa durée.

Mais un événement extraordinaire mit un terme aux travaux anatomiques de M. de Lassone. En choisissant parmi quelques cadavres un sujet propre à ses dissections, il croit n'apercevoir sur l'un d'eux que des signes de mort trop incertains, & il cherche à ranimer une vie qui peut-être n'est pas encore éteinte. Long-temps ses efforts sont vains, mais la première impression l'emporte sur cette longue inutilité; enfin il aperçoit des mouvemens qui ne sont plus équivoques. Cette mort apparente n'étoit qu'une crise salutaire. M. de Lassone guérit le malade : il étoit pauvre; M. de Lassone le nourrit, le console. Il craint que cette nouvelle vie ne soit pour cet infortuné qu'un présent funeste; il croit moins avoir rendu un service à l'humanité, qu'avoir contracté une dette envers elle, & il regarde comme un devoir de se charger du bonheur de celui qui doit à ses soins la funeste possibilité de pouvoir encore être malheureux. L'idée d'avoir été exposé à commettre un crime involontaire, ne permit plus à M. de Lassone de se livrer à des travaux que depuis il ne pouvoit envisager sans effroi. L'histoire naturelle prit la place de l'anatomie, & les connoissances qu'il avoit déjà, le trouvèrent prêt à suivre cette nouvelle carrière.

Nous ne citerons ici que son travail sur les grès cristallisés de Fontainebleau. M. de Lassone ne se borne pas à décrire ces cristallisations que M. Bezout avoit observées le premier, il cherche à montrer comment elles ont pu se former. En général les molécules des cristaux échappent à nos sens : c'est au sein d'un fluide qu'ils se forment, soit que leur substance y soit dissoute comme dans les sels, soit qu'elle-même soit réduite en liqueur, comme dans la cristallisation de l'eau ou des métaux par le refroidissement. Dans les cristaux de grès, les molécules sont sensibles; mais ce n'est pas, comme on pourroit le croire au premier coup-d'œil, une exception à la règle générale. M. de Lassone prouve qu'ils sont de véritables cristaux spathiques calcaires, qui

dans leur formation ont enveloppé une grande quantité de particules quartzeuses. Des deux substances qui composent ce grès, celle dont les parties étoient dans l'état élémentaire au moment de la réunion, est la seule qui ait pris une forme régulière, & cette forme la même qu'elle auroit affectée si elle avoit été pure & séparée des particules plus grossières qu'elle a entraînées.

La chimie, si étroitement liée à l'histoire naturelle, devint enfin l'occupation chérie de M. de Laffone. Ses nombreux mémoires offrent une suite précieuse d'observations nouvelles, utiles, soit au progrès de la science, soit à celui de l'art de composer les remèdes : par-tout on voit la sagacité de l'observateur, une sage critique, un esprit toujours juste, toujours méthodique.

La médecine lui doit de nouvelles préparations de mercure & d'antimoine. Les combinaisons de ce demi-métal avec les acides, lui ont offert des sels inconnus aux chimistes, & lorsque l'analyse des airs a enrichi la chimie d'une branche si féconde, & répandu sur la science entière une lumière inattendue, il n'a pas craint d'entrer dans la carrière, & on lui doit l'observation curieuse de la propriété qu'a l'air nitreux d'ôter à l'air inflammable mêlé à l'air vital, la propriété de détoner. C'est aussi M. de Laffone qui, dans un travail commun entre lui & M. Cornette, le compagnon fidèle de ses travaux, observa le phénomène singulier de l'inflammation du phosphore par l'affusion de l'eau froide, phénomène qui seroit pris encore dans les neuf dixièmes du globe pour un véritable miracle.

Une révolution dans une science est presque toujours un malheur pour ceux qui la cultivent, lorsqu'ils ont perdu l'ardeur & la flexibilité de la jeunesse. Il leur est difficile de suivre le progrès des idées nouvelles, alors d'autant plus rapide que chaque fait, chaque expérience est en quelque sorte une découverte, & il seroit dangereux pour leur gloire de s'obstiner à suivre les idées anciennes. Il faut peut-être autant de simplicité dans le caractère que de justesse d'esprit

pour savoir échapper en même temps à ces deux inconvéniens ; M. de Laffone en fut préservé. Naturellement éloigné des théories hypothétiques , se bornant presque toujours à des expériences, il ne vit dans cette révolution que des faits de plus à observer ; il n'y eut guère de changé pour lui que les mots : il crut pouvoir se dispenser d'adopter ce changement puisque l'ancienne langue étoit encore généralement entendue , & il continua paisiblement ses travaux.

M. de Laffone, quoique le nombre de ses ouvrages eût pu faire croire qu'il s'étoit exclusivement livré aux sciences, n'avoit pas négligé la pratique de la médecine. Après l'avoir exercée long-temps dans les hôpitaux & dans les cloîtres, il fut appelé à la Cour, & parcourant ainsi la chaîne sociale toute entière, il put observer ce que les institutions humaines ajoutent aux maux de la nature, & voir comment, en modifiant les passions & les habitudes, elles changent le tempérament des malades & le caractère des maladies. Il vit que l'excès de la richesse & celui de la pauvreté, le désir immodéré des honneurs ou du pouvoir, irrité par le succès même, & le ressentiment de l'oppression ou de l'injure que la crainte force à dissimuler, le vide que les jouissances inquiètes de la vanité laissent dans une ame qui ne connoît plus qu'elles, & l'abattement d'une longue humiliation, sont également funestes à la santé comme ils le sont au bonheur ; & que ce n'est ni près du trône ni dans les réduits de la misère qu'on peut espérer de trouver des tempéramens sains & robustes, des ames fortes & paisibles. Mais c'est dans les cloîtres sur-tout où la vie est plus uniforme, où tous les individus sont soumis à une loi commune, qu'il sentit plus fortement l'effet des affections morales, parce que chaque cause y agit d'une manière plus égale & plus isolée : & si l'on avoit besoin de preuves de fait pour savoir combien il est téméraire de s'imposer des sacrifices éternels, & cruel de consacrer ces vœux indiscrets par la force des loix & de l'autorité publique, les

observations de M. de Laffone en fourniroient de certaines. Les cloîtres lui montroient les effets lents & terribles d'une lutte éternelle entre la nature & le devoir, des regrets d'une liberté que rien ne peut plus rendre, & du poids d'une chaîne qu'il faut traîner jusqu'au tombeau. Mais heureusement cette chaîne est brisée, & nous approchons de l'époque où les institutions sociales en perfectionnant la nature sans la contraindre, en assurant, en étendant les droits des hommes sans les blesser jamais, seconderont l'ordre éternel du monde qu'elles ont contrarié si long-temps.

A Versailles, successivement premier médecin de deux reines, devenu ensuite premier médecin du Roi, réunion dont avant lui le célèbre Fernel étoit le seul exemple, il obtint dans deux cours différentes la même confiance & la même estime. Les ministres, les courtisans avoient changé; ces espèces d'associations si mobiles, qui pour quelques instans réunissent sur elles la faveur ou le pouvoir, s'étoient plus d'une fois formées d'individus différens & de partis opposés, & M. de Laffone avoit conservé les mêmes amis. Son crédit restoit toujours le même, parce qu'il n'aspiroit qu'à faire en silence un peu de bien, & ne vouloit de crédit que celui qui accompagne toujours une probité reconnue.

Il est si naturel à l'homme de chercher à conserver les prérogatives de sa place, qu'on est parvenu à en faire un honneur, & presque un devoir. Ce n'est point pour soi-même qu'on les réclame, c'est pour ne pas laisser diminuer entre ses mains le dépôt qui leur a été confié. Ce langage est reçu, il inspire une sorte de respect; souvent il a fait pardonner l'orgueil & même l'avidité. M. de Laffone étoit supérieur à ces préjugés: à peine a-t-il la survivance de la place de premier médecin, qu'il s'occupe des moyens de détruire, ce qu'on appelloit les droits de cette place, ce qu'il en regardoit comme les abus; mais il veut que cet abandon soit utile, & il imagine de confier à une académie de médecine l'examen des remèdes nouveaux & la police des eaux minérales du royaume.

Un droit levé sur la vente de ces eaux, vente que pour la sûreté du public on astreint à des formalités, faisoit partie du traitement du premier médecin, & il doit être à l'avenir le patrimoine de la nouvelle société. Ainsi cette portion importante des remèdes vraiment utiles sera soumise à une inspection plus sûre, & on trouvera sans doute des moyens de concilier les droits de la liberté & de la propriété avec une vigilance nécessaire. Les remèdes secrets, souvent si dangereux, ne tromperont plus sous la foi d'une permission trop facilement accordée, & cette police confiée à une société d'hommes éclairés sous une constitution libre, se bornera sans doute à avertir les citoyens des dangers qu'ils courent, à les instruire des ressources réelles que l'art leur prépare, sans cependant gêner leur confiance, & leur ôter le droit qu'à chaque homme de choisir pour lui ses médecins & ses remèdes. En même temps la médecine comme science devint l'objet des recherches d'une société chargée d'en étendre la sphère, & d'en approfondir les principes. Jamais un médecin n'avoit plus fait pour son art, & cette action, à la fois si noble, si utile, n'a été pour lui qu'une source de chagrins. En vain par amour pour l'égalité, & dans la crainte qu'un foible intérêt de vanité ne parût souiller la pureté du sacrifice qu'il avoit fait aux sciences, abdiqua-t-il l'honneur de présider la nouvelle société, honneur attaché à sa place par les premiers réglemens. L'implacable esprit de corps ne cessa de le poursuivre : il éprouva qu'un bien général, foible pour chacun de ceux qui le partagent est méconnu & bientôt oublié, tandis que les prétentions particulières que ce bien contrarie, sont actives & bruyantes; & il apprit par son expérience que les abus qui ont tant de censeurs lorsqu'on les menace de loin, ne trouvent plus que des défenseurs lorsqu'on commence à envisager leur destruction comme réelle & prochaine. M. de Laffone supporta la calomnie avec une tranquillité que le témoignage de sa conscience lui rendoit facile.

Des amis vertueux sont la plus douce consolation contre l'injustice; & M. de Lassone jouit pendant toute sa vie de ce bonheur. L'amitié de Fontenelle avoit honoré de ses conseils ses premiers pas dans le monde & dans la carrière des sciences. Winllou avoit voulu être son instituteur dans l'anatomie, & en reprendre pour lui les fonctions. D'Alembert & Buffon furent ses contemporains, ses confrères & ses amis. L'abbé Arnaud son compatriote conserva pour lui jusqu'à la mort la tendre affection que leur enfance avoit vu naître, & cette union fondée sur le sentiment & sur l'estime ne fut point refroidie par l'opposition de leurs goûts, de leurs caractères, de leurs occupations. Plus âgé, sa douceur, son zèle éclairé pour les progrès des lumières, lui méritèrent des amis parmi les jeunes savans, dont il encourageoit les travaux, dont la gloire étoit devenue une de ses plus vives jouissances. La tendresse de ces enfans adoptifs égaloit celle des enfans que la nature lui avoit donnés & ne la surpassoit pas.

Le bonheur d'être aimé de tous ceux dont le sort l'avoit entouré, fut la juste récompense de la sensibilité douce, de l'égalité d'humeur, de l'oubli de soi-même, de ce désir de rendre les autres heureux par des attentions de chaque instant, comme par de grands services, enfin de cette amabilité constante qui formoient le fonds de son caractère.

Dans sa jeunesse, un de ses ouvrages composé pour le prix de l'académie de chirurgie ne l'obtint pas, & M. de Lassone ne put ignorer que sa qualité de médecin, & de médecin voulant s'occuper de chirurgie, avoit rendu ses juges plus sévères & moins équitables que dans un premier concours où il n'étoit pas connu. Ce dégoût l'avoit déterminé à ne pas refuser l'offre qu'on lui faisoit d'une chaire dans l'université de Padoue, & l'honneur d'être le collègue de Morgnagni, alors dans tout l'éclat de sa gloire, pouvoit flatter un jeune anatomiste; mais cette résolution affligeoit trop un oncle qui lui servoit de tuteur & de père, &

elle ne tint pas contre les larmes de l'amitié. Celui qui dans sa jeunesse lui avoit sacrifié son amour-propre, méritoit qu'elle ne cessât d'embellir sa vie, & qu'elle consolât ses derniers jours.

Quoiqu'éloigné de sa patrie dès son enfance, M. de Laffone ne l'oublia point & n'en fut pas oublié. Au moment où la France prit en 1768 une possession momentanée du Comtat Venaissin, les États du pays chargèrent M. de Laffone de présenter au Roi les cahiers où ils demandoient la conservation de leurs franchises, foibles restes de leurs droits naturels, qu'un souverain éloigné avoit été obligé de respecter.

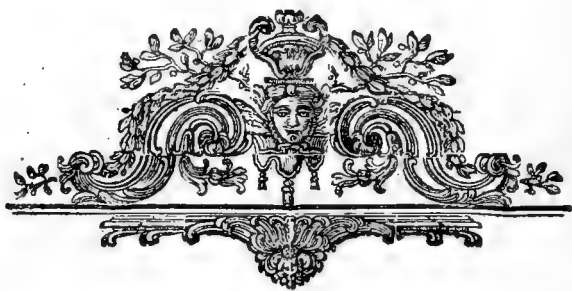
Ses aïeux avoient répandu des bienfaits sur l'hôpital de Carpentras; il voulut les imiter, mais en homme éclairé; il donna des lits de fer dont il seroit à désirer que l'usage exclusif s'introduisît dans les hôpitaux, & au bienfait en lui-même, il ajouta celui de l'exemple, peut-être plus utile encore.

Depuis long-temps l'usage destinoit le fils d'un premier médecin à posséder une de ces charges qui donnoient un droit presque exclusif de remplir les places de l'administration, & à fonder une nouvelle famille patricienne. M. de Laffone préféra pour son fils l'état où ses pères s'étoient distingués; il ne trouva point d'obstacles dans un jeune homme dont la raison prématurée apprécioit les objets d'après leur valeur réelle, & non d'après celle qu'y attache le préjugé; & c'étoit dans un temps où il étoit impossible de prévoir que ces chaînes de la vanité qui servoient à resserrer toutes les autres, seroient brisées du même coup, & qu'un système d'inégalité que quatorze siècles avoient péniblement combiné, pourroit disparaître en quelques instans.

Lorsque la délicatesse naturelle du tempérament de M. de Laffone, lui fit éprouver les inconvénients d'une vieillesse prématurée, il devint plus triste, plus solitaire, mais il conserva son caractère. Toujours attaché à la

32 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

religion, sans cesser jamais un instant d'avoir pour les opinions d'autrui cette indulgence entière que la philosophie la plus profonde ne donne qu'aux âmes douces & pures, ces sentimens religieux se réveillèrent dans son âme, à mesure que les distractions du monde & l'étude cessoient de pouvoir remplir sa vie, & ajoutèrent leurs consolations à celles de la nature & de l'amitié. Éclairé sur son état, il vit paisiblement la mort s'approcher de lui, en fixa lui-même le jour, & le 8 décembre 1788, un paisible sommeil termina une vie partagée entre des travaux utiles, des actions de bienfaisance, & les plaisirs que les sentimens tendres font goûter à une âme vertueuse.





É L O G E

DE M. LE CARDINAL DE LUYNES.

PAUL D'ALBERT DE LUYNES, cardinal-prêtre de la sainte église Romaine, archevêque de Sens, primate des Gaules & de Germanie, abbé de Corbie, commandeur de l'ordre du Saint-Esprit, &c. &c. de l'Académie Française & de celle des Sciences, &c. naquit à Versailles le 5 février 1703, d'Honoré-Charles d'Albert duc de Luynes & de Montfort, connu sous ce dernier nom, & d'Anne-Jeanne de Courcillon, fille du marquis de Dangeau, l'un de nos premiers Académiciens.

Le duc de Montfort étoit arrière-petit-fils de Charles d'Albert, qui mourut à quarante-trois ans connétable, garde des sceaux, premier ministre, & dont la mort prompte ne permit pas de juger si cette élévation si rapide, souillée par la mort des Concini & par la prison de la mère du Roi, étoit au moins justifiée par des talens réels.

M. le cardinal de Luynes, colonel à 16 ans, fut évêque de Bayeux à 26.

Le goût des sciences est héréditaire dans les deux branches de la maison de Luynes. Le duc de Chevreuse qui à la cour de Louis XIV osa presque seul se montrer l'ami de Fenelon dans la disgrâce, s'étoit instruit chez les solitaires de Port-Royal dans les principes de la nouvelle philosophie de son temps : car chaque siècle & presque

Hist. 1788.

E

chaque génération a la sienne , qui toujours calomniée par la sottise contemporaine , devient ensuite l'un des préjugés de la postérité. L'ouvrage long-temps célèbre sous le titre de l'*Art de penser*, avoit été le fruit de ces savantes conversations. Nous devons à feu M. le duc de Chaulnes une machine à diviser , faite d'après un principe ingénieux & nouveau ; & à son fils des Mémoires sur les arts & sur la chimie , où l'on trouve à la fois des vues utiles & des résultats neufs & piquans.

M. le cardinal de Luynes ne crut pas que les travaux des sciences fussent incompatibles avec les devoirs de l'épiscopat ; il avoit du moins pour excuse l'exemple du pape Gerbert , qui a introduit dans l'Europe chrétienne l'usage de l'arithmétique décimale , & qui , pour avoir été le premier mathématicien de son temps , n'en mérita pas moins par ses vertus l'archevêché de Reims & le trône pontifical.

L'astronomie , la gnomonique , la construction des instrumens de météorologie remplissoient tour à tour les loisirs de M. le cardinal de Luynes.

Ces occupations douces & faciles étoient de véritables plaisirs pour un esprit naturellement actif , & peut-être même il leur dut en partie de n'avoir jamais regretté ceux dont l'austérité de son état le condamnoit à se priver.

Dans les premières années de son séjour à Bayeux , on lui dénonça de prétendues possédées ; il eut assez de philosophie pour ne regarder cet événement que comme un phénomène de physique qu'il falloit examiner , & ces prestiges qui un siècle auparavant auroient fait élever des bûchers , disparurent aux premiers regards d'un prélat aussi éclairé que pieux. On lui a reproché de les avoir même examinés ; mais peut-être est-il plus sage de dévoiler les erreurs populaires que de les dédaigner , ou d'attendre pour les attaquer qu'elles aient déjà des enthousiastes prêts à se sacrifier pour elles , des sophistes armés pour les défendre , des fourbes intéressés à les protéger. Combien d'erreurs ont long-temps avili l'espèce humaine , qui auroient été

étouffées dans leur berceau si une sage prévoyance avoit dissipé les illusions dont la crédulité ou la fourberie l'avoient entouré ! Sans parler d'exemples plus anciens & plus effrayans, n'a-t-on pas vu de nos jours une chimère, dont le nom même est devenu ridicule , former en peu d'années une secte nombreuse , ayant des prosélytes dans toutes les classes portant déjà tous les caractères du fanatisme , & disparaître cependant au moment même où les physiciens qui l'avoient méprisée , ont laissé tomber sur elle quelques-uns de leurs regards ?

Peu d'évêques ont mieux rempli que M. le cardinal de Luynes le double devoir d'instruire les hommes de leurs devoirs & de les soulager dans leurs malheurs. Il avoit une éloquence naturelle , peut-être un peu verbeuse , mais douce , facile , harmonieuse , toujours claire , souvent noble & même élégante.

Il parloit sur le champ & sans la moindre préparation : on l'a vu remplacer dans la chaire un orateur à qui la mémoire avoit manqué , reprendre son texte & ses divisions , les suivre & les remplir. Dans ces occasions , ni ses traits , ni le son de sa voix ne laissoient apercevoir la moindre trace ni d'effort , ni même de la plus légère contention ; on auroit cru qu'il prononçoit un discours sur lequel sa mémoire s'étoit long-temps exercée , si une noble familiarité , un abandon touchant n'avoient empêché d'en avoir même l'idée.

La moitié de son revenu étoit distribuée en aumônes , & il tenoit une balance égale entre tous les infortunés qui vivoient dans les bénéfices. Que le riche depositaire du bien des pauvres compatisse a leur misère , qu'il cède au sentiment de la bienfaisance dont son état lui fait un devoir , rien sans doute n'est plus simple ; mais que cette bienfaisance soit réglée par une justice impartiale , que l'indigent éloigné ait la même part que celui dont le bienfaiteur peut entendre les bénédictions , c'est-là que la vertu commence , & telle fut la conduite constante de M. le cardinal de Luynes.

Il craignit même que par la suite trop commune de la non résidence dans les abbayes, les pauvres de Corbie ne fussent négligés par ses successeurs, & il plaça quarante mille écus pour leur assurer des secours perpétuels. Aussi sa mort fut-elle une calamité publique pour ce peuple qui n'avoit point connu le bienfaiteur qu'il pleuroit; & des yeux qui jamais n'avoient rencontré ses regards, répandirent sur son tombeau les larmes de la reconnoissance.

Zélé pour la religion, il voyoit avec peine qu'elle n'eût pas dans tous ceux qui la professoient des enfans bien fidèles. Il s'efforça par des sermons, par des instructions pastorales d'empêcher l'incrédulité de faire des progrès dans le troupeau confié à ses soins. Il oppoisoit aux objections des raisonnemens simples comme ceux à qui il les destinoit; mais ce zèle infatigable n'étoit souillé d'aucune amertume. Sincère dans sa croyance, il pensoit que d'autres pouvoient l'être dans une croyance contraire, & que pour l'intérêt même de sa cause, il devoit donner l'exemple de l'indulgence & de la justice. Un jour qu'un homme soupçonné de n'être pas assez religieux, lui demandoit sa voix pour une place qui, à la vérité, n'intéressoit que les sciences: *On m'a dit*, lui répondit M. le cardinal de Luynes, *que vous étiez incrédule. Si cela est, c'est un malheur pour vous, & je dois chercher à vous détromper; mais d'autres m'ont assuré que vous étiez digne de la place, & vous aurez ma voix* (1).

M. le cardinal de Luynes termina une carrière paisible & vertueuse par une mort douce le 22 janvier 1788.

Sa place d'honoraire à l'Académie des Sciences a été remplie par M. le maréchal de Caltries.

(1) C'est à l'auteur même de cet Éloge que M. le Cardinal de Luynes a donné cette preuve de sa tolérance.





É L O G E

DE M. DE FOUCHY.

JEAN - PAUL GRANDJEAN DE FOUCHY, auditeur des comptes, secrétaire ordinaire de M. le duc d'Orléans, secrétaire perpétuel honoraire de l'Académie des Sciences & de la Société royale de Londres, &c. naquit à Paris le 17 mars 1707, de Philippe Grandjean de Fouchy & de Marie-Magdeleine Hynault.

Son pere issu d'une famille noble du Mâconnois & destiné par ses parens à l'état ecclésiastique, l'avoit été par la nature à s'occuper des arts, & le fut par le hafard à perfectionner celui de l'imprimerie. Conduit par la curiosité dans l'atelier d'un imprimeur, il fut frappé de l'imperfection des caractères alors employés par les presses Françoises. Dès le soir même il essaya de dessiner quelques lettres capitales & de leur donner l'élégance, la netteté & les belles proportions dont le défaut avoit révolté son goût. Ces essais confiés sans dessein à un de ses amis, furent portés par lui au chancelier de Pontchartrain, & montrés bientôt à Louis XIV, qui saisit avec l'empressement d'un prince amoureux de toutes les espèces de gloire, l'occasion de donner aux éditions Françoises l'avantage sur celles de la Hollande, & de faire cesser à l'égard d'une nation ennemie, cette infériorité que le grand nombre d'écrivains éloquens & d'hommes de génie dont s'honoroit alors la France, sembloit rendre encore plus humiliante.

Le jeune Granjean fut chargé du soin de dessiner & de faire fondre de nouveaux caractères, & par un hasard heureux qui justifia le choix du ministre, il se trouva réunir au mérite de dessiner avec goût, le talent & l'amour des arts, l'activité & la patience dans le travail.

La découverte de l'imprimerie a ouvert à l'humanité entière la route du bonheur comme celle de la liberté. Elle seule a rendu les vérités éternelles, elle seule en a fait le patrimoine commun de tous les hommes, & c'est par elle seule qu'il n'existe plus aucun terme ni aux progrès de l'esprit humain, ni à la perfection des institutions sociales.

La reconnoissance suffiroit donc pour excuser le luxe des belles éditions, mais il est juste d'observer encore que la perfection même la plus recherchée dans les arts utiles, ne doit pas être regardée comme un raffinement de fantaisie. Sans ces éditions superbes qui ne servent qu'à flatter le goût de quelques amateurs riches, on ne parviendroit pas à rendre faciles à lire les éditions communes. Pour que le grand nombre jouisse du progrès d'un art, il faut presque toujours qu'auparavant ces mêmes progrès aient procuré au petit nombre des plaisirs exclusifs. Les productions des arts, qui joignent une utilité réelle & nouvelle à la magnificence & à la rareté, ne doivent donc point attirer à ceux qui les recherchent la censure des moralistes même les plus sévères, & il est juste de pardonner aux riches des fantaisies qui peuvent un jour ouvrir à tous les hommes de nouvelles sources de jouissances.

Rempli d'enthousiasme pour son art, le père de M. de Fouchy destinoit son fils à lui succéder, & lui réservoît l'honneur d'achever son ouvrage, en y ajoutant les alphabets des langues Orientales qui manquoient encore. Aussi après une éducation soignée & dirigée suivant le vœu de son père qu'il avoit perdu dès son enfance, M. de Fouchy s'occupoit de dessiner & de faire graver des lettres Hébraïques. Mais les circonstances avoient changé. Louis XIV attachoit un si haut prix à la perfection exclusive des éditions Fran-

çoisés, qu'il refusa une frappe des matrices de l'Imprimerie royale, gravées par le père de M. de Fouchy, à ce même Philippe V son petit-fils, pour lequel il avoit prodigué le sang & les trésors de la France. Mais M. de Fouchy s'aperçut bientôt que la protection de Louis XIV avoit seule empêché les administrateurs subalternes de confondre avec de simples ouvriers les artistes qui en perfectionnant un art utile, servoient à la gloire de la nation, à son commerce, & même à répandre les lumières, puisqu'il résulte de la perfection de l'imprimerie, qu'on peut lire plus long-temps de suite sans fatigue & lire davantage dans un temps égal.

M. de Fouchy fut donc obligé de renoncer à suivre les traces de son père, & déterminé par son goût naturel que l'éducation avoit favorisé, il se consacra tout entier à l'étude des sciences. Il s'étoit formé à Paris une société composée de savans & d'artistes, qui devoient s'occuper d'appliquer aux arts les principes & les théories scientifiques qui peuvent en diriger, en assurer, en perfectionner la pratique. Cette société qui comptoit au nombre de ses membres MM. Clairault, de Gua, la Condamine, l'abbé Nollet, Rameau, Sulli, Julien le Roy & ses fils, pouvoit être également utile aux sciences & aux arts.

En cherchant à trop rapprocher les sciences de la pratique, à leur interdire les pures spéculations, sous prétexte de l'inutilité actuelle de ces spéculations, on s'exposeroit à retarder leur progrès. Ce seroit ôter au génie son indépendance, & borner son effor dans une carrière trop étroite, ce seroit même troubler sa marche, puisque la chaîne des vérités qui s'appellent mutuellement, & dont la découverte devient successivement possible par celle des méthodes nouvelles, n'a aucun rapport avec la suite des vérités qui doivent devenir aussi, chacune à leur tour, d'une utilité pratique. C'est précisément parce que les recherches difficiles, les découvertes qui agrandissent la sphère de l'esprit humain, peuvent rester long-temps inapplicables aux usages de la

vie, qu'il est bon que des compagnies savantes en maintiennent le goût, rassemblent les hommes qui s'en occupent, leur offrent des récompenses, les encouragent enfin en fixant sur eux les regards, en leur assurant l'estime de ceux qui ne sont pas en état de les juger. Si ces sociétés elles-mêmes paroissent accorder la préférence aux travaux qui se rapportent à la pratique, qui déjà donnent une gloire plus populaire & réunissent plus de facilité à l'espérance d'avantages plus grands, les sciences seroient menacées d'une langueur qui bientôt s'étendrait jusque sur les arts même auxquels on les auroit imprudemment sacrifiées. D'un autre côté il résulteroit de l'heureuse réunion des artistes & des savans, que ceux-ci devenoient en quelque sorte d'utiles intermédiaires entre les savans qui ignorent les arts, & les artistes qui n'ont pas pénétré assez avant dans le sanctuaire des sciences. Tantôt discutant avec les savans les principes qui pouvoient servir de guides dans les arts, tantôt éclairés par les artistes sur les difficultés de ces applications, instruisant à leur tour les premiers sur les vues que la pratique des arts peut offrir pour le progrès des sciences, les autres sur l'utilité qu'ils peuvent retirer de ces mêmes progrès, ils auroient procuré à la fois & aux sciences & aux arts tous les avantages réciproques qui peuvent naître de leur réunion. Des préjugés, de petites jalousies firent tomber cette institution utile, qu'on ne peut s'empêcher de regretter.

M. de Fouchy fut enlevé à cette société par l'Académie, qui le choisit comme astronome en 1731. Ses nombreux Mémoires renferment des méthodes d'observer ingénieuses & faciles, des moyens adroits, prompts & peu coûteux, de se passer d'instrumens difficiles à se procurer ou à transporter sans nuire à la précision des observations, & prouvent qu'un mélange heureux de simplicité & de finesse formoient le caractère particulier de son talent. Nous n'en citerons ici que deux exemples.

Les immersions & les émerfions des satellites de Jupiter, présentoient dans leur période des irrégularités que les astronomes

astronomes n'avoient pu encore expliquer. M. de Fouchy imagina d'en chercher la cause dans les loix de l'optique. On sait que les objets ne commencent à être visibles qu'à l'instant où leur diamètre apparent a une certaine étendue, qui est la même pour tous les corps également éclairés ; ainsi un satellite plus éloigné de la terre & dont le diamètre apparent est alors plus petit, doit avec une lumière égale disparaître plus tôt & reparoître plus tard : en même temps un corps plus éclairé est visible sous un moindre diamètre apparent ; ainsi un satellite doit disparaître d'autant plus tard & reparoître d'autant plus tôt, qu'il répand plus de lumière. M. de Fouchy fit voir que ces deux causes pouvoient expliquer les irrégularités observées ; mais on n'admet en astronomie que des explications calculées. Un autre principe d'optique en offroit le moyen ; toutes choses égales d'ailleurs, la lumière des objets vus à travers un verre varie, suivant l'ouverture de la lunette : il s'agissoit donc de comparer le moment de l'émerision ou de l'immersion d'un satellite, en l'observant avec des lunettes égales, mais de différentes ouvertures ; dès-lors on jugeoit de l'influence que plus ou moins de lumière avoit sur leur disparition, & on pouvoit calculer la loi suivant laquelle cette cause agissoit sur le phénomène.

Cette idée ingénieuse de M. de Fouchy, abandonnée par lui, a été suivie & perfectionnée avec succès par un de nos confrères qui appelé depuis peu à des places honorables & importantes, par le choix libre de ses concitoyens, a réfuté par son exemple le préjugé qui excluoit des fonctions publiques ceux dont l'étude des lettres, des sciences ou de la philosophie avoit fortifié la raison, élevé l'ame & ennobli le caractère.

La nécessité d'un parallélisme parfait entre les parties fixes d'un niveau à la lunette, en rend la construction difficile : cette difficulté n'existe plus si l'on emploie le niveau ordinaire ; mais il eût fallu que les deux branches du niveau, placées dans une lunette, pussent toutes deux être vues distinctement. C'est ce qu'a exécuté M. de Fouchy,

au moyen d'une lunette à quatre verres ; une des branches est vue dans une situation directe, l'autre dans une situation renversée, & il en résulte la facilité d'observer le point du niveau avec la plus grande précision.

En 1743, M. de Fouchy fut nommé secrétaire perpétuel de l'Académie. C'étoit succéder à M. de Fontenelle, dont M. de Mairan n'avoit voulu occuper la place qu'un petit nombre d'années, pour laisser le temps de faire un choix que ses talens & la célébrité du neveu de Corneille rendoient si difficile. Pour mériter de le remplacer, il falloit ne pas vouloir lui ressembler, & savoir se conformer à la différence des temps & des opinions. Contemporain d'Arnaud & de Voltaire, de Bossuet & de Montesquieu, témoin des derniers instans de l'ancienne physique, du règne & de la chute du cartésianisme, remplacé, grâce aux découvertes de Newton & de Locke, par une philosophie plus vraie, M. de Fontenelle avoit observé ces grandes révolutions, dont il avoit été lui-même un des instrumens les plus utiles ; il avoit vu des vérités, qui dans sa jeunesse étoient le secret de la conscience de quelques sages, devenir vers la fin de sa vie l'opinion à la mode des gens du monde. Cachant sous des formes simples les vues d'une philosophie profonde, ayant le double talent de rendre populaires les vérités qu'il jugeoit utile de répandre, & de voiler celles qu'il croyoit ne devoir semer que dans un petit nombre d'esprits ; il savoit choisir ses expressions de manière à réveiller des idées différentes dans les diverses classes de lecteurs, & à faire entendre à chacun ce qu'il pouvoit comprendre, ce qu'il devoit savoir, tandis que cependant tous croyoient également l'avoir entendu. M. de Fontenelle avoit donc, soit par une suite de son caractère, soit par un choix volontaire, la philosophie qui convenoit le mieux au moment où la marche naturelle des esprits avoit marqué pour les peuples de l'Europe le passage de la servitude des préjugés au règne de la raison, c'est-à-dire, à une

époque où la vérité timide & méconnue ne pouvoit plus se cacher , mais ne devoit se montrer qu'avec précaution , où il falloit placer devant elle un voile qui l'empêchât de blesser des yeux long-temps fermés à la lumière , & que cependant les hommes dignes de la contempler & cachés dans la foule , pussent aisément soulever.

Mais ces formes ingénieuses, ce talent de ne montrer la vérité qu'à demi afin d'augmenter le plaisir de la saisir , de cacher sous des expressions communes la force ou la hardiesse des idées , n'eussent plus été dans les successeurs de M. de Fontenelle que la manière d'un écrivain , & non l'art d'un philosophe qui craint de compromettre la raison ; & le moment étoit venu où elle pouvoit se montrer avec moins de parure.

Dans un temps où les sciences n'étoient pas si répandues , M. de Fontenelle devoit chercher à rapprocher leurs principes , leur marche , leurs méthodes, des conceptions de la métaphysique générale. Dans un temps où elles étoient plus communes , M. de Fouchy devoit s'attacher davantage à montrer l'esprit des principes & des méthodes propres à chacune d'elles. L'un devoit avoir pour but de donner une idée juste de toutes les sciences à ceux qui n'en avoient étudié aucune ; l'autre d'initier ceux qui avoient cultivé une science, aux principes de toutes les autres. L'un avoit à séparer les faits , ou les résultats des explications hypothétiques qui par-tout s'y mêloient presque involontairement ; l'autre à lier , à donner un ordre systématique à des faits isolés & souvent présentés sans les rapprochemens qui pouvoient seuls en faire sentir l'importance. L'un avoit à rappeler l'utilité générale des sciences , la beauté du spectacle qu'elles présentent à l'esprit humain , le noble exercice qu'elles offrent à son activité ; l'autre parlant à des hommes déjà passionnés pour elles , devoit se borner à faire sentir l'utilité de chaque travail , pour le progrès de la science à laquelle il appartient. L'histoire de M. de Fontenelle devoit être plus philosophique , celle de M. de Fouchy

plus savante, & on voit en la lisant que fidèle à ce principe, son auteur à su y mettre cette exactitude rigoureuse, cette clarté qui suppose la réunion d'une extrême justesse d'esprit, à la facilité de varier & d'étendre ses connoissances sans les confondre.

Dans ses éloges, M. de Fouchy fut moins ingénieux que Fontenelle, mais il eut presque toujours le mérite de ne pas chercher à l'être. La simplicité, la vérité, l'exactitude sont le principal caractère de ses portraits. Il inspire la confiance, parce qu'il ne paroît chercher à rien embellir. S'il se présente à lui des réflexions fines, des images heureuses, on voit que son sujet les lui inspire, & non qu'il ait travaillé pour l'en orner; mais son style toujours simple, est presque toujours noble & pur; mérite devenu rare dans un temps où le désir de faire effet par l'expression, & de suppléer par la bizarrerie des mots à la nullité des idées, confond tous les tons, tous les genres; & a fait du défaut de mesure & de goût, un des secrets de l'art d'obtenir une gloire de quelques jours, & d'échapper par un prompt oubli au redoutable jugement de la postérité.

M. de Fontenelle avoit donné à ses successeurs d'autres exemples, que M. de Fouchy a su imiter.

Le secrétaire d'une compagnie savante est le confident nécessaire de toutes les petites passions que peuvent exciter entre ses membres l'amour de la gloire ou de la considération, les différences d'opinions, & même la rivalité des divers genres de sciences. Il est le témoin de ces secrètes foiblesses d'amour-propre, dont les lumières, les talens, la célébrité même ne guérissent pas toujours. Son indiscretion pourroit souvent faire dégénérer en querelles, ces semences de division que le silence étouffe pour jamais.

Obligé à l'impartialité sans l'être cependant à dissimuler ses opinions, de tenir une balance égale sans abjurer ses affections personnelles, d'éviter jusqu'au scrupule le soupçon de vouloir exercer une influence pour laquelle la perpétuité de sa place lui donne tant de moyens, il lui seroit impossible

de remplir ces devoirs, si la modération de son ame, si la facilité & le calme de son caractère, si même un esprit supérieur au petit & dangereux honneur de paroître gouverner ceux dont il ne doit être que l'organe, ne lui rendoient ces devoirs faciles.

M. de Fouchy les a remplis tous, & la confiance, l'amitié de ses confrères en ont été la douce & juste récompense.

Après avoir occupé sa place pendant trente ans, avec une exactitude qui ne se démentit jamais, & un zèle que rien ne pouvoit ni refroidir ni lasser, M. de Fouchy crut que ses infirmités & son âge lui donnoient droit de chercher non le repos, mais la liberté; il eut la bonté de jeter les yeux sur moi pour l'aider dans ses fonctions, & de me destiner à lui succéder. Le zèle pour les sciences, la persuasion intime de leur utilité, une vie vouée uniquement à les cultiver, avoient seuls pu le décider à me donner cette marque si honorable de son estime. Modeste pour son successeur comme il l'avoit été pour lui-même, il regarda l'amour de la vérité comme la qualité qui devoit déterminer son choix, parce que c'étoit la seule dont il se fût jamais permis de se piquer. Trois ans après il cessa d'exercer les fonctions de secrétaire.

Le temps pendant lequel il les a remplies, a été dans les sciences l'époque d'une heureuse révolution.

Le système du monde, ce monument le plus imposant des forces & de la grandeur de l'esprit humain, appuyé par Newton sur des fondemens inébranlables, s'étoit élevé par le génie de ses successeurs à une hauteur qu'on eût à peine osé espérer des travaux de plusieurs siècles. L'action réciproque des corps célestes, le mouvement de leurs axes, les révolutions des plans de leurs orbites avoient été soumis au calcul, leurs masses avoient été fixées, leur figure déterminée.

Les comètes même n'ont pu lui échapper dans ces espaces immenses où après avoir paru quelques momens,

elles dispaſſoient pendant des ſiècles entiers. De nouvelles méthodes d'analyſe , de nouveaux principes de mécanique avoient changé la face de ces ſciences , & prouvé qu'il n'étoit rien où le génie , aidé du temps , ne pût ſe flatter d'atteindre.

La chimie ſi long-temps égarée dans d'obſcures chimères , qui flattant les deux paſſions les plus violentes des ames vulgaires , l'envie de ſ'enrichir & celle de vivre , avoient été portées juſqu'à la ſuperſtition & au délire , s'étoit vue enſuite arrêter dans ſes premiers progrès par l'amour des explications mécaniques ; mais enfin elle s'étoit dégagée de ces liens , & dans le moment où déjà elle offroit une maſſe de faits précis & liés entr'eux , la découverte de nouvelles ſubſtances qui juſqu'alors avoient échappé à nos inſtrumens , a fait diſparoître un des degrés qui ſéparent les principes des corps que nous pouvons ſaiſir , de ces élémens ſimples & inaltérables , derniers termes de nos efforts & de nos eſpérances.

Tandis que de nouvelles méthodes perfectionnoient la nomenclature de l'hiſtoire naturelle , cette ſcience , après s'être long-temps bornée à exercer la mémoire par des catalogues & l'imagination par des ſyſtèmes , étoit devenue ce qu'elle doit être , la deſcription & l'hiſtoire de tous les êtres de la nature , l'examen de leurs rapports , l'étude de leurs propriétés.

La phyſique avoit acquis une nouvelle branche ; les merveilles de l'électricité avoient été analyſées & ſoumiſes à des loix , & un phyſicien illuſtre avoit découvert à la fois & la nature de la foudre & le moyen d'en prévenir les ravages.

En même-temps que le ſyſtème général des ſciences ſ'enrichiſſoit de nouvelles méthodes de calcul , d'inſtrumens nouveaux , de faits inconnus , toutes acquéroient à la fois plus de méthode & de précision , toutes devenoient plus utiles par des applications multipliées , & il ſe formoit entr'elles une union plus intime , non plus comme autre-

fois par des applications ingénieuses & forcées, mais parce que chacune s'étendant à la fois, elles étoient toutes parvenues au point où elles peuvent s'entr'aider & commencent à se confondre.

Ces rapides progrès des sciences présageoient une révolution générale dans les opinions; les esprits contractoient plus de justesse, la raison prenoit une marche plus sûre. Les sophismes des préjugés ne pouvoient se soutenir longtemps si près de la logique des sciences. En voyant tout ce que l'esprit humain y avoit créé de grand, il étoit difficile de soutenir encore qu'il ne pût, en se portant sur d'autres objets, enfanter que des erreurs, & l'on ne pouvoit plus, sans une tyrannie ridicule, lui interdire le droit d'examen sur les questions importantes pour son bonheur, à l'instant où il en faisoit un usage si heureux pour sa gloire.

M. de Fouchy fut témoin de ces nobles efforts qui ont enfin délivré la raison humaine de ses antiques entraves; il en suivit les progrès, & il a dû prévoir la révolution plus utile encore qui devoit les suivre, celle qui doit rétablir enfin les hommes dans leurs véritables droits, bien moins usurpés par la force que méconnus par l'ignorance, ou trahis par l'erreur; car l'empire de la force ne dure qu'un instant si les préjugés ne désunissent & ne trompent ceux qu'elle opprime. Tandis qu'égarés par leurs intérêts, par leurs passions, par l'amour même de l'indépendance, les hommes ne feroient que changer de chaîne: les lumières seules peuvent leur assurer une liberté durable & paisible, & l'on peut dire de la liberté politique, de celle des nations, ce qu'un philosophe illustre a dit de la liberté morale, que plus l'homme est éclairé, plus il est libre.

En quittant les fonctions de sa place, M. de Fouchy ne voulut renoncer ni aux sciences, ni à l'Académie; assidu plus par zèle & par amitié pour ses confrères que par habitude, il reprit les travaux que sa place lui avoit fait abandonner depuis plus de trente ans, & il en termina plusieurs. Il eut même le courage de former de

nouveaux projets : tel étoit celui de rassembler dans un petit espace les faits les plus intéressans de l'histoire de l'Académie, de former un tableau de tout ce qu'elle a fait pour l'utilité publique & pour le progrès des sciences. C'étoit offrir à la fois à tous ceux qui les cultivent ou qui les aiment, à tous ceux qui se plaisent à suivre les développemens de l'esprit humain, une lecture instructive & piquante, & donner à l'Académie, pour qui sa vie presqu'entière avoit été consumée, une dernière marque d'un zèle si constant & si pur.

Quelques années après sa retraite, M. de Fouchy éprouva un accident singulier. Saisi d'un étourdissement, il fit une chute, & le lendemain ayant repris sa connoissance entière, jouissant de toute sa tête, il s'aperçut que si les organes de la voix qui avoient été embarrassés pendant quelque temps, étoient devenus presque libres, ils avoient cessé d'obéir à sa volonté; que lorsqu'il vouloit énoncer un mot, sa bouche en prononçoit un autre, en sorte que, dans le moment où il avoit des idées nettes, ses paroles étoient sans suite. Lui-même a rendu compte de cet accident dans nos Mémoires, a détaillé tous les symptômes, toutes les particularités de ce phénomène avec une simplicité, un calme, une indifférence même dignes des héros du stoïcisme antique; & on voit par ces détails, qu'au milieu même de ces symptômes si effrayans qui le menaçoient pour le reste de sa vie d'une existence pénible & humiliante, il étoit plus occupé d'observer ses maux que de s'en affliger. Après une longue suite d'infirmités qu'il souffrit avec une patience philosophique & une résignation chrétienne, M. de Fouchy y succomba le 15 avril 1788.

Né avec un caractère paisible & modéré, il eut tous les goûts des âmes douces. Il cultivoit la poésie, mais dans le secret de l'amitié, ne faisant que des vers de société, & sachant combien ils perdent de leur prix en se répandant dans le public où ils n'ont plus ce qui en fait souvent tout le charme, le mérite de l'à-propos, de la promptitude

& des convenances personnelles , ou enfin il ne sont plus appréciés que par la justice. Cependant ces vers étoient ingénieux & faciles , & en les condamnant à l'oubli , il a montré encore plus de modestie que de prudence.

Il aimoit la musique & jouoit de plusieurs instrumens. Il ne cessa jamais de cultiver ces talens qu'on acquiert dans la jeunesse , pour les négliger bientôt , lorsque cessant d'être un moyen de succès dans le monde , ils ne sont plus qu'une ressource pour le bonheur. Presque tous les dimanches il touchoit l'orgue dans quelque église de son voisinage dont l'organiste le prioit de prendre sa place ; par-là il satisfaisoit à la fois son goût pour la musique , sa piété & son zèle pour obliger , & il rendoit ce service avec tant de simplicité & de bonhomie , que peut-être il a été le seul homme qui ait fait un usage public de talens étrangers à son état & à ses occupations , sans pouvoir être soupçonné même de la plus légère vanité.

Il avoit été marié deux fois ; l'une avec mademoiselle de Boitissandeau , dont le frère a donné une machine arithmétique approuvée par l'Académie ; la seconde avec M.^{lle} Desportes - Pardaillan. De son premier mariage il n'eut qu'une fille mariée à M. Petau , petit neveu du père Petau , jésuite , & aussi par sa mère petit-neveu du père Malebranche. Du second il a deux fils , l'un officier dans les troupes des colonies , l'autre dans le régiment d'Orléans dragons , & une fille aujourd'hui veuve de M. le marquis de Gerins.





É L O G E

DE M. LE COMTE DE BUFFON.

GEORGES-LOUIS LECLERC, comte de Buffon, trésorier de l'Académie des Sciences, de l'Académie Française, de la Société royale de Londres, des Académies d'Édimbourg, Pétersbourg, Berlin, de l'Institut de Bologne, naquit à Montbard le 7 septembre 1707, de Benjamin Leclerc de Buffon, conseiller au parlement de Bourgogne, & de M.^{lle} Marlin.

Animé dès sa jeunesse du désir d'apprendre, éprouvant à la fois & le besoin de méditer & celui d'acquérir de la gloire, M. de Buffon n'en avoit pas moins les goûts de son âge; & sa passion pour l'étude, en l'empêchant d'être maîtrisé par son ardeur pour le plaisir, contribuoit plus à la conserver qu'à l'éteindre. Le hasard lui offrit la connoissance du jeune lord Kingston, dont le gouverneur aimoit & cultivoit les sciences: cette société réunissoit pour M. de Buffon l'instruction & l'amusement; il vécut avec eux à Paris & à Saumur, les suivit en Angleterre, les accompagna en Italie.

Ni les chef-d'œuvres antiques, ni ceux des modernes qui en les imitant les ont souvent surpassés, ni ces souvenirs d'un peuple-roi sans cesse rappelés par des monumens dignes de sa puissance, ne frappèrent M. de Buffon; il ne vit que la nature, à la fois riante, majestueuse & terrible, offrant des asiles voluptueux & de

paissibles retraites entre des torrens de laves & sur les débris des volcans , prodiguant ses richesses à des campagnes qu'elle menace d'engloutir sous des monceaux de cendres ou des fleuves enflammés, & montrant à chaque pas les vestiges & les preuves des antiques révolutions du globe. La perfection des ouvrages des hommes , tout ce que leur foiblesse a pu y imprimer de grandeur , tout ce que le temps a pu leur donner d'intérêt ou de majesté, disparut à ses yeux devant les œuvres de cette main créatrice dont la puissance s'étend sur tous les mondes , & pour qui , dans son éternelle activité, les générations humaines sont à-peine un instant. Dès-lors il apprit à voir la nature avec transport comme avec réflexion, il réunit le goût de l'observation à celui des sciences contemplatives , & les embrassant toutes dans l'universalité de ses connoissances , il forma la résolution de leur dévouer exclusivement sa vie.

Une constitution qui le rendoit capable d'un travail long & soutenu , une ardeur qui lui faisoit dévorer sans dégoût & presque sans ennui les détails les plus fastidieux, un caractère où il ne se rencontroit aucune de ces qualités qui repoussent la fortune, le sentiment qu'il avoit déjà de ses propres forces, le besoin de la considération , tout sembloit devoir l'appeler à la magistrature où sa naissance lui marquoit sa place , où il pouvoit espérer des succès brillans & se livrer à de grandes espérances : elles furent sacrifiées aux sciences, & ce n'est point le seul exemple que l'histoire de l'Académie puisse présenter de ce noble dévouement. Ce qui rend plus singulier celui de M. de Buffon , c'est qu'alors il n'étoit entraîné vers aucune science en particulier par cet attrait puissant qui force l'esprit à s'occuper d'un objet, & ne laisse pas à la volonté le pouvoir de l'en distraire. Mais tout ce qui élevoit ses idées ou agrandissoit son intelligence , avoit un charme pour lui ; il savoit que si la gloire littéraire est, après la gloire des armes, la plus durable & la plus brillante, elle est de toutes, celle qui peut le moins être contestée ; il savoit enfin que tout homme qui attire les

regards du public par ses ouvrages ou par ses actions, n'a plus besoin de place pour prétendre à la considération, & peut l'attendre de son caractère & de sa conduite.

Les premiers travaux de M. de Buffon furent des traductions ; anecdote singulière que n'a encore présentée la vie d'aucun homme destiné à une grande renommée. Il désiroit se perfectionner dans la langue Angloise, s'exercer à écrire dans la sienne, étudier dans Newton le calcul de l'infini, dans Hales les essais d'une physique nouvelle, dans Tull les premières applications des sciences à l'agriculture ; il ne vouloit pas en même temps qu'un travail nécessaire à son instruction retardât l'instant où il commenceroit à fixer sur lui les regards du public, & il traduisit les livres qu'il étudioit.

Chacune de ces traductions est précédée d'une préface. M. de Buffon a obtenu depuis, comme écrivain, une célébrité si grande & si méritée, que les essais de sa jeunesse doivent exciter la curiosité. Il est naturel d'y chercher les premiers traits de son talent, de voir ce que les observations & l'exercice ont pu y ajouter ou y corriger, de distinguer en quelque sorte les dons de la nature & l'ouvrage de la réflexion. Mais on ne trouve dans ces préfaces qu'un des caractères du style de M. de Buffon, cette gravité noble & soutenue qui ne l'abandonne presque jamais. Son goût étoit déjà trop formé pour lui permettre de chercher des ornemens que le sujet eût rejetés, & son nom trop peu connu pour le risquer. La timidité & la hardiesse peuvent être également le caractère du premier ouvrage d'un homme de génie ; mais la timidité qui suppose un goût inspiré par la nature & une sagesse prématurée, a été le partage des écrivains qui ont montré le talent le plus pur & le plus vrai. Rarement ceux dont une crainte salutaire n'a point arrêté les pas au commencement de la carrière, ont pu en atteindre le terme & ne pas s'y égarer.

M. de Buffon parut d'abord vouloir se livrer uniquement aux mathématiques : regardées, sur-tout depuis

Newton , comme le fondement & la clé des connoissances naturelles , elles étoient en quelque sorte devenues parmi nous une science à la mode , avantage qu'elles devoient en partie à ce que M. de Maupertuis, le savant alors le plus connu des gens du monde , étoit un géomètre. Mais si M. de Buffon s'occupa quelque temps de recherches mathématiques , c'étoit sur-tout pour s'étudier lui-même , essayer ses forces , & connoître la trempe de son génie. Bientôt il sentit que la nature l'appeloit à d'autres travaux , & il essaya une nouvelle route que le goût du public lui indiquoit encore.

A l'exemple de M. Duhamel , il voulut appliquer les connoissances physiques à des objets d'une utilité immédiate ; il étudia en physicien les bois dont il étoit obligé de s'occuper comme propriétaire , & publia sur cette partie de l'agriculture plusieurs mémoires , remarquables sur-tout par la sagesse avec laquelle écartant tout système , toute vue générale mais incertaine , il se borne à raconter des faits , à détailler des expériences. Il n'ose s'écarter de l'esprit qui commençoit alors à dominer parmi les savans , de cette fidélité sévère & scrupuleuse à ne prendre pour guides que l'observation & le calcul , à s'arrêter dès l'instant où ces fils secourables se brisent ou échappent de leurs mains. Mais s'il fut depuis moins timide , il faut lui rendre cette justice , qu'en s'abandonnant trop facilement peut-être à des systèmes spéculatifs dont l'adoption peut tout au plus égarer quelques savans & ralentir leur course , jamais il n'étendit cet esprit systématique sur des objets immédiatement applicables à l'usage commun , où il pourroit conduire à des erreurs vraiment nuisibles.

Parmi les observations que renferment ces mémoires , la plus importante est celle où il propose un moyen de donner à l'aubier une dureté au moins égale à celle du cœur du bois , qui est elle-même augmentée par ce procédé ; il consiste à écorcer les arbres sur pied dans le temps de la sève , & à les y laisser se dessécher & mourir. Les ordon-

nances défendoient cette opération ; car elles ont trop souvent traité les hommes comme si condamnés à une enfance éternelle , ou à une incurable démence , on ne pouvoit leur laisser sans danger la disposition de leurs propriétés & l'exercice de leurs droits.

Peu de temps après, M. de Buffon prouva par le fait la possibilité des miroirs brûlans d'Archimède & de Proclus. Tzetzès en a laissé une description qui montre qu'ils avoient employé un système de miroirs plans. Les essais tentés par Kirker avec un petit nombre de miroirs, ne laissoient aucun doute sur le succès ; M. Dufay avoit répété cette expérience ; Harfœcker avoit même commencé une machine construite sur ce principe : mais il reste à M. de Buffon l'honneur d'avoir montré le premier parmi les modernes , l'expérience extraordinaire d'un incendie allumé à deux cents pieds de distance , expérience qui n'avoit été vue avant lui qu'à Syracuse & à Constantinople. Bientôt après il proposa l'idée d'une loupe à échelons , n'exigeant plus ces masses énormes de verres si difficiles à fondre & à travailler , absorbant une moindre quantité de lumière , parce qu'elle peut n'avoir jamais qu'une petite épaisseur , offrant enfin l'avantage de corriger une grande partie de l'aberration de sphéricité. Cette loupe proposée en 1748 par M. de Buffon, n'a été exécutée que par M. l'abbé Rochon plus de trente ans après , avec assez de succès pour montrer qu'elle mérite la préférence sur les lentilles ordinaires. On pourroit même composer de plusieurs pièces ces loupes à échelons ; on y gagneroit plus de facilité dans la construction , une grande diminution de dépense , l'avantage de pouvoir leur donner plus d'étendue , & celui d'employer , suivant le besoin , un nombre de cercles plus ou moins grand , & d'obtenir ainsi d'un même instrument différens degrés de force.

En 1739, M. de Buffon fut nommé intendant du jardin du Roi. Les devoirs de cette place fixèrent pour jamais son goût jusqu'alors partagé entre différentes sciences , & sans

renoncer à aucune , ce ne fut plus que dans leurs rapports avec l'histoire naturelle qu'il se permit de les envisager.

Obligé d'étudier les détails de cette science si vaste , de parcourir les compilations immenses où l'on avoit recueilli les observations de tous les pays & de tous les siècles , bientôt son imagination éprouva le besoin de peindre ce que les autres avoient décrit ; sa tête exercée à former des combinaisons , sentit celui de saisir des ensembles où les observateurs ne lui offroient que des faits épars & sans liaison.

Il osa donc concevoir le projet de rassembler tous ces faits , d'en tirer des résultats généraux qui devinssent la théorie de la nature dont les observations ne sont que l'histoire ; de donner de l'intérêt & de la vie à celle des animaux , en mêlant un tableau philosophique de leurs mœurs & de leurs habitudes à des descriptions embellies de toutes les couleurs dont l'art d'écrire pouvoit les orner ; de créer enfin pour les philosophes , pour tous les hommes qui ont exercé leur esprit ou leur ame , une science qui n'existoit encore que pour les naturalistes.

L'immensité de ce plan ne le rebuta point ; il prévoyoit sans doute qu'avec un travail assidu de tous les jours , continué pendant une longue vie , il n'en pourroit encore exécuter qu'une partie ; mais il s'agissoit sur-tout de donner l'exemple & d'imprimer le mouvement aux esprits. La difficulté de répandre de l'intérêt sur tant d'objets inanimés ou insipides , ne l'arrêta point ; il avoit déjà cette conscience du talent qui , comme la conscience morale , ne trompe jamais quand on l'interroge de bonne foi , & qu'on la laisse dicter seule la réponse.

Dix années furent employées à préparer des matériaux , à former des combinaisons , à s'instruire dans la science des faits , à s'exercer dans l'art d'écrire , & au bout de ce terme le premier volume de l'Histoire naturelle vint étonner l'Europe. En parlant de cet ouvrage que tous les hommes ont lu , que presque tous ont admiré , qui a rempli , soit

par le travail de la composition, soit par des études préliminaires, la vie entière de M. de Buffon, nous ne prendrons pour guide que la vérité (car pourquoi chercherions-nous vainement à flatter par des éloges qui ne dureroient qu'un jour, un nom qui doit vivre à jamais)? & en évitant, s'il est possible, l'influence de toutes les causes qui peuvent agir sur l'opinion souvent passagère des contemporains, nous tâcherons de prévoir l'opinion durable de la postérité.

La théorie générale du globe que nous habitons, la disposition, la nature & l'origine des substances qu'il offre à nos regards, les grands phénomènes qui s'opèrent à sa surface ou dans son sein; l'histoire de l'homme & les loix qui président à sa formation, à son développement, à sa vie, à sa destruction; la nomenclature & la description des quadrupèdes ou des oiseaux, l'examen de leurs facultés, la peinture de leurs mœurs; tels sont les objets que M. de Buffon a traités.

Nous ne connoissons, par des observations exactes, qu'une très-petite partie de la surface du globe; nous n'avons pénétré dans ses entrailles, que conduits par l'espérance plus souvent avide qu'observatrice, d'en tirer ce qu'elles renferment d'utile à nos besoins, de précieux à l'avarice ou au luxe; & lorsque M. de Buffon donna sa théorie de la terre, nos connoissances n'étoient même qu'une foible partie de celles que nous avons acquises, & qui sont si imparfaites encore. On pouvoit donc regarder comme téméraire l'idée de former dès-lors une théorie générale du globe, puisque cette entreprise le seroit encore aujourd'hui. Mais M. de Buffon connoissoit trop les hommes pour ne pas sentir qu'une science qui n'offriroit que des faits particuliers, ou ne présenteroit des résultats généraux que sous la forme de simples conjectures, frapperoit peu les esprits vulgaires, trop foibles pour supporter le poids du doute. Il savoit que Descartes n'avoit attiré les hommes à la philosophie que par la hardiesse de ses systèmes, qu'il ne les avoit arrachés au joug de l'autorité,

à leur indifférence pour la vérité, qu'en s'emparant de leur imagination, en ménageant leur paresse, & qu'ensuite libres de leurs fers, livrés à l'avidité de connoître, eux-mêmes avoient su choisir la véritable route. Il avoit vu enfin dans l'histoire des sciences, que l'époque de leurs grands progrès avoit presque toujours été celle des systèmes célèbres, parce que ces systèmes exaltant à la fois l'activité de leurs adversaires & celle de leurs défenseurs, tous les objets sont alors soumis à une discussion, dans laquelle l'esprit de parti si difficile sur les preuves du parti contraire, oblige à les multiplier. C'est alors que chaque combattant s'appuyant sur tous les faits reçus, ils sont tous soumis à un examen rigoureux; c'est alors qu'ayant épuisé ces premières armes, on cherche de nouveaux faits pour s'en procurer de plus sûres & d'une trempe plus forte.

Ainsi la plus austère philosophie peut pardonner à un physicien de s'être livré à son imagination, pourvu que ses erreurs ayent contribué aux progrès des sciences, ne fût-ce qu'en imposant la nécessité de le combattre; & si les hypothèses de M. de Buffon sur la formation des planètes, sont contraires à ces mêmes loix du système du monde, dont il avoit été en France un des premiers, un des plus zélés défenseurs, la vérité sévère, en condamnant ces hypothèses, peut encore applaudir à l'art avec lequel l'auteur a su les présenter.

Les objections de quelques critiques, des observations nouvelles, des faits anciennement connus mais qui lui avoient échapé, forcèrent M. de Buffon d'abandonner quelques points de sa théorie de la terre.

Mais dans ses *Époques de la Nature*, ouvrage destiné à rendre compte de ses vues nouvelles, à modifier ou à défendre ses principes, il semble redoubler de hardiesse à proportion des pertes que son système a essuyées, le défendre avec plus de force lorsqu'on l'auroit cru réduit à l'abandonner, & balancer par la grandeur de ses idées, par la magnificence de son style, par le poids de son nom.

l'autorité des sçavans réunis, & même celle des faits & des calculs.

La théorie de la terre fut suivie de l'histoire de l'homme, qui en a reçu ou usurpé l'empire.

La nature a couvert d'un voile impénétrable les loix qui président à la reproduction des êtres ; M. de Buffon essaya de le lever, ou plutôt de deviner ce qu'il cachoit. Dans les liqueurs où les autres naturalistes avoient vu des animaux, il n'aperçut que des molécules organiques, élémens communs de tous les êtres animés. Les infusions de diverses matières animales & celles des graines, présentoient les mêmes molécules avec plus ou moins d'abondance ; elles servent donc également à la reproduction des êtres, à leur accroissement, à leur conservation ; elles existent dans les alimens dont ils se nourrissent, circulent dans leurs liqueurs, s'unissent à chacun de leurs organes pour réparer les pertes qu'il a pu faire. Quand ces organes ont encore la flexibilité de l'enfance, les molécules organiques se combinant de manière à en conserver ou modifier les formes, en déterminent le développement & les progrès ; mais après l'époque de la jeunesse, elles se rassemblent dans des organes particuliers, ou échappant à la force qu'exerce sur elles le corps auquel elles ont appartenu, elles peuvent former de nouveaux composés, mais elles conservent, suivant les différentes parties où elles existent, une disposition à se réunir de manière à présenter les mêmes formes, & reproduisent par conséquent des individus semblables à ceux de qui elles sont émanées. Ce système brillant eut peu de partisans ; il étoit trop difficile de se faire une idée de cette force en vertu de laquelle les molécules enlevées à toutes les parties d'un corps, conservoient une tendance à se replacer dans un ordre semblable. D'ailleurs les recherches de Haller sur la formation du poulet, contredisoient cette opinion avec trop de force ; l'identité des membranes de l'animal naissant, & de celles de l'œuf, se refusoient trop à l'hypothèse

d'un animal formé postérieurement, & ne s'y étant attaché que pour y trouver sa nourriture. Les observations de Spalauzani sur les mêmes liqueurs & sur les mêmes infusions, sembloient également détruire, jusque dans son principe, le système des molécules organiques. Mais, lorsque dégagé des liens de ce système, M. de Buffon n'est plus que peintre historien & philosophe, avec quel intérêt parcourant l'univers sur ses traces, on voit l'homme dont le fond est par-tout le même, modifié lentement par l'action continue du climat, du sol, des habitudes, des préjugés, changer de couleur & de physionomie, comme de goût & d'opinion, acquérir ou perdre de la force, de l'adresse, de la beauté, comme de l'intelligence, de la sensibilité & des vertus ! Avec quel plaisir on suit dans son ouvrage l'histoire des progrès de l'homme, & même celle de sa décadence ; on étudie les loix de cette correspondance constante entre les changemens physiques des sens ou des organes, & ceux qui s'opèrent dans l'entendement ou dans les passions ; on apprend à connoître le mécanisme de nos sens, ses rapports avec nos sensations ou nos idées, les erreurs auxquelles ils nous exposent, la manière dont nous apprenons à voir, à toucher, à entendre, & comment l'enfant, de qui les yeux foibles & incertains apercevoient à peine un amas confus de couleurs, parvient par l'habitude & la réflexion à saisir d'un coup-d'œil le tableau d'un vaste horizon, & s'élève jusqu'au pouvoir de créer & de combiner des images ! Avec quelle curiosité enfin on observe ces détails qui intéressent le plus vif de nos plaisirs & le plus doux de nos sentimens, ces secrets de la nature & de la pudeur auxquels la majesté du style & la sévérité des réflexions donnent de la décence & une sorte de dignité philosophique, qui permettent aux sages même d'y arrêter leurs regards & de les contempler sans rougir !

Les observations dispersées dans les livres des anatomistes, des médecins & des voyageurs, forment le fond de ce tableau, offert pour la première fois aux regards

des hommes avides de se connoître , & surpris de tout ce qu'ils apprennent sur eux-mêmes , & de retrouver ce qu'ils avoient éprouvé , ce qu'ils avoient vu sans en avoir eu la conscience ou conservé la mémoire.

Avant d'écrire l'histoire de chaque espèce d'animaux , M. de Buffon crut devoir porter ses recherches sur les qualités communes à toutes , qui les distinguent des êtres des autres classes. Semblables à l'homme dans presque tout ce qui appartient au corps , n'ayant avec lui dans leurs sens , dans leurs organes que ces différences qui peuvent exister entre des êtres d'une même nature , & qui indiquent seulement une infériorité dans des qualités semblables , les animaux sont-ils absolument séparés de nous par leurs facultés intellectuelles ? M. de Buffon essaya de résoudre ce problème , & nous n'oserions dire qu'il l'ait résolu avec succès. Craignant d'effaroucher des regards faciles à blesser en présentant ses opinions autrement que sous un voile , celui dont il les couvre a paru trop difficile à percer. On peut aussi lui reprocher avec quelque justice , de n'avoir pas observé les animaux avec assez de scrupule , de n'avoir point porté ses regards sur des détails petits en eux-mêmes , mais nécessaires pour saisir les nuances très-fines de leurs opérations. Il semble n'avoir aperçu dans chaque espèce qu'une uniformité de procédés & d'habitudes , qui donne l'idée d'êtres obéissans à une force aveugle & mécanique , tandis qu'en observant de plus près , il auroit pu apercevoir des différences très-sensibles entre les individus , & des actions qui semblent appartenir au raisonnement , qui indiquent même des idées abstraites & générales.

La première classe d'animaux décrite par M. de Buffon , est celle des quadrupèdes ; la seconde , celle des oiseaux , & c'est à ces deux classes que s'est borné son travail. Une si longue suite de descriptions sembloit devoir être monotone , & ne pouvoir intéresser que les savans ; mais le talent a su triompher de cet obstacle. Esclaves ou ennemis de l'homme , destinés à sa nourriture , ou n'étant pour lui

qu'un spectacle, tous ces êtres, sous le pinceau de M. de Buffon, excitent alternativement la terreur, l'intérêt, la pitié ou la curiosité. Le peintre philosophe n'en appelle aucun sur cette scène toujours attachante, toujours animée, sans marquer la place qu'il occupe dans l'univers, sans montrer les rapports avec nous. Mais s'agit-il des animaux qui sont connus seulement par les relations des voyageurs, qui ont reçu d'eux des noms différens, dont il faut chercher l'histoire & quelquefois discuter la réalité au milieu de récits vagues & souvent défigurés par le merveilleux, le savant naturaliste impose silence à son imagination; il a tout lu, tout extrait, tout analysé, tout discuté : on est étonné de trouver un nomenclateur infatigable dans celui de qui on n'attendoit que des tableaux imposans ou agréables; on lui fait gré d'avoir plié son génie à des recherches si pénibles, & ceux qui lui auroient reproché peut-être d'avoir sacrifié l'exactitude à l'effet, lui pardonnent, & sentent ranimer leur confiance.

Des réflexions philosophiques mêlées aux descriptions, à l'exposition des faits & à la peinture des mœurs, ajoutent à l'intérêt, aux charmes de cette lecture & à son utilité. Ces réflexions ne sont pas celles d'un philosophe qui soumet toutes ses pensées à une analyse rigoureuse, qui suit sur les divers objets les principes d'une philosophie toujours une; mais ce ne sont pas non plus ces réflexions isolées que chaque sujet offre à l'esprit, qui se présentent d'elles-mêmes, & n'ont qu'une vérité passagère & locale. Celles de M. de Buffon s'attachent toujours à quelque loi générale de la nature, ou du moins à quelque grande idée.

Dans ses discours sur les animaux domestiques, sur les animaux carnassiers, sur la dégénération des espèces, on le voit tantôt esquisser l'histoire du règne animal considéré dans son ensemble, tantôt parler en homme libre de la dégradation où la servitude réduit les animaux, en homme sensible de la destruction à laquelle l'espèce humaine les a soumis, & en philosophe de la nécessité de cette

destruction, des effets lents & sûrs de cette servitude, de son influence sur la forme, sur les facultés, sur les habitudes morales des différentes espèces. Des traits qui semblent lui échapper caractérisent la sensibilité & la fierté de son ame, mais elle paroît toujours dominée par une raison supérieure : on croit pour ainsi dire converser avec une pure intelligence, qui n'auroit de la sensibilité humaine que ce qu'il en faut pour se faire entendre de nous & intéresser notre foiblesse.

Dans son discours sur les perroquets, il fait sentir la différence de la perfectibilité de l'espèce entière, apanage qu'il croit réservé à l'homme, & de cette perfectibilité individuelle que l'animal sauvage doit à la nécessité, à l'exemple de son espèce, & l'animal domestique aux leçons de son maître. Il montre comment l'homme par la durée de son enfance, par celle du besoin physique des secours maternels, contracte l'habitude d'une communication intime qui le dispose à la société, qui dirige vers ses rapports avec les semblables le développement de ses facultés, susceptibles d'acquérir une perfection plus grande dans un être plus heureusement organisé & né avec de plus grands besoins.

Peut-être, cette nuance entre nous & les animaux est-elle moins tranchée que M. de Buffon n'a paru le croire ; peut-être, comme l'exemple des castors semble le prouver, existe-t-il des espèces d'animaux susceptibles d'une sorte de perfectibilité non moins réelle, mais plus lente & plus bornée : qui pourroit même assurer qu'elle ne s'étendrait pas bien au-delà des limites que nous osons lui fixer, si les espèces qui nous paroissent les plus ingénieuses, affranchies de la crainte dont les frappe la présence de l'homme, & soumises par des circonstances locales à des besoins assez grands pour exciter l'activité, mais trop foibles pour la détruire, éprouvoient la nécessité & avoient en même temps la liberté de déployer toute l'énergie dont la nature a pu les douer ; Des observations long-temps continuées pourroient seules donner le droit de prononcer

sur cette question ; il suffit pour le sentir de jeter un regard sur notre espèce même. Supposons que les nations Européennes n'aient pas existé, que les hommes soient sur toute la terre ce qu'ils sont en Asie & en Afrique, qu'ils soient restés par-tout à ce même degré de civilisation & de connoissances auquel ils étoient déjà dans le temps où commence pour nous leur histoire : ne seroit-on pas alors fondé à croire qu'il est un terme que dans chaque climat l'homme ne peut passer ? ne regarderoit-on pas comme un visionnaire le philosophe qui oseroit promettre à l'espèce humaine les progrès qu'elle a faits & qu'elle fait journellement en Europe ?

La connoissance anatomique des animaux est une portion importante de leur histoire. M. de Buffon eût pour cette partie de son ouvrage, le bonheur de trouver des secours dans l'amitié généreuse d'un célèbre naturaliste, qui lui laissant la gloire attachée à ces descriptions brillantes, à ces peintures de mœurs, à ces réflexions philosophiques qui frappent tous les esprits, se contentoit du mérite plus modeste, d'obtenir l'estime des savans par des détails exacts & précis, par des observations faites avec une rigueur scrupuleuse, par des vues nouvelles qu'eux seuls pouvoient apprécier. Ils ont regretté que M. de Buffon n'ait pas dans l'histoire des oiseaux conservé cet exact & sage coopérateur, mais ils l'ont regretté seuls. Nous l'avouons sans peine & sans croire diminuer par-là le juste tribut d'honneur qu'ont mérité les travaux de M. Daubenton.

A l'histoire des quadrupèdes & des oiseaux succéda celle des substances minérales.

Dans cette partie de son ouvrage, peut-être M. de Buffon n'a-t-il pas attaché assez d'importance aux travaux des chimistes modernes, à cette foule de faits précis & bien prouvés dont ils ont enrichi la science de la nature, à cette méthode analytique qui conduit si sûrement à la vérité, oblige de l'attendre lorsqu'elle n'est pas encore à

notre portée, & ne permet jamais d'y substituer des erreurs. En effet, l'analyse chimique des substances minérales peut seule donner à leur nomenclature une base solide, répandre la lumière sur leur histoire, sur leur origine, sur les antiques événemens qui ont déterminé leur formation.

Malgré ce juste reproche, on retrouve dans l'histoire des minéraux le talent & la philosophie de M. de Buffon, ses aperçus ingénieux, ses vues générales & grandes, ce talent de saisir dans la suite des faits tout ce qui peut appuyer ces vues, de s'emparer des esprits, de les entraîner où il veut les conduire, & de faire admirer l'auteur lors même que la raison ne peut adopter ses principes.

L'Histoire naturelle renferme un ouvrage d'un genre différent, sous le titre d'*Arithmétique morale*. Une application du calcul à la probabilité de la durée de la vie humaine entroit dans le plan de l'histoire naturelle; M. de Buffon ne pouvoit guère traiter ce sujet sans porter un regard philosophique sur les principes même de ce calcul, & sur la nature des différentes vérités. Il y établit cette opinion, que les vérités mathématiques ne sont point des vérités réelles, mais de pures vérités de définition; observation juste, si on veut la prendre dans la rigueur métaphysique, mais qui s'applique également alors aux vérités de tous les ordres, dès qu'elles sont précises & qu'elles n'ont pas des individus pour objet. Si ensuite on veut appliquer ces vérités à la pratique & les rendre dès-lors individuelles, semblables encore à cet égard aux vérités mathématiques, elles ne sont plus que des vérités approchées. Il n'existe réellement qu'une seule différence; c'est que les idées dont l'identité forme les vérités mathématiques ou physiques sont plus abstraites dans les premières, d'où il résulte que, pour les vérités physiques, nous avons un souvenir distinct des individus dont elles expriment les qualités communes, & que nous l'avons plus pour les autres; mais la véritable réalité, l'utilité d'une proposition quelconque est indépendante de cette différence; car on doit regarder une

vérité

vérité comme réelle, toutes les fois que, si on l'applique à un objet réellement existant, elle reste une vérité absolue, ou devient une vérité indéfiniment approchée.

M. de Buffon proposoit d'assigner une valeur précise à la probabilité très-grande que l'on peut regarder comme une certitude morale, & de n'avoir au-delà de ce terme aucun égard à la petite possibilité d'un événement contraire. Ce principe est vrai, lorsque l'on veut seulement appliquer à l'usage commun le résultat d'un calcul, & dans ce sens tous les hommes l'ont adopté dans la pratique, tous les philosophes l'ont suivi dans leurs raisonnemens; mais il cesse d'être juste si on l'introduit dans le calcul même, & sur-tout si on veut l'employer à établir des théories, à expliquer des paradoxes, à prouver ou à combattre des règles générales. D'ailleurs cette probabilité qui peut s'appeler *certitude morale*, doit être plus ou moins grande suivant la nature des objets que l'on considère & les principes qui doivent diriger notre conduite; & il auroit fallu marquer pour chaque genre de vérités & d'actions, le degré de probabilité où il commence à être raisonnable de croire & permis d'agir.

C'est par respect pour les talens de notre illustre confrère que nous nous permettons de faire ici ces observations. Lorsque des opinions qui paroissent erronées se trouvent dans un livre fait pour séduire l'esprit comme pour l'éclairer, c'est presque un devoir d'avertir de les soumettre à un examen rigoureux. L'admiration dispose si facilement à la croyance, que les lecteurs entraînés à la fois par le nom de l'auteur & par le charme du style, cèdent sans résistance, & semblent craindre que le doute, en affoiblissant un enthousiasme qui leur est cher, ne diminue leur plaisir. Mais on doit encore ici à M. de Buffon, sinon d'avoir répandu une lumière nouvelle sur cette partie des mathématiques & de la philosophie, du moins d'en avoir fait sentir l'utilité, peut-être même d'en avoir appris l'existence à une classe nombreuse qui n'auroit pas

été en chercher les principes dans les ouvrages des géomètres ; enfin , d'en avoir montré la liaison avec l'histoire naturelle de l'homme. C'est avoir contribué au progrès d'une science qui , soumettant au calcul les événemens dirigés par des loix que nous nommons irrégulières , par ce qu'elles nous sont inconnues , semble étendre l'empire de l'esprit humain au-delà de ses bornes naturelles , & lui offrir un instrument à l'aide duquel ses regards peuvent s'étendre sur des espaces immenses , que peut-être il ne lui sera jamais permis de parcourir.

On a reproché à la philosophie de M. de Buffon , non-seulement ces systèmes généraux dont nous avons parlé , & qui reparoissent trop souvent dans le cours de ses ouvrages , mais on lui a reproché un esprit trop systématique , ou plutôt un esprit trop prompt à former des résultats généraux d'après les premiers rapports qui l'ont frappé , & de négliger trop ensuite les autres rapports qui auroient pu ou jeter des doutes sur ces résultats , ou en diminuer la généralité , ou leur ôter cet air de grandeur , ce caractère imposant , si propre à entraîner les imaginations ardentes & mobiles. Les savans qui cherchent la vérité , étoient fâchés d'être obligés sans cesse de se défendre contre la séduction , & de ne trouver souvent , au lieu de résultats & de faits propres à servir de base à leurs recherches & à leurs observations , que des opinions à examiner & des doutes à résoudre.

Mais si l'Histoire naturelle a eu parmi les savans des censeurs sévères , le style de cet ouvrage n'a trouvé que des admirateurs.

M. de Buffon est poète dans ses descriptions ; mais comme les grands poètes , il fait rendre intéressante la peinture des objets physiques , en y mêlant avec art des idées morales qui intéressent l'ame en même temps que l'imagination est amusée ou étonnée. Son style est harmonieux , non de cette harmonie qui appartient à tous les écrivains corrects , à qui le sens de l'oreille n'a pas été refusé , &

qui consiste presque uniquement à éviter les sons durs ou pénibles, mais de cette harmonie qui est une partie du talent, ajoute aux beautés par une sorte d'analogie entre les idées & les sons, & fait que la phrase est douce ou sonore, majestueuse ou légère, suivant les objets qu'elle doit peindre & les sentimens qu'elle doit réveiller.

Si M. de Buffon est plus abondant que précis, cette abondance est plutôt dans les choses que dans les mots; il ne s'arrête pas à une idée simple, il en multiplie les nuances; mais chacune d'elles est exprimée avec précision. Son style a de la majesté, de la pompe; mais c'est parce qu'il présente des idées vastes & des grandes images; la force & l'énergie lui paroissent naturelles, il semble qu'il lui ait été impossible de parler ou plutôt de penser autrement. On a loué la variété de ses tons; on s'est plaint de sa monotonie; mais ce qui peut être fondé dans cette censure est encore un sujet d'éloge: en peignant la nature sublime ou terrible, douce ou riante, en décrivant la fureur du tigre, la majesté du cheval, la fierté & la rapidité de l'aigle, les couleurs brillantes du colibri, la légèreté de l'oiseau mouche, son style prend le caractère des objets; mais il conserve sa dignité imposante; c'est toujours la nature qu'il peint, & il fait que même dans les plus petits objets elle a manifesté toute sa puissance. Frappé d'une sorte de respect religieux pour les grands phénomènes de l'univers, pour les loix générales auxquelles obéissent les diverses parties du vaste ensemble qu'il a entrepris de tracer, ce sentiment se montre par-tout, & forme en quelque sorte le fond sur lequel il répand de la variété, sans que cependant on cesse jamais de l'apercevoir.

Cet art de peindre en ne paroissant que raconter, ce grand talent du style porté sur des objets qu'on avoit traités avec clarté, avec élégance, & même embellis par des réflexions ingénieuses, mais auxquels jusqu'alors l'éloquence avoit paru étrangère, frappèrent bientôt tous les esprits: la langue François étoit déjà devenue la langue de l'Europe,

& M. de Buffon eut par-tout des lecteurs & des disciples. Mais ce qui est plus glorieux, parce qu'il s'y joint une utilité réelle, le succès de ce grand ouvrage fut l'époque d'une révolution dans les esprits; on ne put le lire sans avoir envie de jeter au moins un coup-d'œil sur la nature, & l'histoire naturelle devint une connoissance presque vulgaire; elle fut pour toutes les classes de la société, ou un amusement, ou une occupation; on voulut avoir un cabinet comme on vouloit avoir une bibliothèque: mais le résultat n'en est pas le même, car dans les bibliothèques on ne fait que répéter les exemplaires des mêmes livres; ce sont au contraire des individus différens qu'on rassemble dans les cabinets; ils s'y multiplient pour les naturalistes, à qui dès-lors les objets dignes d'être observés échappent plus difficilement.

La botanique, la métallurgie, les parties de l'histoire naturelle, immédiatement utiles à la médecine, au commerce, aux manufactures, avoient été encouragées; mais c'est à la science même, à cette science, comme ayant pour objet la connoissance de la nature, que M. de Buffon a su le premier intéresser les souverains, les grands, les hommes publics de toutes les nations. Plus sûrs d'obtenir des récompenses, pouvant aspirer enfin à cette gloire populaire que les vrais savans savent apprécier mieux que les autres hommes, mais qu'ils ne méprisent point, les naturalistes se sont livrés à leurs travaux avec une ardeur nouvelle; on les a vus se multiplier à la voix de M. de Buffon dans les provinces comme dans les capitales, dans les autres parties du monde comme dans l'Europe. Sans doute on avoit cherché avant lui à faire sentir l'utilité de l'étude de la nature; la science n'étoit pas négligée; la curiosité humaine s'étoit portée dans les pays éloignés, avoit voulu connoître la surface de la terre, & pénétrer dans son sein; mais on peut appliquer à M. de Buffon ce que lui-même a dit d'un autre philosophe également célèbre, son rival dans l'art d'écrire, comme lui plus utile peut-être par l'effet

de ses ouvrages , que par les vérités qu'ils renferment : *D'autres avoient dit les mêmes choses , mais il les a commandées au nom de la nature , & on lui a obéi.*

Peut-être le talent d'inspirer aux autres son enthousiasme , de les forcer de concourir aux mêmes vues , n'est pas moins nécessaire que celui des découvertes , au perfectionnement de l'espèce humaine , peut-être n'est il pas moins rare , n'exige-t-il pas moins ces grandes qualités de l'esprit qui nous forcent à l'admiration. Nous l'accordons à ces harangues célèbres que l'antiquité nous a transmises , & dont l'effet n'a duré qu'un seul jour ; pourrions-nous la refuser à ceux dont les ouvrages produisent sur les hommes dispersés des effets plus répétés & plus durables ? Nous l'accordons à celui dont l'éloquence disposant des cœurs d'un peuple assemblé , lui a inspiré une résolution généreuse ou salutaire ; pourroit-on la refuser à celui dont les ouvrages ont changé la pente des esprits , les ont portés à une étude utile , & ont produit une révolution qui peut faire époque dans l'histoire des sciences ?

Si donc la gloire doit avoir l'utilité pour mesure , tant que l'espèce humaine n'obéira pas à la seule raison , tant qu'il faudra non-seulement découvrir des vérités , mais forcer à les admettre , mais inspirer le désir d'en chercher de nouvelles , les hommes éloquens nés avec le talent de répandre la vérité ou d'exciter le génie des découvertes , mériteront d'être placés au niveau des inventeurs , puisque sans eux ces inventeurs n'auroient pas existé , ou auroient vu leurs découvertes demeurer inutiles & dédaignées.

Quand même une imitation mal entendue de M. de Buffon auroit introduit dans les livres d'histoire naturelle , le goût des systèmes vagues & des vaines déclamations , ce mal seroit nul en comparaison de tout ce que cette science doit à ses travaux : les déclamations , les systèmes passent ; & les faits restent ; ces livres qu'on a surchargés d'ornemens pour les faire lire , seront oubliés ; mais s'ils renferment quelques vérités , elles survivront à leur chute.

On peut diviser en deux classes les grands écrivains dont les ouvrages excitent une admiration durable, & sont lus encore lorsque les idées qu'ils renferment, rendues communes par cette lecture même, ont perdu leur intérêt & leur utilité. Les uns doués d'un tact fin & sûr, d'une ame sensible, d'un esprit juste, ne laissent dans leurs ouvrages rien qui ne soit écrit avec clarté, avec noblesse, avec élégance, avec cette propriété de termes, cette précision d'idées & d'expressions qui permet au lecteur d'en goûter les beautés sans fatigue, sans qu'aucune sensation pénible vienne troubler son plaisir.

Quelque sujet qu'ils traitent, quelques pensées qui naissent dans leur esprit, quelque sentiment qui occupe leur ame, ils l'expriment tel qu'il est avec toutes ses nuances, avec toutes les images qui l'accompagnent. Ils ne cherchent point l'expression ; elle s'offre à eux, mais ils savent en éloigner tout ce qui nuirait à l'harmonie, à l'effet, à la clarté : tels furent Despreaux, Racine, Fénelon, Massillon, Voltaire. On peut sans danger les prendre pour modèles ; comme le grand secret de leur art est de bien exprimer ce qu'ils pensent ou ce qu'ils sentent, celui qui l'aura saisi dans leurs ouvrages, qui aura su se le rendre propre, s'approchera d'eux si ses pensées sont dignes des leurs ; l'imitation ne paroîtra point servile si ses idées sont à lui, & il ne sera exposé ni à contracter des défauts, ni à perdre de son originalité.

Dans d'autres écrivains, le style paroît se confondre davantage avec les pensées. Non-seulement si on cherche à les séparer, on détruit des beautés, mais les idées elles-mêmes semblent disparaître, parce que l'expression leur imprimoit le caractère particulier de l'ame & de l'esprit de l'auteur, caractère qui s'évanouit avec elle : tels furent Corneille, Bossuet, Montesquieu, Rousseau ; tel fut M. de Buffon.

Ils frappent plus que les autres, parce qu'ils ont une originalité plus grande & plus continue ; parce que, moins

occupés de la perfection & des qualités du style , ils voient moins leurs hardiesses , parce qu'ils sacrifient moins l'effet au goût & à la raison , parce que leur caractère se montrant sans cesse dans leurs ouvrages , agit à la longue plus fortement , & se communique davantage ; mais en même temps ils peuvent être des modèles dangereux. Pour imiter leur style , il faudroit avoir leurs pensées , voir les objets comme ils les voient , sentir comme ils sentent ; autrement , si le modèle vous offre des idées originales & grandes , l'imitateur vous présentera des idées communes , surchargées d'expressions extraordinaires ; si l'un ôte aux vérités abstraites leur sécheresse , en les rendant par des images brillantes , l'autre présentera des demi-pensées , que des méthaphores bizarres rendent inintelligibles. Le modèle a parlé de tout avec chaleur , parce que son ame étoit toujours agitée ; le froid imitateur cachera son indifférence sous des formes passionnées. Dans ces écrivains , les défauts tiennent souvent aux beautés , ont la même origine , sont plus difficiles à distinguer , & ce sont ces défauts que l'imitateur ne manque jamais de transporter dans ses copies. Veut-on les prendre pour modèles , il ne faut point chercher à saisir leur manière , il ne faut point vouloir leur ressembler , mais se pénétrer de leurs beautés , aspirer à produire des beautés égales , s'appliquer comme eux à donner un caractère original à ses productions , sans copier celui qui frappe ou qui séduit dans les leurs.

Il seroit donc injuste d'imputer à ces grands écrivains les fautes de leurs enthousiastes , de les accuser d'avoir corrompu le goût , parce que des gens qui en manquoient les ont parodiés en croyant les imiter. Ainsi on auroit tort de reprocher à M. de Buffon ces idées vagues , cachées sous des expressions empoulées , ces images incohérentes , cette pompe ambitieuse du style , qui défigure tant des productions modernes , comme on auroit tort de vouloir rendre Rousseau responsable de cette fausse sensibilité , de cette habitude de se passionner de sang froid , d'exagérer

toutes les opinions ; enfin , de cette manie de parler de foi sans nécessité , qui sont devenues une espèce de mode & presque un mérite. Ces erreurs passagères dans le goût d'une nation , cèdent facilement à l'empire de la raison & à celui de l'exemple ; l'enthousiasme exagéré , qui fait admirer jusqu'aux défauts des hommes illustres , donne à ces mal-adroites imitations une vogue momentanée , mais à la longue il ne reste que ce qui est vraiment beau ; & comme Cornille & Boiluet ont contribué à donner à notre langue , l'un plus de force , l'autre plus d'élévation & de hardiesse , M. de Buffon lui aura fait acquérir plus de magnificence & de grandeur , comme Rousseau l'aura instruite à former des accens plus fiers & plus passionnés.

Le style de M. de Buffon n'offre pas toujours le même degré de perfection ; mais dans tous les morceaux destinés à l'effet , il a cette correction , cette pureté , sans lesquelles , lorsqu'une langue est une fois formée , on ne peut atteindre à une célébrité durable. S'il s'est permis quelquefois d'être négligé , c'est uniquement dans les discussions purement scientifiques , où les taches qu'il a pu laisser ne nuisent point à des beautés , & servent peut-être à faire mieux goûter les peintures brillantes qu'il suit.

C'étoit par un long travail qu'il parvenoit à donner à son style ce degré de perfection , & il continuoit de le corriger jusqu'à ce qu'il eût effacé toutes les traces du travail , & qu'à force de peine il lui eût donné de la facilité ; car cette qualité si précieuse n'est dans un écrivain que l'art de cacher ses efforts , de présenter ses pensées , comme s'il les avoit conçues d'un seul jet , dans l'ordre le plus naturel ou le plus frappant , revêtues des expressions les plus propres ou les plus heureuses ; & cet art , auquel le plus grand charme du style est attaché , n'est cependant que le résultat d'une longue suite d'observations fugitives & d'attentions minutieuses.

M. de Buffon aimoit à lire ses ouvrages , non par vanité , mais

mais pour s'assurer par l'expérience de leur clarté & de leur effet, les deux qualités peut-être sur lesquelles on peut le moins se juger soi-même. Avec une telle intention, il ne choisissoit pas ses auditeurs ; ceux que le hasard lui offroit , sembloient devoir mieux représenter le public, dont il vouloit essayer sur eux la manière de sentir : il ne se bernoit pas à recevoir leurs avis ou plutôt leurs éloges ; souvent il leur demandoit quel sens ils attachoient à une phrase, quelle impression ils avoient éprouvée ; & s'ils n'avoient pas saisi son idée, s'il avoit manqué l'effet qu'il vouloit produire, il en concluait que cette partie de son ouvrage manquoit de netteté, de mesure ou de force, & il l'écrivoit de nouveau. Cette méthode est excellente pour les ouvrages de philosophie qu'on destine à devenir populaires ; mais peu d'auteurs auront le courage de l'employer. Il ne faut pas cependant s'attendre à trouver un égal degré de clarté dans toute l'Histoire naturelle ; M. de Buffon a écrit pour les savans, pour les philosophes & pour le public, & il a su proportionner la clarté de chaque partie, au désir qu'il avoit d'être entendu d'un nombre plus ou moins grand de lecteurs.

Peu d'hommes ont été aussi laborieux que lui, & l'ont été d'une manière si continue & si régulière. Il paroissoit commander à ses idées plutôt qu'être entraîné par elles. Né avec une constitution à la fois très-saine & très-robuste, fidèle au principe d'employer toutes ses facultés, jusqu'à ce que la fatigue l'avertît qu'il commençoit à en abuser, son esprit étoit toujours également prêt à remplir la tâche qu'il lui imposoit. C'étoit à la campagne qu'il aimoit le plus à travailler ; il avoit placé son cabinet à l'extrémité d'un vaste jardin sur la cime d'une montagne ; c'est-là qu'il passoit les matinées entières, tantôt écrivant dans ce réduit solitaire, tantôt méditant dans les allées de ce jardin dont l'entrée étoit alors rigoureusement interdite ; seul, & dans les momens de distraction nécessaires au milieu d'un travail long-temps continué, n'ayant autour de lui que la nature,

dont le spectacle en délassant ses organes, le ramenoit doucement à ses idées que la fatigue avoit interrompues. Ces longs séjours à Montbart étoient peu compatibles avec ses fonctions de trésorier de l'Académie ; mais il s'étoit choisi pour adjoint M. Tillet dont il connoissoit trop le zèle actif & sage, l'attachement scrupuleux à tous ses devoirs, pour avoir à craindre que ses confrères pussent jamais se plaindre d'une absence si utilement employée.

On doit mettre au nombre des services qu'il a rendus aux sciences, les progrès que toutes les parties du Jardin du roi ont faits sous son administration. Ces grands dépôts ne dispensent point d'étudier la nature. La connoissance de la disposition des objets & de la place qu'ils occupent à la surface ou dans le sein de la terre, n'est pas moins importante que celle des objets eux-mêmes ; c'est par-là seulement qu'on peut connoître leurs rapports, & s'élever à la recherche de leur origine & des loix de leur formation ; mais c'est dans les cabinets qu'on apprend à se rendre capable d'observer immédiatement la nature ; c'est-là encore qu'après l'avoir étudiée, on apprend à juger ses propres observations, à les comparer, à en tirer des résultats, à se rappeler ce qui a pu échapper au premier coup-d'œil. C'est dans les cabinets que commence l'éducation du naturaliste, & c'est-là aussi qu'il peut mettre la dernière perfection à ses pensées. Le Cabinet du Roi est devenu entre les mains de M. de Buffon non un simple monument d'ostentation, mais un dépôt utile & pour l'instruction publique & pour le progrès des sciences. Il avoit su intéresser toutes les classes d'hommes à l'histoire naturelle, & pour le récompenser du plaisir qu'il leur avoit procuré, tous s'empressoient d'apporter à ses pieds les objets curieux qu'il leur avoit appris à chercher & à connoître. Les savans y ajoutoient aussi leur tribut, car ceux même qui combattoient ses opinions, qui désapprouvoient sa méthode de traiter les sciences, reconnoissoient cependant qu'ils devoient une partie de leurs lumières

aux vérités qu'il avoit recueillies, & une partie de leur gloire à cet enthousiasme pour l'histoire naturelle qui étoit son ouvrage. Les souverains lui envoyoient les productions rares ou curieuses dont la nature avoit enrichi leurs états. C'est à lui que ces présens étoient adressés, mais il les remettoit dans le Cabinet du roi, comme dans le lieu où exposés aux regards d'un grand nombre d'hommes éclairés, ils pouvoient être le plus utiles.

Dans les commencemens de son administration, il avoit consacré à l'embellissement du cabinet une gratification qui lui étoit offerte, mais qu'il ne vouloit pas accepter pour lui-même : procédé noble & doublement utile à ses vues, puisqu'il lui donnoit le droit de solliciter des secours avec plus de hardiesse & d'opiniâtreté.

La botanique étoit celle des parties de l'histoire naturelle dont il s'étoit le moins occupé; mais son goût particulier n'influa point sur les fonctions de l'intendant du Jardin du roi. Agrandi par ses soins, distribué de la manière la plus avantageuse pour l'enseignement & pour la culture d'après les vues des botanistes habiles qui y président, ce jardin est devenu un établissement digne d'une nation éclairée & puissante. Parvenu à ce degré de splendeur, le Jardin du roi n'aura plus à craindre sans doute ces vicissitudes de décadence & de renouvellement dont notre histoire nous a transmis le souvenir, & le zèle éclairé du successeur de M. de Buffon suffiroit seul pour en répondre à l'Académie & aux sciences.

Ce n'est pas seulement à sa célébrité que M. de Buffon dut le bonheur de lever les obstacles qui s'opposèrent longtemps à l'entier succès de ses vues, il le dut aussi à sa conduite. Des louanges insérées dans l'Histoire naturelle étoient la récompense de l'intérêt que l'on prenoit aux progrès de la science, & l'on regardoit comme une sorte d'assurance d'immortalité, l'honneur d'y voir inscrire son nom. D'ailleurs M. de Buffon avoit eu le soin constant d'acquiescer & de conserver du crédit auprès des ministres

& de ceux qui chargés par eux des détails, ont sur la décision & l'expédition des affaires une influence inévitable. Il se concilioit les uns en ne se permettant jamais d'avancer des opinions qui pussent les blesser, en ne paroissant point prétendre à les juger ; il s'assuroit des autres en employant avec eux un ton d'égalité qui les flattoit, & en se dépouillant de la supériorité que sa gloire & ses talens pouvoient lui donner. Ainsi, aucun des moyens de contribuer aux progrès de la science à laquelle il s'étoit dévoué, n'avoit été négligé. Ce fut l'unique objet de son ambition : sa considération ; sa gloire y étoient liées sans doute ; mais tant d'hommes séparent leurs intérêts de l'intérêt général, qu'il seroit injuste de montrer de la sévérité pour ceux qui savent les réunir. Ce qui prouve à quel point M. de Buffon étoit éloigné de toute ambition vulgaire, c'est qu'appelé à Fontainebleau par le feu Roi, qui vouloit le consulter sur quelques points relatifs à la culture des forêts, & ce prince lui ayant proposé de se charger en chef de l'administration de toutes celles qui composent les domaines, ni l'importance de cette place, ni l'honneur si désiré d'avoir un travail particulier avec le Roi, ne purent l'éblouir : il sentoit qu'en interrompant ses travaux, il alloit perdre une partie de sa gloire ; il sentoit en même-temps la difficulté de faire le bien, sur-tout il voyoit d'avance la foule des courtisans & des administrateurs se réunir contre une supériorité si effrayante, & contre les conséquences d'un exemple si dangereux.

Placé dans un siècle où l'esprit humain s'agitait dans ses chaînes, les a relâchées toutes & en a brisé quelques-unes, où toutes les opinions ont été examinées, toutes les erreurs combattues, tous les anciens usages soumis à la discussion, où tous les esprits ont pris vers la liberté un essor inattendu, M. de Buffon parut n'avoir aucune part à ce mouvement général. Ce silence peut paroître singulier dans un philosophe dont les ouvrages prouvent qu'il avoit considéré l'homme sous tous les rapports, & annoncent en même temps une manière de penser mâle &

ferme , bien éloignée de ce penchant au doute , à l'incertitude qui conduit à l'indifférence.

Mais peut-être a-t-il cru que le meilleur moyen de détruire les erreurs en métaphysique & en morale , étoit de multiplier les vérités d'observation dans les sciences naturelles , qu'au lieu de combattre l'homme ignorant & opiniâtre , il falloit lui inspirer le désir de s'instruire : il étoit plus utile , selon lui , de prémunir les générations suivantes contre l'erreur , en accoutumant les esprits à se nourrir de vérités même indifférentes , que d'attaquer de front des préjugés enracinés & liés avec l'amour-propre , l'intérêt ou les passions de ceux qui les ont adoptés. La nature a donné à chaque homme son talent , & la sagesse consiste à y plier sa conduite : l'un est fait pour combattre , l'autre pour instruire ; l'un pour corriger & redresser les esprits , l'autre pour les subjuguier & les entraîner après lui.

D'ailleurs , M. de Buffon vouloit élever le monument de l'Histoire naturelle , il vouloit donner une nouvelle forme au Cabinet du Roi ; il avoit besoin & de repos & du concours général des suffrages : or , quiconque attaque des erreurs , ou laisse seulement entrevoir son mépris pour elles , doit s'attendre à voir ses jours troublés , & chacun de ses pas embarrassés par des obstacles. Un vrai philosophe doit combattre les ennemis qu'il rencontre sur la route qui le conduit à la vérité , mais il seroit mal-adroit d'en appeler de nouveaux par des attaques imprudentes.

Peu de savans , peu d'écrivains ont obtenu une gloire aussi populaire que M. de Buffon , & il eut le bonheur de la voir continuellement s'accroître à mesure que les autres jouissances diminuant pour lui , celles de l'amour-propre lui devenoient plus nécessaires. Il n'essuya que peu de critiques , parce qu'il avoit soin de n'offenser aucun parti , parce que la nature de ses ouvrages ne permettoit guère à la littérature ignorante d'atteindre à sa hauteur. Les savans avoient presque tous gardé le silence , sachant qu'il y a peu d'honneur & peu d'utilité pour les sciences à combattre un

système qui devient nécessairement une vérité générale si les faits le confirment, ou tombe de lui-même s'ils le contrarient.

D'ailleurs, M. de Buffon employa le moyen le plus sûr d'empêcher les critiques de se multiplier; il ne répondit pas à celles qui parurent contre ses premiers volumes. Ce n'est point qu'elles fussent toutes méprisables; celles de M. Haller, de M. Bonnet, de M. l'abbé de Condillac, celles même que plusieurs savans avoient fournies à l'auteur des Lettres Américaines, pouvoient mériter des réponses qui n'eussent pas toujours été faciles. Mais en répondant, il auroit intéressé l'amour-propre de ses adversaires à continuer leurs critiques, & perpétué une guerre où la victoire, qui ne pouvoit jamais être absolument complète, ne l'auroit pas dédommagé d'un temps qu'il étoit sûr d'employer plus utilement pour sa gloire.

Les souverains, les princes étrangers qui visitoient la France, s'empressoient de rendre hommage à M. de Buffon, & de le chercher au milieu de ces richesses de la nature, rassemblées par ses soins. L'Impératrice de Russie dont le nom est lié à celui de nos plus célèbres philosophes, qui avoit proposé inutilement à M. d'Alembert de se charger de l'éducation de son fils, & appelé auprès d'elle M. Diderot, après avoir répandu sur lui des bienfaits dont la délicatesse avec laquelle ils étoient offerts augmentoit le prix, qui avoit rendu M. de Voltaire le confident de tout ce qu'elle entreprenoit pour répandre les lumières, établir la tolérance & adoucir les loix; l'Impératrice de Russie prodiguoit à M. de Buffon les marques de son admiration les plus capables de le toucher, en lui envoyant tout ce qui, dans ses vastes états, devoit le plus exciter sa curiosité, & en choisissant par une recherche ingénieuse les productions singulières qui pouvoient servir de preuves à ses opinions. Enfin, il eut l'honneur de recevoir dans sa retraite de Montbart, ce héros en qui l'Europe admire le génie de Frédéric & chérit l'humanité d'un sage, & qui vient

aujourd'hui mêler ses regrets aux nôtres, & embellir par l'éclat de sa gloire la modeste simplicité des honneurs académiques.

M. de Buffon n'étoit occupé que d'un seul objet, n'avoit qu'un seul goût; il s'étoit créé un style, & s'étoit fait une philosophie par ses réflexions, plus encore que par l'étude; on ne doit donc pas s'étonner de ne trouver ni dans ses lettres ni dans quelques morceaux échappés à sa plume, cette légèreté, cette simplicité qui doivent en être le caractère: mais presque toujours quelques traits font reconnoître le peintre de la nature, & dédommagent d'un défaut de flexibilité incompatible peut-être avec la trempe mâle & vigoureuse de son esprit. C'est à la même cause que l'on doit attribuer la sévérité de ses jugemens, & cette sorte d'orgueil qu'on a cru observer en lui. L'indulgence suppose quelque facilité à se prêter aux idées & à la manière d'autrui, & il est difficile d'être sans orgueil, quand occupé sans cesse d'un grand objet qu'on a dignement rempli, on est forcé en quelque sorte de porter toujours avec soi le sentiment de sa supériorité.

Dans la société, M. de Buffon souffroit sans peine la médiocrité, ou plutôt occupé de ses propres idées, il ne l'apercevoit pas, & préféroit en général les gens qui pouvoient le distraire sans le contredire, & sans l'assujettir au soin fatigant de prévenir leurs objections ou d'y répondre. Simple dans la vie privée, y prenant sans effort le ton de la bonhomie, quoiqu'aimant par goût la magnificence & tout ce qui avoit quelque appareil de grandeur, il avoit conservé cette politesse noble, ces déférences extérieures pour le rang & les places, qui étoient dans sa jeunesse le ton général des gens du monde, & dont plus d'amour pour la liberté & l'égalité au moins dans les manières, nous a peut-être trop corrigés; car souvent les formes polies dispensent de la fausseté, & le respect extérieur est une barrière que l'on oppose avec succès à une familiarité dangereuse. On auroit pu tirer de ces déférences qui paroissent exagérées, quelques inductions défavorables au

caractère de M. de Buffon, si dans des circonstances plus importantes il n'avoit montré une hauteur d'ame & une noblesse supérieures à l'intérêt comme au ressentiment.

Il avoit épousé en 1752 Mademoiselle de Saint-Belin, dont la naissance, les agrémens extérieurs & les vertus réparèrent à ses yeux le défaut de fortune. L'âge avoit fait perdre à M. de Buffon une partie des agrémens de la jeunesse; mais il lui restoit une taille avantageuse, un air noble, une figure imposante, une physionomie à la fois douce & majestueuse. L'enthousiasme pour le talent fit disparaître aux yeux de Madame de Buffon l'inégalité d'âge, & dans cette époque de la vie où la félicité semble se borner à remplacer par l'amitié & des souvenirs mêlés de regrets, un bonheur plus doux qui nous échappe, il eut celui d'inspirer une passion tendre, constante, sans distraction comme sans nuage : jamais une admiration plus profonde ne s'unit à une tendresse plus vraie. Ces sentimens se monroient dans les regards, dans les manières, dans les discours de Madame de Buffon, & remplissoient son cœur & sa vie. Chaque nouvel ouvrage de son mari, chaque nouvelle palme ajoutée à sa gloire étoient pour elle une source de jouissances d'autant plus douces, qu'elles étoient sans retour sur elle-même, sans aucun mélange de l'orgueil qui pouvoit lui inspirer l'honneur de partager la considération, & le nom de M. de Buffon; heureuse du seul plaisir d'aimer & d'admirer ce qu'elle aimoit, son ame étoit fermée à toute vanité personnelle, comme à tout sentiment étranger. M. de Buffon n'a conservé d'elle qu'un fils, M. le comte de Buffon, major en second du régiment d'Angoumois, qui porte avec honneur, dans une autre carrière, un nom à jamais célèbre dans les sciences, dans les lettres & dans la philosophie.

M. de Buffon fut long-temps exempt des pertes qu'amène la vieillesse; il conserva également & toute la vigueur des sens & toute celle de l'ame; toujours plein d'ardeur pour le travail, toujours constant dans sa manière
de

de vivre, dans ses délassemens comme dans ses études, il sembloit que l'âge de la force se fût prolongé pour lui au-delà des bornes ordinaires. Une maladie douloureuse vint troubler & accélérer la fin d'une si belle carrière; il lui opposa la patience, eut le courage de s'en distraire par une étude opiniâtre, mais il ne consentit jamais à s'en délivrer par une opération dangereuse. Le travail, les jouissances de la gloire, le plaisir de suivre ses projets pour l'agrandissement du Jardin & du Cabinet du Roi, suffisoient pour l'attacher à la vie; il ne voulut pas la risquer contre l'espérance d'un soulagement souvent passager & suivi quelquefois d'infirmités pénibles, qui lui ôtant une partie de ses forces, auroient été pour une ame active plus insupportables que la douleur. Il conserva presque jusqu'à ses derniers momens le pouvoir de s'occuper avec intérêt de ses ouvrages & des fonctions de sa place, la liberté entière de son esprit, toute la force de sa raison, & pendant quelques jours seulement, il cessa d'être l'homme illustre dont le génie & les travaux occupoient l'Europe depuis quarante ans.

Les sciences le perdirent le 16 avril 1788.

Lorsque de tels hommes dispaçoissent de la terre, aux premiers éclats d'un enthousiasme augmenté par les regrets, & aux derniers cris de l'envie expirante, succède bientôt un silence redoutable, pendant lequel se prépare avec lenteur le jugement de la postérité. On relit paisiblement pour l'examiner, ce qu'on avoit lu pour l'admirer, le critiquer, ou seulement pour le vain plaisir d'en parler. Des opinions conçues avec plus de réflexions, motivées avec plus de liberté, se répandent peu à peu, se modifient, se corrigent les unes les autres; & à la fin une voix presque unanime s'élève, & prononce un arrêt que rarement les siècles futurs doivent révoquer.

Ce jugement sera favorable à M. de Buffon; il restera toujours dans la classe si peu nombreuse des philosophes, dont une postérité reculée lit encore les ouvrages. En

Hist. 1788.

L

général elle se rappelle leurs noms, elle s'occupe de leurs découvertes, de leurs opinions; mais c'est dans des ouvrages étrangers qu'elle va les chercher, parce qu'elles s'y présentent débarrassées de tout ce que les idées particulières au siècle, au pays où ils ont vécu peuvent y avoir mêlé d'obscur, de vague ou d'inutile: rarement le charme du style peut-il compenser ces effets inévitables du temps & du progrès des esprits; mais M. de Buffon doit échapper, à cette règle commune, & la postérité placera ses ouvrages à côté des dialogues du disciple de Socrate, & des entretiens du philosophe de Tusculum.

L'histoire des sciences ne présente que deux hommes, qui par la nature de leurs ouvrages paroissent se rapprocher de M. de Buffon, Aristote & Plin. Tous deux infatigables comme lui dans le travail; étonnans par l'immensité de leurs connoissances & par celle des plans qu'ils ont conçus & exécutés, tous deux respectés pendant leur vie, & honorés après leur mort par leurs concitoyens, ont vu leur gloire survivre aux révolutions des opinions & des empires, aux nations qui les ont produits, & même aux langues qu'ils ont employées, & ils semblent par leur exemple promettre à M. de Buffon une gloire non moins durable.

Aristote porta sur le mécanisme des opérations de l'esprit humain, sur les principes de l'éloquence & de la poésie, le coup-d'œil juste & perçant d'un philosophe, dicta au goût & à la raison des loix auxquelles ils obéissent encore, donna le premier exemple, trop tôt oublié, d'étudier la nature dans la seule vue de la connoître & de l'observer, avec précision comme avec méthode.

Placé dans une nation moins savante, Plin fut plutôt un compilateur de relations qu'un philosophe observateur; mais comme il avoit embrassé dans son plan tous les travaux des arts & tous les phénomènes de la nature, son ouvrage renferme les mémoires les plus précieux & les plus étendus que l'antiquité nous ait laissés pour l'histoire des progrès de l'espèce humaine.

Dans un siècle plus éclairé, M. de Buffon a réuni ses propres observations à celles que ses immenses lectures lui ont fournies; son plan moins étendu que celui de Pline, est exécuté d'une manière plus complète; il présente & discute les résultats qu'Aristote n'avoit osé qu'indiquer.

Le philosophe Grec n'a mis dans son style qu'une précision méthodique & sévère, & n'a parlé qu'à la raison.

Pline dans un style noble, énergique & grave, laisse échapper des traits d'une imagination forte, mais sombre, & d'une philosophie souvent profonde, mais presque toujours austère & mélancolique.

M. de Buffon, plus varié, plus brillant, plus prodigue d'images, joint la facilité à l'énergie, les grâces à la majesté; sa philosophie, avec un caractère moins prononcé, est plus vraie & moins affligeante. Aristote semble n'avoir écrit que pour les savans, Pline pour les philosophes, M. de Buffon pour tous les hommes éclairés.

Aristote a été souvent égaré par cette vaine métaphysique des mots, vice de la philosophie Grecque, dont la supériorité de son esprit ne put entièrement le garantir.

La crédulité de Pline a rempli son ouvrage de fables qui jettent de l'incertitude sur les faits qu'il rapporte, lors même qu'on n'est pas en droit de les reléguer dans la classe des prodiges.

On n'a reproché à M. de Buffon que ses hypothèses; ce sont aussi des espèces de fables, mais des fables produites par une imagination active qui a besoin de créer, & non par une imagination passive qui cède à des impressions étrangères.

On admirera toujours dans Aristote le génie de la philosophie; on étudiera dans Pline les arts & l'esprit des anciens, on y cherchera ces traits qui frappent l'ame d'un sentiment triste & profond; mais on lira M. de Buffon pour s'intéresser comme pour s'instruire; il continuera d'exciter pour les sciences naturelles un enthousiasme utile, & les hommes lui devront long-temps & les doux plaisirs

que procurent à une ame jeune encore les premiers regards jétés sur la nature, & ces consolations qu'éprouve une ame fatiguée des orages de la vie, en reposant sa vue sur l'immensité des êtres paisiblement soumis à des loix éternelles & nécessaires.





M É M O I R E S

D E

MATHÉMATIQUE

E T

D E P H Y S I Q U E ,

T I R É S D E S R E G I S T R E S

de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCC. LXXXVIII.

SUR L'ÉCLIPSE DU SOLEIL

du 15 juin 1787.

Par M. LE MONNIER.

LA fin de cette éclipse n'a pu être observée à Paris à cause des nuages, mais on a très-bien déterminé l'heure du commencement; savoir, à 4^h 27' 25", le disque du Soleil ayant

Mém. 1788.

A

paru commencer à s'entamer dans la lunette du quart de cercle qui renverse ; ç'a été tant soit peu au-dessus de la ligne horizontale, passant par le centre du disque, savoir au nord-est. Ainsi le commencement s'est donc fait du côté de la partie occidentale, & 5^d ou environ moins haut que le centre du Soleil. Je n'ai pu observer la plus grande phase vers $5^h \frac{1}{4}$, le ciel s'étant couvert de nuages ; mais $32'$ après le commencement de l'éclipse, savoir, à $4^h 59' \frac{1}{2}$ de temps vrai, la phase lumineuse étoit de $19' 17'' \frac{1}{2}$; d'où s'ensuit que la partie du Soleil éclipsé a dû être à cet instant de $12' 19''$ à $20''$.

Si l'on veut déduire la longitude de la Lune de la première phase observée à $4^h 27' 25''$, il faut connoître, par les observations de la fin de juin & du commencement de juillet, l'erreur des Tables du Soleil qu'on auroit employées à cette recherche. J'y ai employé pareillement les observations d'*Arcturus* & du Soleil faites au 22 mai & au 21 juillet. Le bureau des longitudes se sert à Londres de Tables pour l'almanach de la Navigation, qui m'ont paru, le jour de l'éclipse, donner, lors du commencement, $2^c 24^d 21' 37'' \frac{1}{2}$; au lieu que les Tables publiées dans l'*Astronomie nautique lunaire*, indiquent $31''$ de moins. Or, en négligeant les actions de Jupiter & de Vénus sur le mouvement de la Terre, celles-ci n'y sauroient produire $10''$ d'erreur.

Quoi qu'il en soit, j'ai d'abord recherché l'angle parallaxique au centre de la Lune pour l'instant où l'éclipse a dû commencer ; & employant les formules de M. Euler pour le sphéroïde, je trouve cet angle de $48^d 54' 35''$, l'ayant augmenté de $20' 5''$, à cause de l'aplatissement de la Terre supposé de $\frac{1}{200}$, lorsqu'on a publié les mêmes formules qui réduisent la parallaxe horizontale de $61' 18''$, à celle de hauteur $51' 46'' \frac{1}{3}$; par conséquent celles de longitude & de latitude à $39' 01''$ & $34' 01'' \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après les Tables lunaires adoptées par le bureau des longitudes, le lieu de la Lune se trouve $49'' \frac{1}{2}$ ou $42 \frac{1}{2}$ plus avancé que selon l'observation ; savoir, dans le premier cas, en adoptant la

latitude de ces mêmes Tables ; & dans le second cas , en supposant que l'éclipse a commencé 5^d au-dessous de la ligne horizontale passant par le centre du disque du Soleil.

Il est vrai que l'erreur paroît moins forte par l'observation de la fin de l'éclipse vue à Dijon : j'en ai fait le calcul en prenant d'abord pour différence en longitude géographique 0^h 10' 47", & l'heure de la fin observée à 6^h 12' 43". Or la latitude boréale de la Lune étant , suivant les Tables, de 52' 51", & l'angle parallactique dans le sphéroïde 47^d 6' 25", on auroit l'erreur des Tables en excès de 11" $\frac{2}{3}$. Quand les observateurs de Dijon nous indiqueront le point du limbe , à compter du zénith du disque solaire où s'est faite la séparation des deux disques, nous serons sans doute en état de mieux assigner l'erreur des Tables par l'heure qu'ils ont observée de la fin de l'éclipse.

Pour comparer la longitude de la Lune à celle du Soleil , & reconnoître enfin l'erreur des Tables lunaires, voici quelques observations du Soleil dont il a été parlé ci-dessus.

En 1787, le 22 mai, le centre du Soleil a passé au quart de cercle mural à 3^h 56' 48" $\frac{1}{4}$ ou 49" à la pendule qui avançoit par jour de 4" $\frac{1}{2}$ sur la révolution des étoiles fixes, ou bien de 4' 5" $\frac{1}{4}$ sur celle du Soleil ; & le soir à 14^h 06' 31" $\frac{2}{3}$, l'étoile *Arcturus* a passé au même parallèle.

Le 21 juillet de la même année à 8^h 01' 27" $\frac{1}{4}$ ou 28", le centre du Soleil a passé à la pendule qui n'avançoit que de 4" ou 3" $\frac{1}{2}$ par jour sur la révolution des fixes, & l'étoile *Arcturus* a passé sur le soir à 14^h 4' 54".

Avec ces seules données, il seroit déjà facile de découvrir l'erreur des Tables au moment de l'éclipse du Soleil observée ; mais il sera utile de rapporter pour la suite, les observations du passage du Soleil les 30 juin & 1^{er} juillet par son aphélie.



NOUVELLES COMPARAISONS
DES HAUTEURS SOLSTICIALES,

Faites au quart de cercle mobile, suivies de quelques autres dont la date est moins ancienne, & qui ont été faites soit au foyer d'un verre objectif de 80 pieds, soit au plus grand des quarts de cercle muraux.

Par M. LE MONNIER.

JE ne parlerai dans la première partie de ce Mémoire, que des observations faites aux approches ou bien au jour même du solstice d'été, me réservant à compléter dans la seconde partie, ce qui a déjà été publié pour le temps du solstice d'hiver dans nos volumes, ou en produisant l'extrait général que j'ai fait sur cet objet particulier, de mes registres.

L'état & la constitution des plus grands instrumens qu'on a soin de vérifier au zénith par des fils aplomb, lorsque la chose devient possible & praticable, n'est pas la seule considération que nous devons faire entrer dans l'examen des observations comparées après une cinquantaine d'années : le Solstice d'hiver demande d'ailleurs plus de détails que ceux qu'on représente pour le solstice d'été ; outre que la réfraction, souvent variable dans les moindres hauteurs du Soleil, exige plus de faits, selon que les automnes tempérées, ainsi que les vents du sud, se prolongent davantage pendant les mois de décembre en chaque année ; & nous voyons souvent diminuer ces réfractions au défaut des vents opposés ou du nord-est, lorsque le Soleil commence à entrer dans le signe du Capricorne.

Je n'ai qu'un seul mot à dire ici pour l'observation du solstice d'été, faite au gnomon de Saint-Sulpice ; l'image

projetée sur le marbre, au foyer du verre objectif, n'ayant pas rasé les traits qui y sont gravés; au lieu qu'elle les débordoit en 1764, & même qu'elle les eût débordés également d'un quart de ligne ou de $4''$, si le 21 juin, jour de l'observation, le moment du solstice eût concouru avec l'heure du midi.

L'effet de la nutation, le nœud de la Lune étant au 0^d du Bélier au 21 juin 1764, étoit de $9''$, selon les observations d'Angleterre & selon les miennes, faites aux deux secteurs de Graham, 18 ans auparavant, où bien à la période précédente. Mais le 20 juin 1788, le nœud de la Lune étoit en $8^{\circ} 15^d$; en sorte que l'effet de la nutation, après s'être anéanti vers le nord, a dû repasser au sud d'environ $2'' \frac{3}{4}$. Au reste, il ne s'en falloit que d'une seconde que le Soleil n'eût atteint le tropique, puisque le moment du solstice n'a dû arriver qu'après que le Soleil a parcouru dans son orbite apparente $19^{\circ} \frac{2}{3}$, ou dans le plan de l'écliptique. Or à Saint-Sulpice, le bord de l'image septentrional, ou le plus près du pied du gnomon étoit $0^{\circ} \frac{1}{3}$, au-dessous du trait, & son bord opposé ou méridional $0^{\circ} \frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{6}$ de ligne plus éloigné que le trait gravé sur le marbre; d'où il est aisé d'en conclure la position apparente & actuelle de cette image du Soleil relativement à celle dont on trouve la figure gravée dans notre volume de 1762, là où l'on a inféré ce qui a été vu deux ans après, ou, comme je l'ai dit, en 1764.

Je ne pourrai guère me dispenser de comparer cette observation à celle du solstice d'hiver, pour en déduire les changemens arrivés, pendant ce court intervalle de temps, à l'obliquité de l'écliptique. Nous n'avons pas toujours la commodité de vérifier dans les grandes églises dont les portes sont ouvertes, & où les courans d'air nuisent à l'état naturel d'un fil vertical d'environ 75 pieds, la distance de l'image à l'égard de l'aplomb qui répond au zénith. Nous sommes donc obligés de recourir aux observations du solstice d'hiver, ou de la distance des tropiques; ce qui n'est

pas un moindre avantage , puisque le double de l'obliquité de l'écliptique entraîne avec soi le double de sa variation.

Mais il seroit à désirer , puisque l'Observatoire royal est bientôt rétabli , qu'on y continuât les observations d'été & celles d'hiver à la méridienne tracée dans la grande salle , & dont l'Académie a supporté les grands frais en l'année 1732. Il n'y manque que d'y fixer pour le solstice d'été un verre objectif de 30 à 40 pieds de foyer : celui-ci auroit l'avantage d'être vérifié à l'aide du fil aplomb , puisqu'on peut clore exactement la grande salle , & y pratiquer aussi longtemps qu'il est nécessaire & à loisir , toutes espèces de vérifications , principalement sur les divisions solsticiales ; l'usage aujourd'hui étant établi à tel point que nous appliquons avec succès l'arc de Vernier ou de Nonius à nos baromètres portatifs & même aux pieds-de-roi , &c. Or les Sociétés littéraires sont toujours dans le cas de s'examiner , & de reconnoître , suivant les circonstances , ce qui leur doit paroître , au moins en physique , le plus avantageux.

Il y a plus , les faits les mieux établis décident , puisque nous en avons tant de preuves , laquelle des opinions qu'on voit successivement éclore dans les assemblées , doit à la fin prévaloir. Nous devons à cette maxime la connoissance de l'accourcissement du pendule à mesure qu'on s'approche de l'équateur , celle de la dilatation des métaux relative à nos mesures géodésiques , les dérangemens causés à l'orbite de la Terre par l'action des planètes , comme aussi l'accroissement des degrés du méridien à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur vers les pôles. Ainsi nous avons vu renaître pareillement , il y a 70 ans dans nos assemblées , une opinion ancienne déjà proposée aux temps des califes de Bagdad , & ensuite au renouvellement des lettres , sur-tout depuis Tycho , Kepler & Gassendi , touchant la diminution de l'obliquité de l'écliptique. L'hypothèse de M. de Louville qui vouloit l'établir constamment décroissante , à raison d'une minute en 100 ans , n'a cessé d'être attaquée , depuis qu'on a reconnu que la diminution étoit plus lente , comme je l'ai

fait voir dix ans avant qu'il fût question du gnomon rétabli à Florence en 1757.

Au reste, nous sommes rassurés entièrement sur la stabilité que nos quarts de cercle mobiles gardent entr'eux par rapport au fil aplomb; il n'y a que l'axe optique qui puisse changer dans leurs lunettes, par la destruction des fils placés au foyer des deux verres convexes: on y remédie autant qu'il est possible par des vérifications faites au zénith & à l'horizon; & à midi (a) le plan du limbe est soigneusement placé sur la méridienne.

En 1738, mon quart de cercle mobile a donné la hauteur solsticiale de $64^{\text{d}} 54' 18'' \frac{1}{2}$: la correction au zénith étoit $45''$ à $47'' \frac{1}{2}$, & à l'horizon elle étoit $17'' \frac{1}{2}$ plus grande. Réduisant au parallèle de l'Observatoire royal, on auroit $64^{\text{d}} 54' 13'' \frac{1}{2}$ ou $16''$ seulement.

Le nœud ascendant de la Lune étoit alors en $4^{\text{f}} 23^{\text{d}}$, & la nutation calculée dans le cercle indiqueroit $7'' \frac{1}{4}$ vers le sud, ou dont le Soleil auroit été trop abaissé lors de son passage au tropique du Cancer. En 1740, j'ai trouvé au même lieu le bord supérieur du Soleil plus élevé de $5'' \frac{1}{2}$; mais la nutation calculée dans le cercle, n'étoit plus que de $2'' \frac{1}{4}$ vers le sud.

En 1741, mon quart de cercle mobile, transporté avec précautions dans la tour occidentale de l'Observatoire royal, $48'' \frac{1}{2}$ plus au sud, a donné la hauteur solsticiale du bord supérieur du Soleil, $64^{\text{d}} 55' 20''$ ou $22'' \frac{1}{2}$ tout au plus; mais corrigée comme les précédentes, à l'exception de la réduction qui convenoit à la différence en latitude, on aura $64^{\text{d}} 54' 30''$. J'ai soupçonné en juillet, après le solstice, que la correction à l'horizon, vu à un point connu à Charenton, auroit été $5''$ plus grande; mais je n'ai tiré cette conjecture que par induction, n'ayant pas renversé le quart de cercle, faute d'un appareil convenable pour cette opération du renversement. Le nœud ascendant de la Lune

(a) Voyez nos Mémoires, année 1721, &c.

étoit alors $2^{\circ} 24'$ à 25° degrés; & l'effet de la nutation, qui avoit cessé vers le sud, avoit passé en sens contraire de près d'une seconde ou $0^{\circ} \frac{7}{8}$ vers le nord.

Je vais comparer présentement ces observations avec celles de l'année 1788. Mon quart de cercle mobile, vérifié au zénith & à l'horizon, donne actuellement la correction *additive* de $42'' \frac{1}{2}$ au zénith, & $17'' \frac{1}{2}$ plus petite à l'horizon, c'est-à-dire, que ce seroit $38''$ à la hauteur du bord supérieur du Soleil au solstice d'été; en un mot, en admettant ce genre de correction proportionnel à l'arc total, comme je l'avois pratiqué en 1738. Or, j'ai trouvé, les 18, 19 & 23 juin, la hauteur du bord supérieur du Soleil réduite au parallèle de l'Observatoire royal, $64^{\circ} 54' 10'' \frac{1}{2}$ & $08''$. Il est facile ainsi de comparer toutes ces valeurs de quelque manière qu'y puissent intervenir les causes générales & physiques; autres que celles de la nutation de l'axe terrestre. Voyons si elles ont dû produire des différences qu'on est en état de remarquer, & auxquelles j'ai cru devoir m'en tenir.

Le nœud ascendant de la Lune est actuellement en $8^{\circ} 15' \frac{1}{2}$, & la nutation $2'' \frac{1}{4}$ vers le sud; ce qui nous élève la hauteur solsticielle moyenne à $64^{\circ} 54' 12'' \frac{1}{2}$ ou $10''$.

Celle de 1738 indiquoit la moyenne $64^{\circ} 54' 21$ ou $23''$, ainsi que celle de 1740; enfin celle de 1741 l'a indiquée de $64^{\circ} 54' 29''$ ou $24''$ au moins.

Ainsi les mêmes divisions, y compris l'effet du curseur du micromètre appliqué à la lunette du quart de cercle, ont donné en 50 ans, sur un seul & unique instrument, $12'' \frac{1}{2}$ tout au plus, ou $10''$ pour la diminution apparente de l'obliquité de l'écliptique: on trouveroit peut-être aussi postérieurement en 47 années $13'' \frac{1}{2}$ à $19''$; mais j'ai donné tant de soins & d'attentions aux observations de l'année 1738, les jours qui ont précédé & qui ont suivi immédiatement le solstice d'été, que je me vois dans le cas de les préférer à toutes autres des diverses années qui ont suivi cette principale époque.



EXTRAIT DU REGISTRE
DES
OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

de l'année 1680,

Concernant quelques longitudes de la Lune observées, & relatives à l'écrit inséré dans le volume de l'année 1787, de nos Mémoires.

Par M. LE MONNIER.

LES longitudes de la Lune qu'on va rapporter, doivent servir ici de supplément à ce qui a été dit page 75 de *l'Astronomie nautique lunaire*, ainsi qu'à diverses fois pareillement dans nos derniers *Mémoires de l'Académie*, à l'occasion des éclipses du Soleil les plus récentes, comparées avec d'autres correspondantes au siècle précédent.

Comme il a été question dans nos assemblées, d'une trentaine d'observations de la longitude de la Lune observée sous un méridien qu'on suppose 7,"6 de temps à l'ouest de l'Observatoire royal, & qu'on vouloit les faire servir à reconnoître l'accélération du moyen mouvement de la Lune, je ne devois plus taire ici assurément les réflexions suivantes. Et d'abord s'il y a une demi-minute ou environ 25" entre les calculs des longitudes de la Lune qu'on a déjà imprimées aux *Éphémérides*, & celles que j'ai déduites de mes propres observations, en vain voudroit-on parvenir par cette voie à tirer les conclusions annoncées. En second lieu, la question se réduit à indiquer quels étoient d'abord les temps vrais ou les temps moyens des passages de la Lune par le méridien, & s'ils ont différé beaucoup de ceux que j'ai observés dans un lieu qui est 2",3 plus occidental que l'Observatoire royal. 3.^o Il est nécessaire de savoir si on a comparé les passages de la Lune à des étoiles dont la distance au zénith étoit à très-peu de chose près la même,

Mém. 1788.

B

& non pas à d'autres étoiles, ou plutôt au Soleil plus ou moins élevé que la Lune dans le méridien, & dont les passages doivent ainsi être assujettis à l'incertitude des erreurs du plan du quart-de-cercle mural.

J'insistois donc d'abord sur ces considérations essentielles, principalement à dessein de parvenir à vérifier soigneusement les observations qu'on nous avoit présentées. Dans le manuscrit présenté aux Commissaires de l'Académie, on indiquoit en effet que le passage de la Lune avoit été comparé à celui des étoiles plus ou moins hautes : le même cas s'appliquoit aussi aux passages observés de la Lune & du Soleil à distances fort inégales du zénith. Par exemple, le 14 janvier, j'ai comparé le passage du premier bord de la Lune à l'étoile ν du lien des Poissons, qui paroissoit à peine $0^d \frac{3}{4}$ plus éloignée du zénith, tandis que dans l'autre Observatoire on étoit en droit d'y requérir les erreurs du plan du quart-de-cercle mural, lors des passages du premier bord de la Lune & de l'étoile α du Bélier, plus éloignée du zénith de $4^d \frac{1}{2}$ que le centre de la Lune.

Pour décider ici de la vraie longitude de la Lune observée lors de chacune des six observations comparées & prises au hasard dans les trois ou quatre saisons de l'année 1780, je vais rapporter ci-dessous les longitudes déduites de mes propres observations, sauf à y comparer, si le cas l'exige, un bien plus grand nombre de passages de la Lune au méridien, aux occultations d'étoiles vues au siècle précédent. Je pourrois même faire un relevé ou triage parmi une cinquantaine d'observations que je trouve sur mon registre de cette année, en choisissant celles qui ont été vues uniquement au même parallèle de quelques étoiles.

Voyez les
Ephémérides,
pages xcix, & c.

1780, 14 janv.	à $5^h 42'$	$13^m \frac{1}{2}$	de temps vrai	C longit.	γ	$23^d 00' 00''$
11 mars,	3. 52. 09	$\frac{3}{4}$	γ	23.	01. 30
27 juin, 20.	22. 37	$\frac{1}{2}$	γ	15.	22. 54
7 juil.	4. 53. 33	$\frac{1}{2}$	η	29.	22. 02
					ou bien	29. 21. 49
4 sept.	4. 53. 36	$\frac{1}{2}$	γ	0.	14. 40
13....12.	15. 48	$\frac{1}{2}$	γ	24.	02. 12 $\frac{1}{2}$

Dans l'observation du 4 septembre, j'ai eu égard à la parallaxe de la Lune en ascension droite, laquelle a dû s'accroître à $3'' \frac{1}{4}$ de degré vers l'orient, à cause de la déviation du plan du quart-de-cercle mural aux environs du tropique (qui répond au solstice d'hiver), & qui m'étoit connue à l'aide des hauteurs correspondantes du Soleil, vérifiées plusieurs fois en ces temps-là. Mais pour plus grande certitude dans une autre cas, à l'occasion de la recherche de la longitude de la Lune, lorsqu'elle a été observée le 13 septembre, il m'a fallu comparer l'étoile qui est la seconde des australes du quadrilatère sous les Poissons, avec la seconde des étoiles boréales. Or, je n'ai pas trouvé, en pareil cas, une demi-seconde de différence d'avec une autre comparaison qui avoit été faite des mêmes étoiles en janvier, ainsi qu'aux années précédentes. C'est ce qui m'a rendu plus décisif sur l'exactitude des passages de la Lune & de la plus élevée des deux étoiles. D'un autre côté, l'autre étoile, c'est-à-dire, la seconde des australes du quadrilatère, & qui passoit à même hauteur que la Lune, avoit suivi le passage du second bord au fil vertical de la lunette, de $0^h 8' 42'' \frac{3}{4}$, qui valent $2^d 10' 40''$, toutes réductions faites relativement à la marche de la pendule. J'en ai donc déduit l'ascension droite du centre, $3 56^d 06' 12''$; savoir, en supposant l'ascension droite apparente de l'étoile, tirée de mes catalogues, de $3 58^d 31' 43''$. J'avois aussi établi la déclinaison vraie, à l'aide des distances au zénith observées, de $5^d 59' 59'' \frac{1}{2}$, en diminuant la parallaxe de hauteur, d'après celle qui est horizontale, adoptée de $54' 52''$, de $9'' \frac{1}{2}$. Cette correction soustractive est déduite des formules de M. Euler. On tire de-là pour l'instant du passage du second bord de la Lune à $12^h 11' 8''$ de temps moyen, la longitude de son centre $(24^d 02' 12'' \frac{1}{2})$, avec une latitude australe de $3^d 57' 12'' \frac{1}{2}$.

Il y a aussi quelques différences sensibles dans les passages observés le 28 juin au matin, puisque le second bord de la Lune a dû passer au vrai méridien à $8^h 22' 37'' \frac{1}{2}$, moins

$3'' \frac{1}{2}$ à $3''$ pour la déviation du mural à $33^d \frac{1}{2}$ du zénith, & réduisant à l'Observatoire royal, on auroit le 27 juin à $20^h 22' 39''$, 8 de temps vrai. L'Almanach donne $2' 48''$, 7 pour l'équation du temps; d'où s'ensuit que le temps moyen seroit $20^h 25' 28'' \frac{1}{2}$, & non pas $20^h 25' 34''$, comme il est énoncé aux Ephémérides.



M É M O I R E

*Où l'on expose une méthode analytique, pour résoudre
les problèmes relatifs à la structure des Cristaux.*

Par M. l'abbé HAÜY.

DANS les différentes recherches que j'ai faites jusqu'ici, pour appliquer la loi des décroissémens à la structure des cristaux, je me suis borné à employer des méthodes particulières, qui n'avoient entr'elles d'autre relation que celle qu'elles empruntoient de l'unité même de la théorie qu'elles m'ont servi à développer. Mais je crois avoir maintenant obtenu un assez grand nombre de résultats, pour essayer de traiter ce sujet par une méthode générale, qui embrasse l'ensemble de toutes les combinaisons dont il est susceptible. C'est ce que je me propose de faire dans ce Mémoire, en établissant un petit nombre de formules d'où l'on puisse déduire, comme autant de corollaires, non-seulement les différens cas déjà donnés par l'observation, mais même ceux qui ne seroient encore qu'hypothétiques. Cette extension me paroît offrir un point de vue d'autant plus intéressant, que le nombre des formes connues augmente de jour en jour, & que plus d'une fois j'ai éprouvé que des résultats que j'avois d'abord conclus de la théorie comme étant de pure curiosité, se trouvoient ensuite réalisés, d'après de nouvelles observations, par le travail de la Nature.

L'examen que j'ai fait de la structure d'une multitude de cristaux pierreux, salins & métalliques, doit faire présumer avec beaucoup de vraisemblance, que toutes les formes cristallines primitives se réduisent à un petit nombre de polyèdres très-simples, parmi lesquels se trouve le rhomboïde. Je ne traiterai ici que de la théorie de cette

dernière forme, qui est de beaucoup la plus féconde en applications.

1. Il ne faut qu'un seul décroissement, soit sur les bords, soit sur les angles des lames du rhomboïde primitif, pour déterminer une forme secondaire qui masque entièrement le noyau, pourvu que ce décroissement se fasse d'une manière semblable sur toutes les parties analogues du noyau.

2. Ce décroissement produira toujours ou un nouveau rhomboïde, ou un dodécaèdre à faces triangulaires, ainsi que nous le verrons bientôt.

3. Soit $abdf$ (fig. 1) une des faces du noyau; il y a six espèces de décroissemens possibles, qui donneront des formes secondaires; savoir :

Un décroissement sur les bords ab , af .

Un second sur l'angle a .

Un troisième sur les bords bd , df .

Un quatrième sur les angles b , f .

Dans ces divers décroissemens, les lames de superposition ne peuvent avoir que la hauteur d'une molécule; si l'on supposoit deux hauteurs ou davantage, on auroit des angles rentrans, ce qui paroît contraire aux loix de la cristallisation régulière.

Quant aux décroissemens sur l'angle d , ils peuvent se faire, soit en allant de d vers a , auquel cas chaque lame n'aura que l'épaisseur d'une molécule, soit en hauteur, & de manière que les épaisseurs des lames soient égales à deux épaisseurs d'une molécule ou à un plus grand nombre, ce qui donne deux nouveaux décroissemens ajoutés aux quatre précédens.

4. J'appellerai formes secondaires simples, celles qui résultent de l'un des décroissemens dont je viens de parler; & formes secondaires composées, celles qui résultent de plusieurs de ces décroissemens combinés entr'eux.

5. La diagonale ad , qui aboutit au sommet a du cristal,

portera le nom de *diagonale oblique* ; & l'autre diagonale bf , celui de *diagonale horizontale*.

I. Des formes secondaires simples.

6. Soit $adfg$ (*fig. 2*) un quadrilatère formé par deux diagonales obliques opposées ad, gf du rhomboïde primitif, & par les arêtes ag, df , comprises entre ces diagonales. Exprimons d'abord algébriquement les différentes lignes principales que l'on peut considérer dans le rhomboïde. Soit (*fig. 1*) $bc = g.ac = p$. Soit (*fig. 2*) l'axe $af = a$. Ayant mené dr perpendiculaire sur l'axe, nous aurons

$$\begin{aligned} \sqrt{3} : 2 : g : dr &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}g^2\right)} . ar = \sqrt{(ad^2 - dr^2)} \\ &= \sqrt{(4p^2 - \frac{4}{3}g^2)} = \sqrt{\left(\frac{12p^2 - 4g^2}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Donc af ou $a = \frac{3}{2} ar = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; donc de ces trois quantités, l'axe, la diagonale oblique & la diagonale horizontale, deux étant connues, il est facile d'avoir la troisième. Les expressions de ces trois quantités seront, d'après la formule précédente,

$$a = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} ; p = \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 + 3g^2)},$$

$$\& g = \sqrt{\left(\frac{2p^2 - a^2}{3}\right)}.$$

7. Concevons maintenant des décroissémens sur les arêtes ab, af (*fig. 1*). Ces décroissémens donneront en général des dodécaèdres, dont une des arêtes coïncidera avec l'arête fd (*fig. 2*) du rhomboïde primitif, & dont l'axe sera le même que celui de ce rhomboïde. Soit am une des arêtes supérieures, & fm l'arête inférieure correspondante. Soit azt le triangle mesurateur, que nous pouvons considérer comme si les décroissémens se faisoient sur l'angle a , en observant qu'à une rangée de soustraite sur les bords ab, af (*fig. 1*), répond toujours une diagonale oblique qui mesure la différence d'une lame à l'autre.

Cela posé, nous aurons, en nommant n le nombre des diagonales soustraites,

$az : tz :: 2np : df :: 2np : \sqrt{(p^2 + g^2)} :: ad \text{ ou } 2p : dm$;
d'où l'on tire

$$dm = \frac{1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)}.$$

$$\begin{aligned} \int m &= df + dm = \sqrt{(p^2 + g^2)} + \frac{1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)} \\ &= \frac{n+1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df : \int m :: dr : mu ; \text{ ou } \sqrt{(p^2 + g^2)} : \frac{n+1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)} \\ :: \sqrt{(\frac{4}{3} g^2)} : mu = \frac{n+1}{n} \sqrt{(\frac{4}{3} g^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df : rf :: \int m : \int u ; \text{ ou } \sqrt{(p^2 + g^2)} : \frac{1}{3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} \\ :: \frac{n+1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)} : \int u = \frac{n+1}{3u} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} au &= a - \int u = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} \\ &- (\frac{n+1}{3n}) \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{2n-1}{3n} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} am &= \sqrt{(au^2 + mu^2)} \\ &= \sqrt{[(\frac{2n-1}{3n})^2 (9p^2 - 3g^2) + (\frac{n+1}{n})^2 \frac{4}{3} g^2]} \\ &= \frac{n+1}{n} \sqrt{[(\frac{2n-1}{3n+3})^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3} g^2]}. \end{aligned}$$

Connoissant am , il est facile de trouver tout le reste.

8. Cherchons maintenant s'il y a un cas où le dodécaèdre auroit ses triangles adjacens deux à deux sur le même plan, de manière qu'il deviendrait un nouveau rhomboïde circonscrit à la forme primitive, mais plus obtus. Dans ce cas, il faudra que au soit le tiers de l'axe, puisque am fera l'arête du rhomboïde, On aura donc,

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{3n} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} &= \frac{1}{3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} \\ \text{ou } \frac{2n-1}{3n} &= \frac{1}{3}, \text{ d'où l'on tire } n = 1, \text{ ce qui signifie} \\ &\text{que} \end{aligned}$$

que le dodécahèdre devient un rhomboïde, lorsque les décroissémens se font par une rangée sur les bords ab , af (fig. 1). C'est le cas du spath calcaire lenticulaire, & du schorl des granits.

9. Voyons s'il est possible que le dodécahèdre ait tous ses triangles isocèles. Dans ce cas on aura,

$$\frac{2n-1}{3n} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)},$$

puisque $am = fm$; donc $\frac{2n-1}{3n} = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire, $n = 2$. Je n'ai point encore observé ce cas dans la Nature.

10. Concevons maintenant des décroissémens sur l'angle a ; soient ao , fo , deux arêtes contiguës. Dans ce cas, on aura toujours des rhomboïdes, d'où il suit que ao étant la diagonale oblique, & of l'arête contiguë à cette diagonale, la perpendiculaire or menée sur l'axe, le rencontrera toujours de manière que l'on ait $fr = \frac{1}{3}af$. Cela posé, cherchons ao . Nous avons $au : ar :: am : ao$, de plus,

$$au : ar :: \frac{2n-1}{3n} : \frac{2}{3} :: \frac{2n-1}{n} : 2 :: 1 : \frac{2n}{2n-1};$$

donc ayant déjà am (7), il ne s'agit, pour avoir ao , que de multiplier le facteur commun $\frac{n+1}{n}$ de la

quantité am , par $\frac{2n}{2n-1}$, ce qui donne

$$ao = \frac{2n+2}{2n-1} \sqrt{\left[\left(\frac{2n-1}{3n+3}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2\right]}.$$

11. Cherchons si parmi tous les rhomboïdes renfermés dans ce cas, il y en auroit un qui fût parfaitement égal & semblable au rhomboïde cité n.^o 8. Alors il faudra que l'inclinaison de ao sur l'axe af soit égale à celle de fm , qui se confond avec la diagonale oblique du rhomboïde n.^o 8; donc $am = fm$, & $au = fu = \frac{1}{2}af$. Or

$$(7), fu = \frac{n+1}{3n} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} \quad \& \quad \frac{1}{2}af$$

$= \frac{1}{2} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; il faudra donc que l'on ait $\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $n = 2$. Donc la forme cherchée a lieu dans le cas où les décroissemens sur l'angle a se font par quatre rangées de molécules. Ce cas se trouve réalisé par quelques-unes des faces du schorl dodécaèdre à dix plans trapézoïdaux, & deux plans rhomboïdaux.

12. Si l'on fait $n = \frac{1}{2}$, ce qui est le cas d'un décroissement par une simple rangée de molécules, on trouve $ao = \frac{1}{3} \sqrt{(0 + \frac{4}{3}g^2)}$, qui exprime une quantité infinie; c'est-à-dire, qu'alors la diagonale oblique est infinie, & par conséquent la face sur laquelle elle tombe est horizontale. Ce cas a lieu dans le spath calcaire en prisme exahèdre. Alors il se fait un second décroissement, d'où résultent des faces latérales qui terminent la face supérieure.

13. Concevons que le noyau soit un cube, & faisons $p = 1$, $g = 1$, $n = 1$; on aura $ao = 2\sqrt{6}$. L'axe $a = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \sqrt{6}$. Soit p' la moitié de la diagonale oblique du nouveau rhomboïde, g' la moitié de la diagonale horizontale; on aura $(6)g' = \sqrt{(\frac{9p'^2 - a^2}{3})} = \sqrt{16}$; donc $g' : p' :: \sqrt{16} : \sqrt{6} :: 4 : \sqrt{6}$, ce qui est le cas du fer lenticulaire.

14. Passons aux décroissemens qui se font sur les arêtes bd, fd (fig. 1). Ces décroissemens donneront toujours des dodécaèdres à faces triangulaires scalènes, dont un des côtés se confondra avec l'une des arêtes bd, fd . Soient dp, du (fig. 3), deux arêtes contiguës; prolongeons ag jusqu'à la rencontre de dp ; soit dho le triangle mesurateur; nous aurons $dh = 2np$, & $oh = \sqrt{(p^2 + g^2)}$. Or, $dh : oh :: ad : al$; ou, $2np : \sqrt{(p^2 + g^2)} :: 2p : al = \frac{1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)} \cdot ap : al :: pf = ap + af : df$, ou $ap : \frac{1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)} :: ap + \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$.

: $\sqrt{p^2 + g^2}$; d'où l'on tire $ap = \frac{1}{n-1} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$,

$$pr = ap + \frac{2}{3} af = \frac{1}{n-1} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$

$$+ \frac{2}{3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{2n+1}{3n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$

$$dp = \sqrt{(pr^2 + dr^2)} = \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 (9p^2 - 3g^2)}$$

$$+ \frac{4}{3} g^2.] \text{ Cette formule ne diffère de celle qui}$$

exprime am ($n^o 7$), qu'en ce que le facteur commun

$\frac{n+1}{n}$ est supprimé, & que les seconds termes des numé-

rateurs & dénominateurs de la fraction sous le signe radical, ont leurs signes changés.

15. Si l'on fait $n = 1$, on trouve $dp = \sqrt{\left[\frac{2}{3}(9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2\right]}$, ce qui indique qu'alors l'axe $\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$ devient une quantité infinie, & que par conséquent la face produite est verticale. Ce cas a lieu dans le spath adamantin.

16. Cherchons aussi du . Nous avons $ur = fu + rf$
 $= ap + \frac{1}{3} af = \frac{1}{n-1} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$

$$+ \frac{1}{3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{n+2}{3n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$

. $dr = \sqrt{\left(\frac{4}{3}g^2\right)}$; ce qui donne $du = \sqrt{(ur^2 + dr^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2\right]}$.

17. Si dans l'expression $ap = \frac{1}{n-1} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$,

on fait $n = 2$, on trouve $ap = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = af$; ce qui fait connoître que quand les décroissimens se font par deux rangées, la partie ap qui excède l'axe du noyau, est toujours égale à cet axe; le spath calcaire à douze faces triangulaires scalènes, rentre dans ce cas général.

18. Dans la même hypothèse, & en supposant de plus

que l'on ait $p^2 = 2$, $g^2 = 3$, comme dans le spath calcaire, on trouve $dp = \sqrt{29}$, $du = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; d'ailleurs $df = \sqrt{5}$; donc dans chaque triangle scalène le moyen côté est double du petit.

Soit $abdf$ (fig. 1) le rhombe du noyau; ayant mené by par le milieu de af , on aura

$$\begin{aligned} ba &= \sqrt{5}, ay = \frac{1}{2}\sqrt{5}, by = \sqrt{bm^2 + my^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}bf\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ac\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{16} \cdot 12 + \frac{1}{4} \cdot 2\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{29}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, que le triangle bay est semblable à l'une quelconque des faces du dodécaèdre, & qu'il a ses côtés sous-doubles de ceux des mêmes faces; on voit de plus que le grand angle des faces du dodécaèdre est égal à celui du rhombe primitif. Ce cas est particulier au spath calcaire.

19. Imaginons maintenant des décroissémens sur l'angle d , en allant de d vers a , c'est-à-dire, en supposant que chaque lame n'ait que l'épaisseur d'une molécule; dans ce cas, toutes les formes secondaires seront des rhomboïdes.

Soit doh (fig. 4) le triangle mesurateur, on aura $dh = 2pn$, & $oh = \sqrt{p^2 + g^2}$; soit al le prolongement de ag ; $dh : oh :: ad : al$, ou

$$2np : \sqrt{p^2 + g^2} :: 2p : al = \frac{1}{n} \sqrt{p^2 + g^2}.$$

De plus, $ap : al :: pf = ap + af : df$, ou $ap : \frac{1}{n} \sqrt{g^2 + p^2} :: ap + \sqrt{9p^2 - 3g^2} : \sqrt{g^2 + p^2}$,

ce qui donne $ap = \frac{1}{n-1} \sqrt{9p^2 - 3g^2}$.

Soit cp la moitié de la diagonale oblique du nouveau rhomboïde, pz sera le tiers de l'axe; donc

$$\begin{aligned} pz &= \frac{1}{3}(2ap + af) = \frac{2}{3}ap + \frac{1}{3}af \\ &= \frac{2}{3n-3} \sqrt{9p^2 - 3g^2} + \frac{1}{3} \sqrt{9p^2 - 3g^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{n+1}{3n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}. \&$$

$$pr = ap = \frac{2}{3} af = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3} \right) \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$

$$= \frac{2n+1}{3n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}.$$

$$cp = \sqrt{(p^2 + c^2)}$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{n+1}{3n-3} \right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^2 \frac{4}{3} g^2 \right]}$$

$$= \frac{n+1}{2n+1} \sqrt{\left[\left(\frac{2n+1}{3n-3} \right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3} g^2 \right]}.$$

20. Si l'on fait $n = 1$, on trouve

$$cp = \frac{2}{3} \sqrt{\left[\left(\frac{3}{0} \right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3} g^2 \right]};$$

ce qui indique qu'alors l'axe est infini, & que par conséquent la face produite est verticale. Ce cas a lieu dans le spath calcaire en prisme exahédre, où les faces des sommets sont données par un nouveau décroissement. Nous avons vu (15) que le même prisme pouvoit être produit & l'étoit réellement dans le spath adamantin, en vertu d'un décroissement sur les arêtes bd , df (fig. 1), ce qui fait deux formes identiques avec différentes structures.

21. Si l'on fait $n = \frac{3}{2}$, & de plus $g^2 = 3$, $p^2 = 2$, comme dans le spath calcaire, on trouve $cp = \frac{5}{4} \sqrt{(17)}$. De plus, $ap = 2 \sqrt{(9)} = 6$. Appliquant ici la formule

$$g = \sqrt{\frac{2p^2 - a^2}{3}}, \& \text{ faisant } a = 15, p = \frac{5}{4} \sqrt{(17)},$$

on trouve, $g = \frac{5}{4} \sqrt{(3)}$; c'est-à-dire, que dans le rhomboïde dont il s'agit, la diagonale horizontale est à l'oblique, comme $\sqrt{(17)} : \sqrt{(3)}$, ce qui donne $134^d 25' 24''$ pour le grand angle du rhombe. J'ai observé récemment une variété du spath calcaire qui présente ce résultat.

22. Supposons encore des décroissemens sur l'angle d (fig. 1), mais en hauteur, & de manière que les lames de superposition aient une épaisseur double ou triple, ou &c. de celle des molécules. Soit $m d h$ (fig. 5) le triangle mesurateur, on aura, $dh = p$, $hm = n \sqrt{(g^2 + p^2)}$.

$dh : hm :: al : ag$; ou, $p : n \sqrt{(g^2 + p^2)} :: al : \sqrt{(p^2 + g^2)}$. Donc $al = \frac{p}{n}$. de plus $ap : ap + af :: al : fg$; ou, $ap : ap + \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} :: \frac{p}{n} : 2p$; donc $ap = \frac{1}{2n-1} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$.

Soit cu la moitié de la diagonale du nouveau rhomboïde, uz sera le $\frac{1}{3}$ de l'axe. Donc $uz = \frac{1}{3}(2ap + af) = \frac{1}{3}(\frac{2}{2n-1})(\sqrt{9p^2 - 3g^2}) + \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{2n+1}{6n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; & $ur = ap + \frac{1}{3}a = \frac{2n+2}{6n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. $ur : dr :: uz : cz$; ou, $\frac{2n+2}{6n-3} : \sqrt{(\frac{4g^2}{3})} :: \frac{2n+1}{6n-3} : cz = \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{(\frac{4g^2}{3})}$; $cu = \sqrt{(uz^2 + cz^2)} = \sqrt{[(\frac{2n+1}{6n-3})^2 (9p^2 - 3g^2) + (\frac{2n+1}{2n+2})^2 \frac{4g^2}{3}]} = \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{[(\frac{2n+2}{6n-3})^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2]}$.

23. On auroit pu aussi déduire immédiatement cette formule de celle du n^o 19, qui donne la valeur de cp , (*fig. 4*); car en supposant (*fig. 5*) un nouveau triangle mesurateur dty , dans lequel ty seroit égale à une seule arête de molécule, on voit que si hm égale deux hauteurs, dt doit égaler $\frac{1}{4}$ de diagonale. Si hm égale trois hauteurs, dt sera $\frac{1}{6}$ de diagonale. Donc si l'on représente par n le nombre des diagonales soustraites, comme dans le cas du n^o 19, il faudra substituer en général $\frac{1}{2n}$ à la place de n , dans la formule de ce n^o , ce qui donne $cp = \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{[(\frac{2n+2}{3-6n})^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2]}$, expression qui ne diffère de celle du n^o 22, qu'en ce

qu'au dénominateur de la fraction, sous le signe, on voit $3 - 6n$, au lieu de $6n - 3$; mais les carrés de ces quantités sont évidemment égaux; le changement de signe indique seulement ici que la diagonale oblique qui, dans la *figure 4*, s'inclinoit vers le haut de l'axe, se renverse dans la *figure 5*, & s'incline vers la partie inférieure de l'axe.

24. Voyons maintenant s'il ne seroit pas possible que, dans le cas dont il s'agit, le rhomboïde produit par quelque décroissement régulier, fût parfaitement semblable à la forme primitive. Alors il est clair que les triangles uop , fdn , seront semblables, & il en faut dire autant des triangles rectangles fdn , pox ; donc, $dr : ox = 2cz :: fr$

$$: px = uz. \text{ ou, } \sqrt{\left(\frac{4}{3}g^2\right)} : \frac{4n+2}{2n+2} \sqrt{\left(\frac{4}{3}g^2\right)}$$

$$:: \frac{1}{3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} : \frac{2n+1}{6n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}.$$

ou, $1 : \frac{2n+1}{n+1} :: \frac{1}{3} : \frac{2n+1}{6n-3}$. Multipliant les extrêmes & les moyens l'un par l'autre, égalant les deux produits, puis réduisant, on trouve $n = 2$; donc le cas est possible par un décroissement de deux rangées en hauteur.

Dans ce même cas on aura, $ap = \frac{1}{2n-1} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{1}{3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, c'est-à-dire, que l'axe du rhomboïde secondaire seroit à celui du noyau comme $\frac{5}{3} : 1$, ou comme $5 : 3$.

Ayant mené pe , parallèle à ad , il est clair que le rhomboïde secondaire sera divisible à l'aide d'un plan qui passeroit par pe . De plus, le triangle epu sera semblable au triangle pgf : or, à cause de $an = ap$, & de $fn = 2an$, le point n de la perpendiculaire gn tombe au milieu de la ligne pf ; donc le triangle pgf est isocèle; donc l'angle $epf = gpf$, d'où il est facile de conclure que si l'on fait sur les six arêtes du rhomboïde, des sections

semblables à celle qui passeroit par pe , ces sections combinées avec les parties qui resteront des faces du rhomboïde, formeront un dodécaèdre qui aura tous les triangles isocèles & égaux. Ce cas seroit celui du cristall de roche à deux pyramides sans prisme intermédiaire, si tous les petits dodécaèdres qui le composent devenoient, par la suppression des vides disséminés entr'eux, autant de rhomboïdes semblables à celui que l'on extrait par les sections les plus ordinaires. (*Voyez les Mémoires de l'Académie, année 1786, page 78*).

25. Venons aux décroissemens sur les angles b, f , (*fig. 1*). Il est facile de voir que ces décroissemens donneront des dodécaèdres, dans lesquels l'arête qui répondra à la petite diagonale du noyau sera parallèle à cette diagonale. Soit tl (*fig. 6*) un de ces dodécaèdres, & to l'arête mentionnée; soit b le point de l'arête tp , qui se confond avec l'angle solide latéral du noyau; soit bc la diagonale horizontale du même noyau. Ayant prolongé to , menons be perpendiculaire sur cette ligne, & joignons les points c, e , par une droite. Soit bmn le triangle mesurateur; nous aurons, $bn = 2ng$, $mn = ai$ (*fig. 2*). Or $gn \times af = ai \times fg$; ou, $\sqrt{(\frac{4}{3}g^2)} \times \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = ai \times 2p$; donc,

$$ai = \sqrt{(\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2})}. \quad bn : mn :: bc : ce. \quad \text{ou}$$

$$2gn : \sqrt{(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2})} :: g : ce = \frac{1}{2n} \sqrt{(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2})}.$$

Soit maintenant $adfg$ (*fig. 7*) le même quadrilatère que *figure 2*; soit to la même ligne que *figure 6*; du milieu c de ad , menons la perpendiculaire ce , qui sera égale à la même ligne (*figure 6*); du point a menons ax , parallèle à ce ; menons aussi fk perpendiculaire sur ad ; nous aurons $at : ax = cc :: af : fk$. Or fk

$$= ai \text{ (fig. 2)}; \text{ donc, } at : \frac{1}{2n} \sqrt{(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2})}$$

$\therefore V(9p^2 - 3g^2) : V(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2})$. Donc

$$\begin{aligned} at &= \frac{1}{2n} V(9p^2 - 3g^2). \text{ Donc } ti = af \\ &+ 2at = V(9p^2 - 3g^2) + \frac{1}{n} V(9p^2 - 3g^2) \\ &= \frac{n+1}{n} V(9p^2 - 3g^2). \text{ ai} = af + at \\ &= \frac{2n+1}{2n} V(9p^2 - 3g^2); ir = if + rf \\ &= at + rf = \frac{1}{2n} V(9p^2 - 3g^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{3} V(9p^2 - 3g^2) = \frac{2n+3}{6n} V(9p^2 - 3g^2). \\ dr &= V(\frac{4}{3}g^2). \text{ Donc } di = V(ir^2 + dr^2) \\ &= V[(\frac{2n+3}{6n})^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2]. \end{aligned}$$

Maintenant $ai : ti :: di : io$. ou, $\frac{2n+1}{2n} : \frac{n+1}{n}$

$$\therefore V[(\frac{2n+3}{6n})^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2] :$$

$$io = \frac{2n+2}{2n+1} V[(\frac{2n+3}{6n})^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2].$$

26. Soit $n = \frac{1}{2}$; on aura, $at = V(9p^2 - 3g^2)$, c'est-à-dire, que dans ce cas la partie excédante de l'axe est précisément égale à cet axe, comme dans le cas du $n^o 14$: mais ici le solide secondaire est un rhomboïde, & non pas un dodécaèdre; car on a alors, $io = \frac{2}{3} V(16p^2 - 4g^2)$, $di = V(6p^2 - 4g^2)$, & $ir = \frac{4}{3} V(9p^2 - 3g^2) = \frac{4}{3} af$. Or $di : io :: ir : iz$. ou, $2 : 3 :: \frac{4}{3} af : iz$; donc iz est les $\frac{2}{3}$ de l'axe ti , & tz en est le $\frac{1}{3}$; donc alors io est la diagonale, & to l'arête d'un rhomboïde. Ce cas a lieu dans les grès de Fontainebleau; il est réalisé encore, du moins en partie, dans le schiste des granits, & dans certaines variétés du vitriol martial.

27. Cherchons quel est le rhomboïde qui donneroit, dans la même supposition, un cube pour cristal secondaire.

On aura $ti = 3 af = 3 \sqrt{9p^2 - 3g^2}$. De plus (*n.^o 26*), $io = \frac{3}{2} \sqrt{16p^2 - 4g^2}$: or, en appliquant ici les valeurs indiquées (*6*), & appelant g' la moitié de la grande diagonale, p' celle de la petite diagonale du cristal cubique secondaire, puis faisant $p' = g' = 1$, on trouvera d'une autre part, $ti = \sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \sqrt{6}$; $io = \frac{3}{2} \sqrt{[ti]^2 + 3g'^2} = \frac{3}{2} \sqrt{6 + 3} = 2$. Donc $\frac{3}{2} \sqrt{16p^2 - 4g^2} : 3 \sqrt{9p^2 - 3g^2} :: \sqrt{6}$; d'où l'on tire, $4p^2 = 2g^2$, & $g : p :: 2 : \sqrt{2}$; c'est-à-dire, que le rhomboïde cherché seroit semblable à celui du grenat.

28. Nous avons prouvé (*19*) qu'un décroissement sur l'angle d (*fig. 1*), donneroit toujours des romboïdes. Voyons si parmi tous ces rhomboïdes, il y en auroit un qui fût semblable à celui que nous avons considéré (*n.^o 26*), le noyau étant supposé le même de part & d'autre. Dans ce cas, il est clair que les triangles dpr (*fig. 4*) & dir (*fig. 7*) seront semblables; & puisque dr est un côté commun à ces deux triangles, il faudra de plus qu'ils soient égaux; donc on aura $pr = ir$. Or (*26*) $ir = \frac{2n+3}{6n} \sqrt{9p^2 - 3g^2}$, & pr (*19*) $= \frac{2n+1}{3n-3} \sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Si dans l'expression de ir , on fait $n = \frac{1}{2}$, comme cela est nécessaire pour avoir un rhomboïde, on aura $\frac{2n+3}{6n} = \frac{4}{3}$. Donc il faudra que le coefficient $\frac{2n+1}{3n-3}$ soit aussi égal à $\frac{4}{3}$, ce qui donne $n = \frac{5}{2}$; c'est-à-dire, que l'identité cherchée a lieu en vertu d'un décroissement par cinq rangées sur l'angle d : je n'ai point encore observé ce cas dans la nature.

Des Formes secondaires composées.

DANS les cristaux qui appartiennent à cette classe, il peut arriver, ou que les loix de décroissement n'aient lieu que par rapport à quelques-unes des faces du noyau, en sorte que les autres faces restent à découvert, ou bien que le noyau soit entièrement couvert par les lames de superposition qui subissent à la fois plusieurs décroissemens. Nous nous bornerons à un petit nombre d'exemples relatifs à ces deux cas.

29. Il faut, avant tout, démontrer le théorème suivant, qui nous sera utile pour la suite : *Dans un rhomboïde, le cosinus du petit angle des faces est toujours une quantité rationnelle, pourvu que les carrés des expressions des deux diagonales soient eux-mêmes des quantités rationnelles.*

Soit $abdf$ (fig. 1) une des faces du rhomboïde dont l'angle a du sommet est supposé obtus. Ayant mené an perpendiculaire sur df , si nous prenons af pour le rayon, fn sera le cosinus de l'angle afd . Soit $cf = \sqrt{x}$, $af = \sqrt{f}$; nous aurons $ac = \sqrt{f - x}$, les quantités x & $f - x$ étant, par l'hypothèse, des nombres quelconques entiers ou fractionnaires. Or, par la théorie des sinus, $fn = \frac{(cf)^2 - (ac)^2}{af} = \frac{x - (f - x)}{\sqrt{f}}$
 $= \frac{2x - f}{\sqrt{f}}$; donc, $fd : fn :: \sqrt{f} : \frac{2x - f}{\sqrt{f}}$
 $:: f : 2x - f$.

Si l'angle a étoit aigu, on feroit $fn = \frac{f - 2x}{\sqrt{f}}$.

30. Tout rhomboïde dans lequel le cosinus du petit angle est une quantité rationnelle, peut devenir un parallépipède rectangle, par des loix régulières de décroissement.

Soit $poruxf$ (fig. 8) un rhomboïde de ce genre. Si du point f , que je suppose être l'un des sommets, on mène fg , fm , perpendiculaires sur pf & ru , le rapport

des cosinus pg , rm , des angles fpf , fru , avec les lignes pf , ru , étant commensurable, & les lignes pf , ru , mesurant un certain nombre d'arêtes de molécules, il y aura toujours une loi régulière de décroissement susceptible de produire une face $fg hm$, perpendiculaire aux plans $fpfx$, $frux$, & une seconde face parallèle à $fg hm$, & qui passeroit par le point t ; donc le rhomboïde se trouvera alors changé en un prisme droit, dont les bases seront des rhombes $fg hm$.

Maintenant, ayant mené fk , perpendiculaire sur hm , concevons un plan coupant qui passe par les lignes fn , fk , & un autre plan parallèle au précédent, & qui passe par l'arête ot . S'il y a quelque loi de décroissement qui puisse donner deux nouvelles faces situées comme ces plans, il est évident que le rhomboïde deviendra un parallélipipède rectangle. Or si l'on conçoit le rhombe $orut$ divisé en une multitude de petits rhombes partiels, semblables entr'eux & au rhombe total, la ligne mh , perpendiculaire sur ht , mesurera les hauteurs d'un certain nombre de ces rhombes partiels. Il faudra donc que km mesure aussi un nombre déterminé de ces hauteurs, c'est-à-dire, qu'il faudra que le rapport de km avec mh soit commensurable : or il le sera nécessairement ; car dans le rhombe $fg hm$ (fig. 8 & 9), on a $gm = pr$; de plus, puisque mr (fig. 8) est une quantité rationnelle, il s'ensuit que le carré de fm sera aussi une quantité rationnelle. Donc fm , & gm (fig. 9) ayant l'une & l'autre pour carrés des quantités rationnelles, hf sera une quantité du même genre. Donc d'après ce qui a été dit plus haut (n.^o 29), le cosinus km de l'angle fmh sera une quantité rationnelle, & par conséquent km mesurera une loi possible de décroissement.

Les cristaux étant susceptibles de s'aplatir parallèlement à leurs bases, ou à leurs faces latérales, on conçoit que le parallélipipède rectangle pourroit devenir un cube.

31. Pour faire quelques applications, cherchons l'expression générale de km . Soit $fr = \sqrt{f}$, $lr = \sqrt{x}$;

nous aurons (29), $rm = \frac{2x-f}{\sqrt{f}}$; or, fm
 $= \sqrt{[(fr)^2 - (rm)^2]} = \sqrt{\left(\frac{4fx - 4x^2}{f}\right)}$; de
 plus, mi (fig. 9) $= lr$ (fig. 8) $= \sqrt{x}$; donc
 $fi = \sqrt{[(fm)^2 - (im)^2]} = \sqrt{\left(\frac{3fx - 4x^2}{f}\right)}$.

$$km = \frac{(im)^2 - (fi)^2}{fm} = \frac{x}{\frac{\sqrt{4fx - 4x^2}}{f}}$$

$$= \frac{\frac{3fx - 4x^2}{f\sqrt{4fx - 4x^2}}}{\frac{f}{f\sqrt{4fx - 4x^2}}} = \frac{4x^2 - 2fx}{f\sqrt{4fx - 4x^2}}; \text{ donc}$$

$$hm \text{ ou } fm : km :: \sqrt{\left(\frac{4fx - 4x^2}{f}\right)} : \frac{4x^2 - 2fx}{f\sqrt{4fx - 4x^2}}$$

$$:: 4fx - 4x^2 : 4x^2 - 2fx :: 2f - 2x : 2x - f.$$

32. Supposons maintenant que la figure 8 représente un des rhomboïdes que l'on peut extraire du grenat; nous aurons $f = 6$, $x = 4$; donc, $ur : mr :: f : 2x - f :: 3 : 1$; c'est-à-dire, que le décroissement qui donneroit la face $gfmh$, se feroit par six rangées de molécules sur l'angle des lames composantes. De plus, $hm : km :: 2f - 2x : 2x - f :: 4 : 2 :: 2 : 1$, c'est-à-dire, que le décroissement qui produiroit la face contiguë à fk , se feroit par deux rangées sur l'arête fk .

Dans le spath calcaire, on a $f = 5$, $x = 3$, ce qui donne, $ur : mr :: 5 : 1$, & $hm : km :: 4 : 1$.

Dans le schorl on a, $f = 10$, $x = 7$, ce qui donne pour le premier décroissement, $5 : 2$; & pour le second, $3 : 2$.

On voit par ce peu d'exemples, que les loix qui déterminent le changement du rhomboïde en cube, s'écartent presque toujours des loix les plus simples & les plus communes, & qu'ainsi ce changement doit rarement avoir lieu dans la nature.

Une autre cause doit contribuer encore à le rendre rare; elle consiste en ce que les décroissémens, dans ce cas, ne s'opéreroient pas semblablement sur toutes les faces du noyau, ce qui ne s'accorde pas avec les faits que l'on observe le plus ordinairement. Il y a cependant des exemples de cette diversité de décroissement dans le schorl & dans la pyrite ferrugineuse.

Vallérius (*Systema mineral. tom. I. p. 145*) cite du spath calcaire cubique. M. le chevalier Born, dans son *Lithophylacium*, p. 32, parle de grenats noirâtres d'une forme cubique: ces faits auroient besoin d'être constatés; après tout, ils sont dans l'ordre des possibles. Quant au grenat, nous avons vu (25) que le rhomboïde de cette substance pouvoit donner le cube par des décroissémens uniformes, & l'on concevra, avec un peu d'attention, que le grenat dodécahèdre donneroit pareillement le cube par un décroissement sur les angles aigus des faces du dodécahèdre; cette loi est la plus naturelle de toutes celles qui pourroient déterminer la forme cubique relativement au grenat.

33. Reprenons le cas du n.^o 20. J'ai prouvé que si les décroissémens se faisoient par deux rangées sur l'angle d (fig. 1), il en résulteroit six faces rhomboïdales situées verticalement, & qui, avec les six faces du noyau, formeroient un dodécahèdre. Cherchons le cas où les faces latérales auroient leurs angles égaux à ceux des faces des sommets. Soit $abdf$ (fig. 10) une de ces dernières faces, & $dfum$ une des faces latérales. Ayant mené an perpendiculaire sur fd , & dp perpendiculaire sur fn , il faudra que l'on ait fn cosinus de l'angle afd , égal à fp cosinus de l'angle dfn ; or $fn = \frac{(cf)^2 - (ac)^2}{af}$

$$= \frac{g^2 - p^2}{\sqrt{(f^2 + p^2)}} \cdot fp = \sqrt{(g^2 + p^2 - \frac{4}{3}g^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(3p^2 - g^2)}}{3}.$$

On aura donc $\frac{g^2 - p^2}{\sqrt{g^2 + p^2}} = \frac{\sqrt{3p^2 - g^2}}{3}$, élevant

tout au carré, & faisant évanouir les dénominateurs, $3g^4 - 6g^2p^2 + 3p^4 = 3p^4 + 2g^2p^2 - g^4$; réduisant, $g^2 = 2p^2$, & $g : p :: \sqrt{2} : 1$, ce qui a lieu dans le grenat. Alors le dodécaèdre peut être conçu, ainsi que je l'ai fait voir ailleurs, comme composé de quatre rhomboïdes égaux & semblables, dont chacun est divisible en six tétraèdres qui ont pour faces des triangles isocèles, tous pareillement égaux & semblables entr'eux; mais dans cette supposition, les faces latérales ne résultent d'aucune loi de décroissement, & sont listées comme celles du sommet.

34. Si l'on suppose que l'angle afd , au lieu d'être égal à l'angle dfp , en soit le double, alors on aura ac , sinus de la moitié de l'angle afd , égal à dp , sinus de l'angle dfp : or $dp : cf :: 2 : \sqrt{3}$; donc aussi, $ac : cf :: 2 : \sqrt{3}$, ce qui a lieu dans le sulfate de fer.

35. Concevons un solide à douze faces triangulaires scalènes, tel que celui qui résulteroit d'un décroissement par deux rangées sur les arêtes bd , fd (fig. 1), (*n.^o 17*). Supposons de plus que les angles solides latéraux, tels que d (fig. 3), soient remplacés par autant de facettes verticales, qui se touchent par leurs angles latéraux; ces facettes seront des trapézoïdes $mqt x$ (fig. 11), qui résulteront d'une loi de décroissement par deux rangées de molécules sur l'angle d (fig. 1), (*20*). Les deux triangles qmx , $qt x$, seront tournés alternativement vers les deux sommets du cristal, en sorte que le plus allongé qmx aura son sommet situé sur l'arête du (fig. 3), qui correspond à l'arête df du noyau.

Proposons-nous de trouver le cas où qmx seroit un triangle équilatéral. Il est aisé de concevoir, avec un peu d'attention, que la diagonale qx , qui est nécessairement parallèle à la diagonale horizontale du noyau, a ses extrémités

au milieu des arêtes bd , df (*fig. 1*), sur le rhombe du même noyau, ou plutôt de celui qui existeroit si le cristal étoit complet. Cela posé, soit ci (*fig. 3*) la même ligne que tm (*fig. 11*), ch répondra à mz ; & l'on aura $ch = \frac{1}{4} au = \frac{1}{4} \cdot 2 af = \frac{1}{2} \sqrt{9p^2 - 3g^2}$, (*17*). De plus, qx , comme nous l'avons vu, étant la moitié de la diagonale horizontale du noyau, on aura $qz = \frac{1}{2} g$; donc, par la nature du triangle équilatéral, $qz : mz :: 1 : \sqrt{3} :: g : \sqrt{9p^2 - 3g^2}$; donc $3g^2 = 9p^2 - 3g^2$; d'où l'on tire, $3p^2 = 2g^2$, & $g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$; c'est-à-dire, que le cas dont il s'agit a lieu dans le spath calcaire, où l'on trouve effectivement des cristaux qui présentent cette modification.

Dans le même cas, on a $tz = \frac{1}{2} zm$; donc $qz : tz :: \sqrt{3} : \frac{1}{2}$, ce qui indique que le triangle qtm est semblable à ceux qui composent les faces du rhomboïde primitif, dans le sulfate de fer.

36. Quelquefois le cristal est incomplet par le sommet, où l'on voit trois petits rhombes égaux & semblables à ceux du noyau.

Dans d'autres variétés, ces plans sont à contre-sens des précédens, & situés comme les faces du rhomboïde lenticulaire; on a alors un cristal à vingt-quatre faces trapézoïdales, produites par trois différentes loix de décroissement, & dont six, telles que $nirc$, $rhbp$, &c. (*fig. 12*), sont verticales & semblables à $mqtx$ (*fig. 11*); six autres, telles que smn , $mirh$, &c. sont les résidus des faces du dodécaèdre à triangles scalènes; les six dernières, telles que $fdom$, $dfio$, &c. remplacent les sommets. Si l'on mène les diagonales rm , mt , oh , on aura plusieurs propriétés géométriques assez remarquables. Car, 1.^o l'angle $rh m$ est droit; 2.^o dans le triangle rmh ; les côtés rm , rh , hm , sont entr'eux dans le rapport des quantités $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, c'est-à-dire, que ce triangle est semblable à l'un quelconque de ceux qui sous-diviseroient une des faces du noyau, en supposant que l'on eût

Fig. 1.

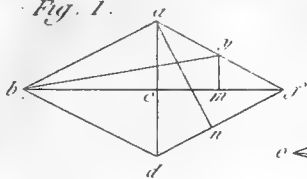


Fig. 2.

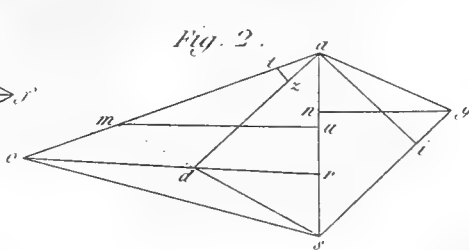


Fig. 3.

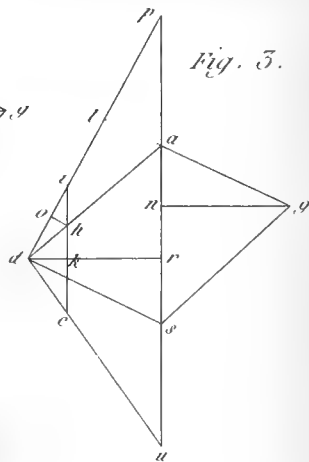


Fig. 4.

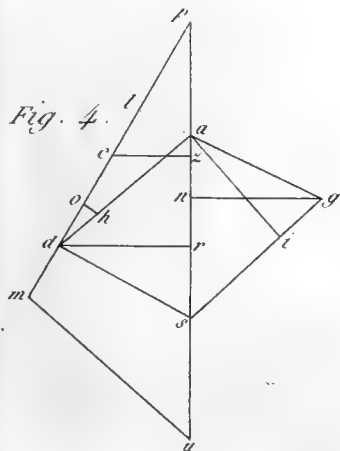


Fig. 5.

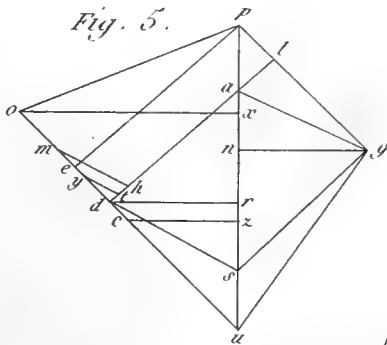


Fig. 6.

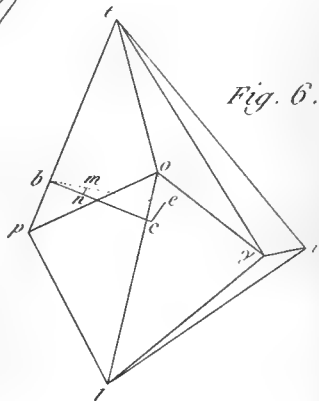


Fig. 7.

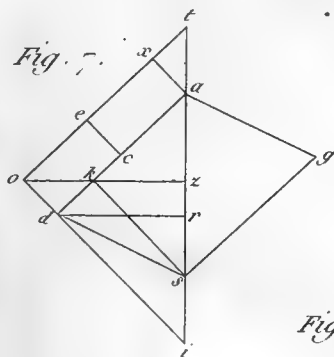


Fig. 8.

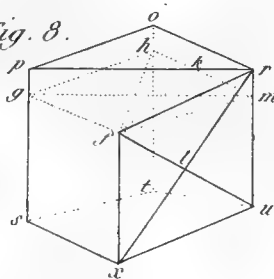


Fig. 10.

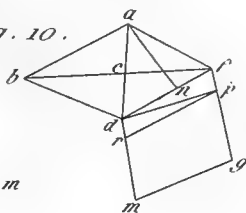


Fig. 11.

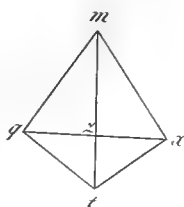


Fig. 12.

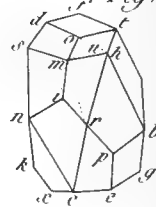
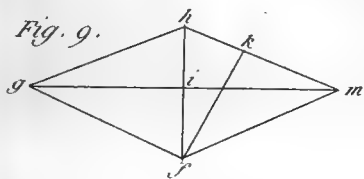
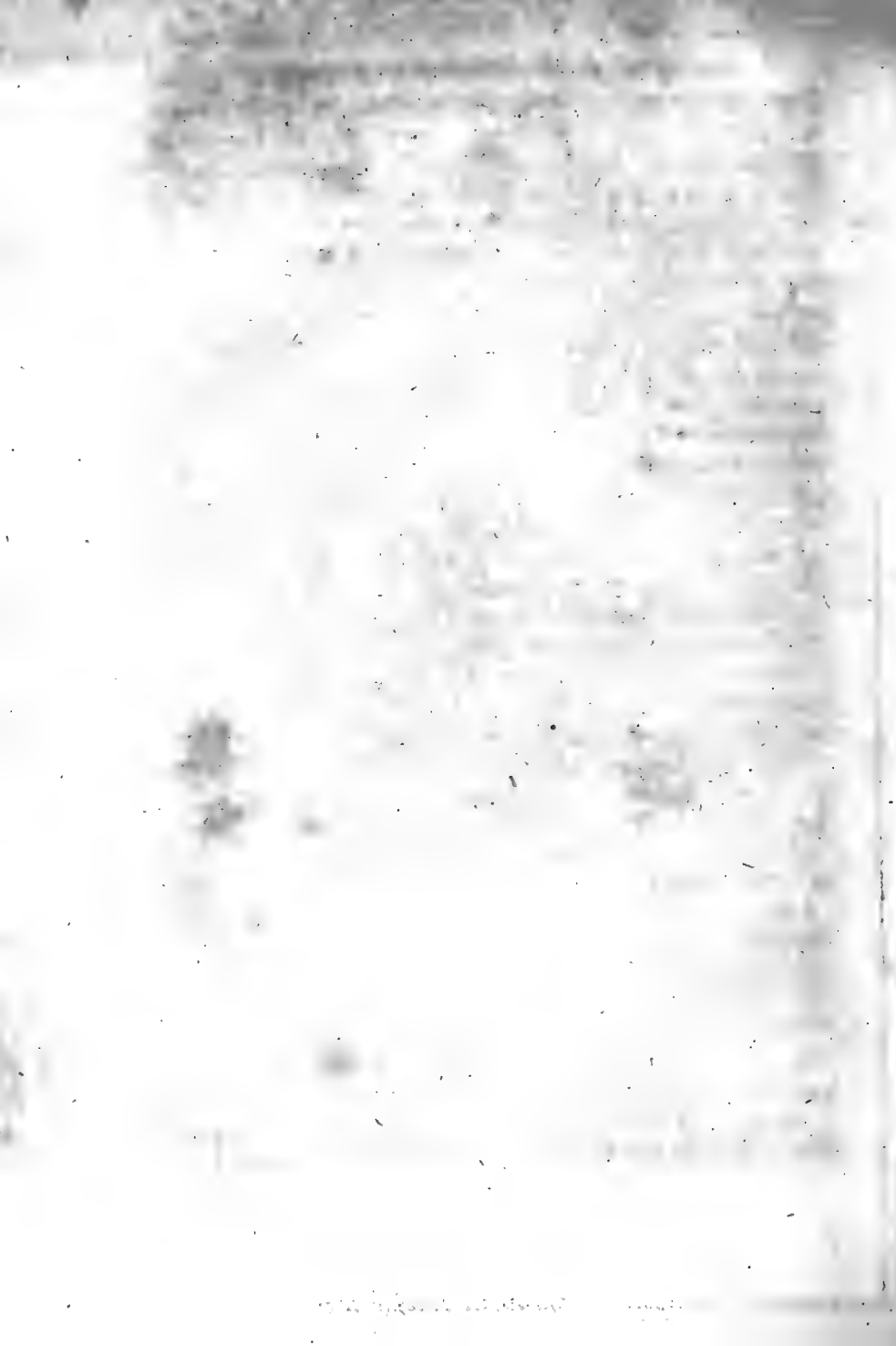


Fig. 9.





l'on eût mené les deux diagonales ; 3.^o dans chaque triangle, tel que umh , on a, mh , uh , um , dans le rapport des quantités $\sqrt{8}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, qui est le même que celui de la diagonale oblique, de l'arête & de la demi-diagonale horizontale du noyau. Je me contente d'indiquer ici ces propriétés, qu'il sera facile aux géomètres de vérifier.



M É M O I R E

SUR LA DOUBLE RÉFRACTION DU SPATH D'ISLANDE.

Par M. l'abbé HAÛY.

LA double réfraction que subissent les rayons de la lumière , en passant à travers les rhomboïdes transparens de spath calcaire , connus sous le nom de *spath d'Islande* , offroit un phénomène d'optique trop intéressant pour ne pas fixer l'attention de Newton , à qui cette partie de la physique est redevable de tant de découvertes précieuses. C'est dans les questions d'optique (*page 28 & suiv. de l'édition de Lauzanne, 1740*) , que cet illustre géomètre , après avoir déterminé , jusqu'à un certain point , les loix suivant lesquelles s'opère la réfraction de chaque partie du rayon qui se divise en deux , dans le spath d'Islande , entreprend de remonter jusqu'à la cause physique du phénomène , & déduit des résultats donnés par l'observation , l'existence d'une propriété de la lumière qui jusqu'alors n'avoit point été soupçonnée.

Huyghens avoit donné quelque temps auparavant une théorie savante & très-développée de la double réfraction du spath d'Islande (*a*) , dans laquelle il essaie d'expliquer ce phénomène , à l'aide de deux émanations différentes des ondulations produites par la pression de la lumière sur la matière éthérée qu'il supposoit renfermée dans le spath. Newton , qui avoit connoissance de cette théorie , a profité de quelques-uns des résultats qui s'y trouvent ; mais il rejette la cause physique indiquée par Huyghens , comme étant incompatible avec les effets que l'on obtient en se servant de deux rhomboïdes placés l'un au-dessus de l'autre , comme

(a) *Traité de la Lumière, pag. 48 & suiv. edit. de Leyde, 1690.*

nous le dirons plus bas. L'explication de ces effets embarrassoit Huyghens lui-même, & ce géomètre célèbre avoue, avec ingénuité, qu'il n'avoit trouvé aucune solution de cette partie du problème, qui pût le satisfaire.

La Hire, dans son mémoire sur le gypse de Montmartre (*Mém. de l'Ac. an. 1710*), parle aussi, par occasion, de la double réfraction du spath d'Islande, & il conclut de ses observations, que la réfraction extraordinaire peut être rapportée à un plan fixe qui seroit presque perpendiculaire à l'arête du rhomboïde, ce qui mèneroit à penser que le phénomène dépend de deux matières différentes dont le spath seroit composé. Le rapport des sinus d'incidence & de réfraction à l'égard de ce plan, est, suivant le même savant, à peu-près de trois à deux, comme dans le verre ordinaire.

Un travail particulier que j'ai entrepris sur la minéralogie, m'ayant conduit à faire une lecture attentive de ces différens articles, & de quelques autres relatifs au même sujet, j'y ai trouvé tant de diversité, même par rapport aux résultats qui ne concernent que les routes de la lumière dans le spath, que j'ai résolu de soumettre le tout à un nouvel examen, & d'essayer de fixer nos connoissances sur ce point important de physique.

Il m'a paru que pour lever toute incertitude, je devois chercher une marche assujettie le moins qu'il seroit possible à des observations susceptibles de ne donner que des à peu-près, & dont il faudroit ensuite déduire un résultat moyen, comme cela a lieu lorsque l'on mesure plusieurs angles, pour déterminer un rapport entre les sinus d'incidence & de réfraction. Les limites des erreurs inévitables dans ces sortes de cas, sur-tout lorsqu'on opère comme ici sur de petits objets, ne sont pas assez resserrées, pour que l'on puisse se flatter de parvenir à des résultats suffisamment approchés. C'est dans cette vue que j'ai préféré aux observations qui consistent à faire tomber un rayon de lumière sur la surface du spath, une suite d'observations immédiates

sur les circonstances que présente la duplication des points & des lignes que l'on regarde à travers le *spath* ; observations dans lesquelles , en multipliant ces points ou ces lignes , en les approchant ou en les écartant plus ou moins , on peut , ce me semble , déterminer les effets avec une précision qui laisse peu de chose à désirer.

Je me propose de prouver , dans ce mémoire , que les observations dont je viens de parler , donnent des résultats qui diffèrent sensiblement , à plusieurs égards , de ceux qui sont particuliers à Newton , & se rapprochent davantage de ceux d'Huyghens. Je me servirai des mêmes observations pour prouver généralement que l'hypothèse d'un plan fixe , admise par la Hire , doit être rejetée , & pour expliquer quelques effets particuliers relatifs à la position des images vues à travers le *spath*. Enfin je déterminerai la loi que suit la réfraction extraordinaire , dans le plan qui passe par les petites diagonales des bases du rhomboïde.

A l'égard de la cause physique du phénomène , il m'a paru qu'elle dépendoit , ainsi que l'a pensé Newton , d'une action particulière du *spath* sur les rayons de la lumière. Les différens résultats que j'établirai dans le cours de ce mémoire , conspirent en faveur de cette hypothèse , qu'il est d'autant plus important d'établir sur des preuves solides , qu'elle se présente , au premier abord , avec un air de paradoxe qui semble l'avoir fait négliger jusqu'ici , & avoir empêché les physiciens de l'envisager avec cet intérêt qu'excite naturellement tout ce qui est sorti de la plume de Newton.

Je commencerai par l'exposition des expériences à l'aide desquelles ce grand géomètre a indiqué la manière dont les rayons de la lumière se réfractent en traversant le *spath* d'Islande.

Soit $abcd$ (*fig. 1*) une tranche d'un rhomboïde de ce *spath*, prise de manière que ab , cd soient les petites diagonales de deux faces opposées , & bc , ad , les arêtes comprises entre ces diagonales a & c , étant les angles

obtus. Concevons qu'un rayon ou de lumière tombe perpendiculairement sur la diagonale ab . Ce rayon, au point d'immersion u , se divisera en deux parties uz , up , dont l'une n'éprouvera aucune réfraction, & restera sur le prolongement de ou , comme dans le cas ordinaire, & l'autre, up , s'écartera de la première, en se rapprochant de l'angle d , & en restant dans le plan $abcd$. Nous appellerons désormais la partie uz , le rayon ordinaire, la partie up , le rayon d'aberration, & la distance pz , l'amplitude d'aberration. La valeur de l'angle puz , telle que Newton l'indique, d'après les mesures d'Huyghens, est d'environ $6^d 40'$.

Si le rayon incident ik est oblique par rapport à ab , sa partie ke que je suppose être le rayon ordinaire, se réfractera dans le spath, en s'approchant de la perpendiculaire rm , de manière que le sinus de l'angle de réfraction mke , sera les $\frac{3}{5}$ du sinus de l'angle d'incidence ikr ; & sa partie kl qui sera le rayon d'aberration, se rapprochera encore de l'angle d , de manière que, suivant Newton, on aura toujours $el = pz$. Les deux rayons, après leur sortie du spath, reprendront des directions parallèles à leur première direction ik . Newton appelle *plans de réfraction perpendiculaire* les plans des triangles kle , uzp , & tous les autres semblables qui se confondroient avec $abcd$, ou lui seroient parallèles; & la partie du crystal voisine de l'angle d , est ce qu'il nomme *la région de la réfraction extraordinaire*.

Enfin si le rayon incident sort du plan $abcd$, le rayon ordinaire se réfractera toujours suivant la loi commune des réfractions, en observant le rapport $5 : 3$, pour les sinus d'incidence & de réfraction. Alors, pour avoir la position du rayon d'aberration, voici la méthode qu'indique Newton. On mènera par le point où le rayon ordinaire rencontre la base inférieure du spath, une parallèle à la diagonale cd ; puis en partant du même point, & en allant vers l'angle d , on prendra sur cette parallèle une ligne égale à pz , qui donnera l'amplitude d'aberration.

Concevons maintenant que l'on dispose l'un derrière l'autre deux rhomboïdes de spath, de manière que leurs faces homologues soient respectivement parallèles ; alors soit que ces rhomboïdes se touchent par une de leurs bases, ou qu'il y ait entr'eux un intervalle, chacun des rayons ordinaire & d'aberration qui seront sortis du premier rhomboïde, ne se décomposera plus en passant dans le second, mais s'y refractera suivant la même loi que dans le premier. Cet effet aura toujours lieu, quelle que soit la position respective des rhomboïdes, pourvu qu'ils aient leurs plans de réfraction perpendiculaire situés parallèlement les uns aux autres.

Si les deux rhomboïdes sont tellement disposés que leurs plans de réfraction perpendiculaire soient à angle droit l'un sur l'autre, alors chacun des deux rayons sortis du premier spath, restera encore simple en pénétrant le second ; mais ces rayons changeront de fonction, c'est-à-dire, que celui qui étoit rayon ordinaire dans le premier spath, se dirigera comme rayon d'aberration dans le second, & réciproquement.

Mais dans toutes les positions intermédiaires, c'est-à-dire, dans celles où les plans de réfraction perpendiculaire seront inclinés entr'eux, chacun des deux rayons sortis du premier spath, se partagera de nouveau, dans le second, en un rayon ordinaire & un rayon d'aberration, qui se dirigeront comme nous l'avons exposé ci-dessus.

Tels sont les résultats des expériences indiquées par Newton. Nous allons voir à quel point ils s'accordent avec les observations que l'on peut faire sur la duplication de l'image d'un objet vu à travers un ou deux rhomboïdes de spath d'Islande.

Imaginons un point visible u (*fig. 2*) ; situé à une distance quelconque au-dessous de la surface inférieure d'un de ces rhomboïdes. Supposons d'abord que le rayon visuel de l'observateur soit dans le plan $abcd$, & que de plus il se confonde avec une perpendiculaire ux menée du point u

sur dc . Dans ce cas, l'observateur verra une première image de l'objet dans la direction de cette même perpendiculaire, & une seconde dans la direction d'une oblique qui passeroit entre le point u & l'angle c . Cette seconde image est toujours beaucoup plus abaissée que l'autre vers la ligne cd ; nous l'appellerons désormais l'*image d'aberration*, pour la distinguer de l'autre qui portera le nom d'*image ordinaire*.

Si le rayon visuel s'écarte de la perpendiculaire suivant une direction quelconque, en restant toujours néanmoins dans le plan $abcd$, l'œil verra les deux images suivant deux obliques à la diagonale dc , mais l'image d'aberration sera toujours sur la direction d'une oblique située entre l'autre image & l'angle c ; & si l'on suppose les deux images jointes par une ligne droite, cette ligne sera toujours dans le plan $abcd$.

Toutes ces apparences s'expliquent aisément, d'après ce que nous avons dit de la double réfraction de la lumière dans le spath d'Islande. Pour saisir cette explication, il faut concevoir que le point visible u (*fig. 3*) envoie des rayons vers cd , dans toutes les directions imaginables. Parmi tous ces rayons, l'un, tel que uh , est tellement disposé, que sa partie hl considérée comme rayon ordinaire, sort du spath, suivant une ligne lo parallèle à uh , & qui aboutit à l'œil que je suppose placé en o . Quant à la partie qui donne le rayon d'aberration, elle va tomber sur quelque point situé entre l & b ; & comme après son émergence, elle suit une direction qui ne peut concourir avec lo , puisqu'elle lui est parallèle, elle sera perdue pour l'œil.

Mais il y aura un autre rayon incident, iu , situé de manière que le rayon ordinaire, im , après son émergence en m , passera par un point e , tel que l'on aura eo parallèle à ab & égale à l'amplitude d'aberration. Donc ayant mené mk égale à co , le rayon d'aberration-provenu du rayon iu , sera ik . Or ce rayon, après son émergence, doit prendre une direction parallèle à iu ; mais on a ko parallèle à me , par la construction, & me parallèle à iu , par les loix

de la réfraction. Donc le rayon ik prendra la direction ko donc il convergera vers le rayon hlo , & passera par l. prunelle; donc l'observateur verra deux images de l'objet, l'une suivant ok , & l'autre suivant ol .

On conçoit, d'après ce qui vient d'être dit sur la nécessité du concours de deux rayons incidens, pour produire dans l'œil la double image de l'objet, pourquoi l'image qui est donnée par le rayon d'aberration ok se trouve toujours plus rapprochée de l'angle obtus c que l'autre image.

Quelque direction que prenne le rayon visuel, soit en restant dans le plan $abcd$, soit en s'écartant de ce plan, l'œil verra toujours les deux images dans des positions analogues aux précédentes, à quelques différences près, dont nous parlerons dans la suite.

Si l'on suppose que le point u se rapproche continuellement de la surface dc , le point r où se croisent les rayons, descendra aussi continuellement vers la même surface, jusqu'à ce qu'enfin l'objet soit contigu à cette surface; & alors le point r se confondant avec l'objet, les deux rayons par lesquels l'œil verra les images de cet objet, seront rlo , rko .

Les résultats que nous venons d'exposer, s'accordent en général avec la disposition des rayons réfractés qui se déduit des expériences de Newton. Mais il falloit y joindre d'autres résultats qui pussent servir à déterminer avec précision la quantité des réfractions que subissent les mêmes rayons dans le spath. Voici les observations à l'aide desquelles je crois être parvenu à cette précision.

Ayant marqué sur un papier blanc plusieurs points à différentes distances les uns des autres, je regardai, à travers le spath, ces mêmes points pris deux à deux, & situés de manière qu'ils coïncidoient avec la diagonale dc , & que le rayon visuel étoit dans le plan $abcd$, & de plus perpendiculaire à la ligne dc . Je voyois alors quatre images rangées sur cette dernière ligne; mais les deux images du milieu se rapprochoient plus ou moins l'une de l'autre, suivant

suivant que la distance des deux points varioit elle-même. En tâtonnant les positions de ces points, je parvins à en marquer deux à une telle distance, que la seconde & la troisième images coïncidoient exactement, en sorte qu'au lieu de quatre images je n'en voyois plus que trois, dont celle du milieu avoit seulement une teinte plus foncée. Or cet effet provenoit nécessairement de ce que le rayon ordinaire, envoyé par une des images, coïncidoit, après son émergence, avec le rayon d'aberration envoyé par une autre image. Soient r', n , (*fig. 3*) les deux points dont il s'agit, placés à la distance convenable, de manière que l'un des deux, tel que n , se trouve dans la direction ok du rayon visuel perpendiculaire sur ab ; le point r' sera vu à l'aide du rayon ordinaire olr' & du rayon d'aberration okr , qui en doubleront l'image. Supposons maintenant le point n situé de manière que le rayon ok étant considéré comme rayon incident sur la surface ab du spath, ses deux parties, après sa division dans le spath, fussent le rayon ordinaire kn , & le rayon d'aberration kr' ; il est évident que l'une des images du point r' sera vue dans la même direction ok , que l'une des images du point n . L'œil ne verra donc que trois images dans les directions ol , ok , op .

Je cherchai ensuite le rapport de la distance $r'n$ avec la ligne dg , comprise entre l'angle d & la perpendiculaire ag abaissée sur cd . Or j'ai fait voir ailleurs (*a*) que dans le rhomboïde du spath calcaire, on avoit $ad = \sqrt{5}$, $dc = \sqrt{8}$. De plus, si l'on cherche l'expression de dg , on trouve $dg = \frac{1}{4} dc = \frac{1}{4} \sqrt{8} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ayant divisé dg successivement en un nombre plus ou moins grand de parties égales, qui me conduisoient à différentes approximations du rapport de $r'n$ avec dg , je trouvai très-sensiblement $\frac{1}{3} dg$, pour la valeur de $r'n$, & par conséquent pour celle de pz (*fig. 1*). Résolvant le triangle rectangle agn , d'après cette donnée & la valeur de

(a) Essai d'une théorie sur la structure des cristaux, p. 97.

$ag = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)}$, j'ai trouvé pour la mesure de l'angle nag , $6^d 20' (b)$.

Nous avons vu que suivant Newton, la distance entre le rayon ordinaire & le rayon d'aberration, prise sur la diagonale cd , ou parallèlement à cette diagonale, étoit une quantité constante. Cependant l'observation m'a prouvé qu'elle varioit; car si elle restoit la même, il est clair que quelqu'inclinaison que prît le rayon visuel par rapport aux deux points $r'n$, (*fig. 3*), l'œil ne devroit jamais voir que trois images; or, si ce rayon s'incline peu à peu, par exemple, vers le point b , les deux images du milieu se confondront encore assez sensiblement, tant que l'inclinaison ne sera pas considérable; mais passé un certain terme, elles se sépareront, de manière que la direction sur laquelle l'œil verra l'image d'aberration du point r' , passera à une petite distance du point k , entre ce point & le point p . Si au contraire le rayon visuel s'incline vers a , les deux images du milieu se sépareront encore, & cela de manière que l'image d'aberration du point r' passera de l'autre côté du point k , entre ce point & le point l .

Concluons de cette observation, que l'amplitude d'aberration n'est sensiblement constante que dans un champ très-limité. Lorsque le rayon visuel s'incline vers b , on conçoit qu'alors le rayon ordinaire auquel appartient le rayon d'aberration rk , s'incline lui-même de plus en plus vers la ligne cb ; & puisqu'alors l'extrémité du rayon d'aberration passe entre k & p , c'est une preuve que l'amplitude d'aberration a été en augmentant. Au contraire, lorsque le rayon visuel s'incline vers a , le rayon ordinaire auquel appartient le rayon d'aberration $r'k$, diverge de plus en plus par

(*b*) Huyghens dit que cet angle est de $6^d 40'$, & il fait l'angle nag de $19^d 3'$, & le grand angle du rhombe, de $101^d 52'$; mais en général, ce savant me paroît avoir un peu forcé les mesures des principaux angles du rhomboïde, & des autres qui en dépendent. Je crois être parvenu à des mesures plus précises, au moyen des données dont j'ai parlé au même endroit de l'ouvrage cité.

rapport à la ligne cb ; & puisque l'extrémité du rayon d'aberration passe alors entre k & l , il en résulte que l'amplitude d'aberration a été en diminuant. Si l'on veut apercevoir les images du milieu réunies en une seule, lorsque le rayon visuel est incliné soit vers b , soit vers a , il faudra donc placer les deux points r' , n , à une plus grande distance que $\frac{1}{3}dg$, pour l'inclinaison vers b , & à une moindre distance pour l'inclinaison vers a , ce qui est conforme à l'observation.

Huyghens avoit observé, d'après un procédé différent, cette variation que suit l'amplitude d'aberration, & il est singulier que Newton qui étoit si exact, & qui connoissoit les résultats d'Huyghens, s'en soit écarté sur ce point, pour y en substituer d'autres qui ne s'accordent pas avec l'observation. On a même d'autant plus lieu d'en être surpris, qu'il semble que Newton auroit dû être frappé d'une propriété remarquable de l'amplitude d'aberration découverte par Huyghens. Elle consiste en ce que si l'on mesure cette ligne relativement à deux inclinaisons égales, mais en sens contraire, d'un rayon de lumière sur la base supérieure du spath, on trouve que chacun des deux rayons d'aberration garde la même distance à l'égard du rayon qui a lieu pour l'incidence à angle droit, c'est-à-dire, de celui qui fait avec la perpendiculaire un angle de $6^d 20'$. Enfin Huyghens considérant toujours la réfraction extraordinaire comme produite par des ondes sphéroïdales, avoit déterminé, d'après les propriétés de l'ellipse, la loi que devoit suivre, selon lui, l'amplitude d'aberration, en variant sous différentes inclinaisons du rayon incident. Mais outre que cette détermination tient à une théorie qui ne paroît pas devoir être admise, j'ai trouvé que la construction d'Huyghens ne représentoit l'amplitude d'aberration que pour certains cas, & que dans ceux sur-tout où l'inclinaison du rayon incident étoit un peu considérable, elle ne satisfaisoit plus aux observations. J'ai donc cherché une autre construction qui fût à la fois plus simple & plus précise.

Soit toujours gan (fig. 4) l'angle que fait le rayon d'aberration avec la perpendiculaire ag , lorsque le rayon incident a est sur la direction de cette perpendiculaire. Soit menée gq , qui fasse un angle quelconque avec gd . Considérons deux inclinaisons égales quelconques ik , $i'k$, du rayon incident, mais prises en sens contraire. Soit menée de chaque extrémité des rayons rompus ke , ke' , une ligne er ou $e'r'$, égale & parallèle à gq , & par le point k & le point r ou r' , soit menée kl ou $k'l'$. J'ai remarqué d'abord que dans ce cas, on avoit ce résultat général, que la somme des deux distances $el + e'l'$, étoit une quantité constante égale au double de gn .

Pour le prouver, concevons que l'on applique ke' sur ke , en renversant la base $e'l'$ du triangle $e'kl'$, de manière que le point l' tombe sur le point y , de l'autre côté du rayon ke , & le point r' sur le point z . Ayant mené rz , cette ligne sera évidemment parallèle à dc , à cause de l'égalité des angles rel , zey . De plus la ligne ly sera égale à la somme des deux distances $el + e'l'$.

Or, si l'on suppose que le rayon ke change d'inclinaison, en restant fixe par son extrémité e , les lignes ky , kl , dans l'hypothèse de er , ez , constantes, resteront fixes par leurs points z , r , tandis que leurs extrémités supérieure & inférieure feront un mouvement le long des lignes ab , dc ; donc dans tous les cas on aura, $kz:ky:rz:ly$. Or il est aisé de voir qu'à cause des parallèles ab , rz , dc , le rapport $kz:ky$, sera constant; donc aussi le rapport $rz:ly$ sera constant, & puisque rz est constant, ly le sera pareillement. Mais plus le rayon ke approche d'être parallèle à la perpendiculaire km , plus aussi el approche d'être égale à ng . Donc si l'on suppose que ke diffère infiniment peu de la perpendiculaire, on pourra faire la ligne ly , ou la somme des deux lignes el , $e'l'$, égale à $2ng$; donc puisque cette somme est constante, elle sera le double de ng dans tous les cas. Ce résultat n'est autre chose que celui d'Huyghens

dont nous avons parlé plus haut, mais généralisé & ramené aux propriétés des lignes droites.

Il s'agissoit de savoir si parmi toutes les inclinaisons de *er* sur *dc*, il y en avoit une qui donnât pour *el* une quantité représentative des variations en longueur de l'amplitude d'aberration. J'ai trouvé qu'en supposant que *gq*, ou *er* prolongée, fût inclinée sur l'arête *ad*, de manière que l'angle *aue* fût égal au grand angle plan des faces du rhomboïde, c'est-à-dire, de $101^{\text{d}} 32' 13''$, ce qui donne pour l'angle *rel*, 30^{d} à moins d'une minute près, on avoit des résultats sensiblement conformes à l'observation.

Déterminons d'abord la valeur de *gq*, en supposant, pour la facilité du calcul, que *rel* soit précisément de 30^{d} . Soit abaissée *qs* perpendiculaire sur *dg*; on aura *ns* : *qs* :: *gn* : *ag*, ou *ns* : $\frac{1}{2} gq$:: $\sqrt{(\frac{1}{18})}$: $\sqrt{(\frac{2}{2})}$; donc *ns* = $\frac{1}{18} gq$. Or, à cause de l'angle *qgn* = 30^{d} , on a *gs* = $gq \sqrt{(\frac{3}{4})}$; donc réunissant les valeurs de *ns* & de *gs*, la somme sera *gn* ou $\sqrt{(\frac{1}{18})} = gq (\frac{1}{18} + \sqrt{\frac{3}{4}})$, d'où l'on tire *gq* ou *er* = $\frac{\sqrt{(18)}}{1 + \sqrt{(243)}}$.

A l'aide de cette expression, il est facile de déterminer *el*. Ayant abaissé *rh* perpendiculaire sur *ly*, nous aurons, *lh* : *hr* = $\frac{1}{2} er$:: *el* + *em* : *km*; ou,

$$lh : \frac{\sqrt{(18)}}{2 + \sqrt{(972)}} :: el + em : \sqrt{(\frac{2}{2})}; \text{ ce qui donne;}$$

$$lh = \frac{el + em}{1 + 9\sqrt{(3)}}. \text{ D'ailleurs } eh = gq \sqrt{(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{(54)}}{2 + \sqrt{(972)}}.$$

Réunissant les valeurs de *eh* & de *lh*, on a,

$$el = \frac{\sqrt{(54)}}{2 + \sqrt{(972)}} + \frac{el + em}{1 + 9\sqrt{(3)}}, \text{ d'où l'on tire, } el = \sqrt{(\frac{1}{18})} + \frac{em}{\sqrt{(243)}}. \text{ Si l'on cherche la valeur de } el, \text{ on trouvera}$$

$$el = \sqrt{(\frac{1}{18})} = \frac{em}{\sqrt{(243)}}; \text{ donc en général l'expression}$$

de l'amplitude d'aberration est $\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)} \pm \frac{e^m}{\sqrt{(243)}}$, le signe négatif étant pris pour le cas où l'amplitude va en diminuant.

D'après cette donnée, j'ai déterminé la valeur de l'angle d'incidence sous lequel un point l (*fig. 1*) seroit vu à sa vraie place, à l'aide du rayon d'aberration kl , c'est-à-dire, qu'alors ce rayon seroit sur la direction prolongée du rayon visuel; & j'ai trouvé que l'angle d'incidence, dans ce cas, étoit de $16^d 22'$, valeur qui diffère de $18'$ en moins, de celle qu'Huyghens a déterminée par les propriétés de l'ellipse. Or l'angle dag étant de $18^d 27'$, on voit qu'il s'en faut d'environ 2^d que le rayon kl ne soit parallèle à ad .

Pour vérifier la loi que je viens d'exposer, j'ai employé un procédé analogue à celui qu'Huyghens avoit imaginé pour mesurer les angles d'incidence & de réfraction des rayons par lesquels on voit la double image d'un objet à travers le spath. Un exemple fera concevoir facilement ce procédé. Ayant décrit sur un papier le parallélogramme $abcd$ (*fig. 1*), dans lequel le côté ab étoit égal à l'arête du rhomboïde que je voulois employer, puis ayant mené par un point quelconque pris sur ab , la ligne km perpendiculaire sur dc , j'ai tracé ik qui faisoit avec kr l'angle d'incidence ikr , égal à 35^d ; j'ai mené ensuite le rayon ordinaire kl , faisant avec km un angle de $20^d 7'$, qui est celui que donne le rapport $3 : 5$, des sinus. De plus, ayant trouvé, à l'aide de l'équation $el = \sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)} \pm \frac{e^m}{\sqrt{(243)}}$, & des autres données que fournit le rhomboïde, que l'angle lkm devoit être de $26^d 36'$, j'ai mené kl qui faisoit avec km un angle de cette valeur. Enfin, j'ai prolongé ik , jusqu'à ce qu'elle rencontrât cd , ce que je suppose avoir lieu au point f .

Cela fait, j'ai tracé sur un papier à part une droite sy (*fig. 5*), que j'ai coupée par trois perpendiculaires zf ,

xl, te , telles que les distances sl, le , fussent les mêmes que dans la *fig. 1*. J'ai disposé ensuite le rhomboïde, de manière que l'angle solide aigu de la base inférieure fût en deçà du point s , & que es coïncidât avec la petite diagonale de cette même base. Puis faisant en sorte que mon rayon visuel restât dans le plan $abcd$ (*fig. 1*), ce que je reconnoissois à ce que l'image de la ligne es (*fig. 5*) paroissoit simple, j'ai incliné l'œil, en le retirant vers y , jusqu'à ce que l'image ordinaire de la ligne te , coïncidât avec la ligne sz vue sans réfraction. J'étois assuré alors que le rayon visuel faisoit l'angle d'incidence de 35^d , comme on en jugera aisément par la comparaison des deux *figures 1 & 5*. Mais alors je voyois les deux images du milieu, savoir, l'image ordinaire de te , & l'image d'aberration de lx , concourir en une seule; d'où j'ai conclu que l'amplitude d'aberration étoit égale à el (*fig. 1*), & avoit la même valeur que celle qui est donnée par le calcul, d'après la loi indiquée. J'ai varié cette expérience de plusieurs manières, en donnant différentes inclinaisons au rayon visuel, & il m'a toujours paru que le résultat de l'observation étoit conforme à celui du calcul.

Non-seulement l'amplitude d'aberration n'a point une longueur constante, ainsi que l'avoit pensé Newton, mais elle ne reste point parallèle à la petite diagonale du spath; car si cela étoit, quelle que fût la position du rayon visuel, soit qu'il restât dans le plan $abcd$ (*fig. 1*), soit qu'il s'en écartât à droite ou à gauche, on pourroit toujours disposer deux points dans la direction de la petite diagonale, ou d'une parallèle à cette diagonale, de manière que les deux images du milieu se confondissent en une seule. Pour le prouver, soit $aebf$ (*fig. 7*) la base supérieure du spath; $mpog$ la base inférieure; a, o , les plus grands angles solides; n un point situé sur la diagonale om ; s une position quelconque de l'œil qu'il faut seulement concevoir situé de manière que le rayon ordinaire scn venu du point n , soit oblique à l'égard du plan $aebf$. Si l'on supposoit un

rayon de lumière qui tombât sur le spath, suivant la direction sc , il se diviserait dans le spath en deux rayons, l'un ordinaire cn , & l'autre d'aberration, qui, dans l'hypothèse du parallélisme, iroit tomber quelque part en r , sur la ligne om . Concevons maintenant un second point marqué en r . Il est clair que rcs seroit le rayon d'aberration, à l'aide duquel l'œil placé en s verroit l'une des deux images du point r ; donc des quatre images, il y en auroit deux qui seroient vues à la fois sur la direction sc , dans le cas où rn représenteroit l'amplitude d'aberration.

Mais il est impossible de faire concourir les deux images du milieu en une seule, lorsqu'on laisse les points r, n , tous deux sur la petite diagonale. Voici ce que j'ai observé à cet égard. Concevons que le rayon visuel d'abord incliné vers b , & situé dans le plan des deux diagonales ab, mo , fasse, en allant de b vers f , un mouvement conique, de manière que restant toujours dans la même inclinaison à l'égard de la base supérieure du spath, & étant fixe à son point d'émergence, il parcourt par son extrémité supérieure la circonférence de la base d'un cône, dont l'axe seroit une perpendiculaire au point d'émergence. A mesure que ce rayon s'écartera de la première direction, l'observateur ne pourra voir coïncider les deux images du milieu, qu'en plaçant les points r, n sur une direction inclinée à la diagonale. Supposons que le point r reste fixe; il faudra placer le point n à la droite de la diagonale mo , comme en z . Tandis que le rayon visuel s'approchera de plus en plus d'un plan qui couperoit à angle droit le plan $abom$, la distance nécessaire entre le point z & la petite diagonale augmentera. Elle sera la plus grande possible, lorsque le rayon visuel se trouvera dans le plan dont nous venons de parler. Au-delà de ce plan, en allant de f vers a , il faudra diminuer la distance de z à mo , en laissant toujours le point z sur une oblique, telle que rz , qui diverge du côté de o , à l'égard de la petite diagonale. Plus le rayon visuel s'approchera du point a , & plus cette distance décroîtra, jusqu'à

jusqu'à ce qu'enfin elle devienne nulle, lorsque le rayon visuel tombera de nouveau, en sens contraire, sur le plan des deux petites diagonales. Si ce rayon continue sa révolution vers p , les mêmes effets auront lieu dans un ordre opposé, c'est-à-dire, que pour faire coïncider les deux images du milieu, il faudra placer le point n de l'autre côté de la diagonale.

Si l'on conçoit les deux rayons qui se confondent en allant vers l'œil, comme ne formant qu'un seul faisceau qui tomberoit sur la surface du spath, pour y subir les deux réfractions, il est facile de voir que le rayon ordinaire provenu de ce faisceau, ira aboutir en z , & son rayon d'aberration en r . Concluons de-là que si un rayon de lumière tombe obliquement sur la surface du spath, hors du plan des deux diagonales, & si, par l'extrémité inférieure du rayon ordinaire, on mène une parallèle à la petite diagonale, l'amplitude d'aberration divergera par rapport à cette parallèle, en allant vers le petit angle solide m du spath.

Cette conséquence m'a paru conduire à expliquer la différence des distances auxquelles on aperçoit, à travers le spath, les deux images d'un même objet par rapport à l'œil, celle qui provient du rayon d'aberration, étant, comme je l'ai dit, sensiblement plus éloignée que l'autre. Voici le raisonnement sur lequel est fondée cette explication.

Les rayons à l'aide desquels on voit un point lumineux placé derrière un milieu diaphane, forment un cône dont la base est contiguë à la surface du milieu la plus voisine de l'œil; & au-dessus de cette surface, ils se replient vers l'œil par l'effet de la réfraction, en formant un cône tronqué, dont la plus petite base se confond avec la base du premier cône, & dont l'autre base qui est plus dilatée, a un diamètre égal à celui de la prunelle par laquelle les rayons entrent dans l'œil.

Quelqu'opinion que l'on adopte sur la distance précise à laquelle on aperçoit l'image vue par réfraction, il est

certain que , toutes choses égales d'ailleurs , cette distance est plus grande , lorsque les deux diamètres des bases du cône tronqué formé par les rayons qui sont dirigés vers l'œil , diffèrent moins entr'eux , ce qui fait que le sommet du même cône , prolongé par l'imagination derrière la surface réfringente , est plus éloigné de cette surface.

Cela posé , soit $aebf$ (fig. 6) la base supérieure d'un rhomboïde de spath sous lequel est un point visible placé sur la petite diagonale de la base inférieure ; soit a le grand angle solide. Supposons l'œil situé de manière que rts soit la circonférence de la prunelle , & que le rayon visuel se trouve dans le plan des petites diagonales des bases du spath. Concevons que le cône de rayons qui part du point visible , & à l'aide duquel l'œil aperçoit l'image ordinaire de ce point , ait pour base le cercle gho ; ce cercle sera en même temps la petite base du cône tronqué qui est formé par les rayons rompus , & qui a pour base supérieure rts . Or si nous considérons , par exemple , les deux rayons du cône intérieur , qui aboutissent en g & en o , il est facile de voir , d'après ce qui a été dit plus haut , que les rayons d'aberration qui leur correspondent , doivent se trouver aux extrémités n, l , de deux lignes gn, ol , obliques par rapport à la diagonale ab ; car on peut considérer les rayons rompus au-dessus de la surface réfringente , savoir , gr, nr, os, ls , comme autant de rayons visuels particuliers , dont l'effet est le même que si l'œil étoit mû de manière que le centre de la prunelle se trouvât successivement en r & en s . Or , dans ce cas , l'œil verroit du point r , les deux images sur une ligne gn oblique par rapport à ab , & il les verroit du point s , sur une autre oblique ol , inclinée en sens contraire.

Concluons de-là , que les loix suivant lesquelles se réfractent les rayons d'aberration , tendent à rendre la distance nl entre deux de ces rayons , pris de deux côtés opposés , plus grande que la distance go des deux rayons ordinaires correspondans , & par conséquent à élargir la

base inférieure du cône tronqué, formé par les rayons d'aberration qui vont vers l'œil. Donc si l'on suppose ce cône prolongé derrière la surface réfringente, le point de son axe relativement auquel toutes les directions se compensent, & que Newton appelle *le centre d. radiation* (*a*), doit se trouver plus reculé par rapport à l'œil & à la surface réfringente, que le point correspondant qui appartient aux rayons ordinaires. Donc le lieu de l'image d'aberration, qui dépend de la position du centre de radiation, sera aussi plus éloigné que celui de l'image ordinaire.

Si l'on conçoit que le rayon visuel soit situé de l'autre côté du spath, vers le point *a*, on aura des conclusions analogues, en appliquant le même raisonnement que nous venons de faire.

Si le rayon visuel sort du plan des deux petites diagonales, & se rejette de côté, de manière que, par exemple, il passe entre les points *b, f*, alors *c' g' o'* étant la base inférieure du cône tronqué, les lignes *g' n'*, *o' l'*, s'inclineront du même côté; mais la ligne *o' l'* s'écartera davantage que la ligne *g' n'* de la direction parallèle à *ab*, d'où il suit que l'on aura encore *n' l'* plus grande que *g' o'*, quoique dans un moindre rapport que quand le rayon visuel étoit dans le plan des deux diagonales. L'image d'aberration paroîtra donc aussi, dans ce cas, au-delà de l'image ordinaire, par rapport à l'œil; mais la différence des distances sera moins sensible que dans le cas précédent, ce que l'observation m'a paru confirmer. Ainsi les résultats qui rectifient la théorie de Newton, relativement à la direction de l'amplitude d'aberration, servent à rendre raison de certains phénomènes qui sans cela sembleroient inexplicables.

Nous avons vu que l'angle d'incidence du rayon visuel, sous lequel l'image d'aberration seroit aperçue dans le prolongement de ce rayon, étoit à peu-près de $16^{\text{d}} \frac{1}{2}$, d'où

il suit que s'il y avoit un plan à l'égard duquel les sinus d'incidence & de réfraction du rayon d'aberration fussent en rapport constant, ce plan s'abaisseroit au dessous de la base supérieure du rhomboïde, en faisant avec elle un angle $\angle k y$ (*fig. 2*), d'environ $16^{\circ} \frac{1}{2}$. Huyghens a trouvé que ce rapport étoit variable. La Hire le croyoit constant, ainsi que nous l'avons dit, & à peu-près égal à celui des mêmes sinus dans la réfraction produite par le verre commun. Quoiqu'il ne soit pas difficile de voir que la loi établie plus haut, relativement à la réfraction du rayon d'aberration, exclut l'hypothèse d'un plan fixe, admise par ce savant & par quelques autres, cependant comme ce point est très-intéressant par rapport à la théorie, j'ai cherché à l'éclaircir par une méthode qui n'exigeant aucune mesure d'angle, ne fût point sujette aux petites erreurs d'observations qui peuvent laisser de l'incertitude sur le résultat. Je crois y être parvenu, à l'aide de la démonstration suivante, uniquement fondée sur un fait qui n'est point équivoque, c'est-à-dire, sur l'augmentation en longueur de l'amplitude d'aberration dans un sens, & sa diminution dans le sens contraire, quelle que soit d'ailleurs la loi de cette variation.

Concevons que le rayon incident ik (*fig. 1*) se meuve autour de la perpendiculaire kr , de manière à décrire la surface d'un cône droit dont cette perpendiculaire soit l'axe; le prolongement inférieur de ce rayon décrira en même tems, autour de km , la surface d'un second cône opposé par le sommet & semblable au premier. Soit thq (*fig. 8*) la base de ce second cône, prise sur la base inférieure du rhomboïde; soit m le pied de la perpendiculaire km (*fig. 1*), & s le pied de la perpendiculaire sur le plan auquel se rapporte, par l'hypothèse, la réfraction du rayon d'aberration.

Supposons d'abord que l'extrémité supérieure i (*fig. 1*) du rayon incident, soit dans la perpendiculaire élevée du point q (*fig. 8*) sur le plan thq ; l'extrémité inférieure du même rayon prolongé tombera évidemment sur le point h ,

situé du côté opposé, sur la grande diagonale de la base du rhomboïde. Supposons de plus que e soit l'extrémité inférieure du rayon réfracté ordinaire. Ayant décrit du point m , pris comme centre, & de l'intervalle me , la circonférence ecz , il est clair que, pendant la révolution du rayon incident & de son prolongement, l'angle d'incidence étant constant, le rayon ordinaire tombera toujours sur un point de cette circonférence.

Maintenant, l'extrémité inférieure du rayon incident étant toujours en h , tirons par le point e la ligne te parallèle à ms , & menons hs . Dans l'hypothèse d'un plan fixe pour la réfraction extraordinaire, il est clair que le rayon d'aberration, qui doit se trouver sur le même plan que le rayon incident dont le prolongement aboutit en h , & que la perpendiculaire terminée en s , tombera sur quelque point de la ligne hs ; & si l'on suppose pour un instant, que l'amplitude d'aberration soit parallèle à ms , le rayon d'aberration aura son extrémité au point l .

Si le rayon incident prend d'autres positions quelconques, de manière que son prolongement inférieur tombe en h' ou en h'' , on trouvera, par une construction semblable à la précédente, que l'extrémité du rayon d'aberration, dans la même hypothèse, doit toujours se trouver sur un point l' ou l'' , situé dans l'intersection de la ligne $h's$ ou $h''s$ avec une parallèle à la ligne ms .

Cela posé, les triangles hel & hms étant semblables, on aura, $hm : ms :: he : el$. On trouvera de même, pour les triangles $h'e'l'$, $h'ms$, $h'm : ms :: h'e' : e'l'$. Or dans toutes ces proportions, les trois premiers termes étant constants, le quatrième terme el le sera aussi. Maintenant, dans toutes les positions du rayon incident que nous venons de considérer, l'amplitude d'aberration s'écarte à la vérité du parallélisme avec ms , d'après ce qui a été dit plus haut, & tombe sur quelque point g, g', g'' , situé à la gauche de el . Mais en même temps plus el approche de coïncider avec la diagonale fx , & plus aussi l'amplitude d'aberration

approche de se confondre avec la constante $e l$, en sorte que quand l'extrémité du rayon incident tombe en f ou en x , l'amplitude d'aberration se trouve exactement sur la ligne $f x$.

Il suit de-là que dans l'hypothèse d'un plan fixe, la constante $e l$ est la limite de l'amplitude d'aberration. Par conséquent, si l'on fait $c u$ & $d i$ égales chacune à $e l$, ces deux lignes représenteront les amplitudes d'aberration relatives à deux inclinaisons égales du rayon incident, prises de deux côtés opposés & situées dans le plan $a b c d$ (fig. 1). Or l'observation donne évidemment $d i$ plus courte que $c u$, comme nous l'avons vu plus haut; donc l'hypothèse d'un plan fixe est inadmissible, d'après cette seule condition que le rayon réfracté soit sur le même plan que le rayon incident & la perpendiculaire, ce qui est bien éloigné de suffire, puisqu'il resteroit à prouver que le rapport des sinus d'incidence & de réfraction est constant. Cette démonstration, comme l'on voit, est générale, & a également lieu, quelle que soit la position du plan auquel on voudroit rapporter la réfraction du rayon d'aberration.

Je passe maintenant aux effets produits par la superposition de deux rhomboïdes. Supposons d'abord que ces rhomboïdes aient leurs faces homologues respectivement parallèles. Dans ce cas, soit qu'on les écarte l'un de l'autre ou qu'on les mette en contact par leurs bases, l'œil ne verra que deux images de l'objet, qui seulement seront plus écartées l'une de l'autre que s'il n'y avoit qu'un seul rhomboïde.

Cette expérience prouve que les rayons qui sortent du premier rhomboïde, pour passer dans le second, ne se soudifient plus en traversant celui-ci; car si cela étoit, l'œil verroit quatre images de l'objet, l'une produite par un rayon qui feroit, dans les deux spaths, la fonction de rayon ordinaire; une seconde, par un rayon qui feroit, dans les deux spaths, la fonction de rayon d'aberration; une troisième, par un rayon ordinaire dans le spath

inférieur, devenu rayon d'aberration dans l'autre spath, & enfin, une quatrième par un rayon qui présenteroit le cas inverse du précédent : mais, au contraire, les rayons sortis du premier spath demeurant simples en traversant le second, l'œil ne peut voir que deux images de l'objet, à l'aide de deux rayons, l'un ordinaire & l'autre d'aberration, dont chacun fera la même fonction dans les deux spaths, ce qui s'accorde avec le résultat de Newton, exposé vers le commencement de ce Mémoire.

Si l'on place les deux rhomboïdes de manière que les arêtes *ad*, *de*, & *bc*, *cf*, (*fig. 9*) des quadrilatères *abcd*, *dcfe*, fassent, d'une part, un angle saillant, & de l'autre, un angle rentrant, auquel cas les plans de réfraction perpendiculaires seront toujours parallèles, l'œil ne verra encore que deux images, pourvu toutefois que le rayon visuel ne soit pas trop incliné ; car si on lui fait prendre une direction très-oblique, & qui de plus soit dans un plan incliné à celui qui passe par les petites diagonales des bases, l'œil verra quatre images. Cette circonstance, comme on le voit, fait exception au résultat de Newton, & prouve qu'il n'est pas rigoureusement vrai que, dans le cas présent, les rayons sortis du premier spath ne se divisent plus en passant dans le second.

Si les deux rhomboïdes ont des hauteurs égales, & que le rayon visuel étant dans le plan du quadrilatère *abcd*, le point visible *t* soit aussi dans ce plan, l'œil ne verra qu'une seule image, au lieu de deux. Car soit *o* la position de l'œil, *trnko* la route d'un rayon ordinaire qui porteroit à l'œil une image du point *t*, la partie *rn* aura pour rayon d'aberration, dans le spath inférieur, la ligne *rl*, située de manière que *ln* soit d'amplitude d'aberration. Imaginons que la partie *ok*, considérée comme un faisceau de rayons incidens, fournisse aussi un rayon d'aberration au spath supérieur, ce rayon sera évidemment *kl* ; donc le rayon *rl*, en passant dans le spath supérieur, prendra la direction *lk*, & après son

émergence, se confondra avec la partie ko ; donc l'œil ne verra qu'une seule image de l'objet, suivant la direction ok .

Si les plans de réfraction perpendiculaire sont à angle droit les uns sur les autres, de manière que les diagonales des bases adjacentes se coupent aussi à angle droit, l'œil ne verra encore que deux images, pourvu que le rayon visuel ne soit pas trop oblique, ou ne le soit que dans un certain sens : car soit $afbe$ (*fig. 10*) la base supérieure du rhomboïde de dessous, $ilmn$ la base supérieure de l'autre rhomboïde; soit a le grand angle solide du premier, & l celui du second. Si le rayon visuel passe entre les points i , n , & qu'il soit incliné sous un angle très-aigu, l'œil verra quatre images, dont les deux nouvelles seront seulement plus foibles que les autres, ce qui annonce une seconde soudivision des rayons dans le passage d'un rhomboïde à l'autre, & par conséquent fait une nouvelle exception aux résultats de Newton.

Enfin, si les deux rhomboïdes ont leurs plans de réfraction perpendiculaire, dans quelque une des positions comprises entre le parallélisme & l'angle droit, l'œil verra, en général, quatre images du même point. Supposons, pour mieux développer l'observation, que le rayon visuel soit perpendiculaire aux bases des spaths, ou qu'il n'ait que l'inclinaison convenable; supposons de plus que les plans de réfraction perpendiculaire étant d'abord à angle droit l'un sur l'autre, comme le représente la *figure 10*, on fasse tourner peu à peu le rhomboïde supérieur, en sorte que le point m , par exemple, qui étoit sur la même ligne que les points a , b , s'avance vers le point f (*fig. 11*). Lorsque ce rhomboïde aura fait un certain mouvement, on commencera à apercevoir deux nouvelles images, d'abord très-foibles, qui augmenteront d'intensité, à mesure que le rhomboïde continuera sa révolution. Ces images jointes aux deux premières, seront disposées aux quatre angles d'un quadrilatère dont la figure est variable, suivant la position des rhomboïdes. En même temps

temps les deux premières images s'affoibliront insensiblement, en sorte qu'il y aura un terme où les quatre images auront la même intensité. Passé ce terme, si le rhomboïde supérieur continue de se mouvoir circulairement, les deux nouvelles images augmenteront toujours d'intensité, les autres s'affoibliront de plus en plus, jusqu'à ce qu'on ne voye plus que les deux premières; ce qui arrivera avant que le rhomboïde supérieur ait achevé un quart de révolution, c'est-à-dire, avant que le point *m* soit arrivé sur la même ligne que les points *f*, *e*. Alors, si l'on poursuit le mouvement du rhomboïde supérieur, de manière à compléter la demi-révolution, on aura de nouveau des effets tout semblables aux précédens. Ce fait important pour la théorie, présente cependant aussi une circonstance qui tend à modifier les résultats de Newton. Car les choses étant dans l'état où les représentent la *figure 11*, de manière que le grand angle solide à la base inférieure du rhomboïde de dessous soit en *a*, & celui à la base inférieure de l'autre rhomboïde au point *l*, si le rayon visuel s'incline sous un certain angle, de manière qu'il passe entre les points *i*, *e*, l'œil ne verra plus que deux images; d'où il suit que, dans ce cas, les rayons sortis du premier spath restent simples en pénétrant le second.

Parmi les différentes manières dont on peut varier l'expérience qui vient d'être citée, il en est une qui m'a paru digne de remarque; voici en quoi elle consiste. Les deux rhomboïdes étant disposés comme dans le cas précédent, & l'œil étant placé de manière à apercevoir distinctement quatre images, je prends une bande étroite de carte, terminée en pointe aiguë; je l'insère doucement entre les bases adjacentes des deux spaths, jusqu'à ce que la pointe paroisse plongée dans l'une des deux images que j'apercevois lorsque les deux spaths avoient leurs faces homologues disposées semblablement. J'observe qu'alors la seconde image de la même pointe correspond exactement à l'une des deux nouvelles images produites par le changement de position

du spath supérieur. Cette observation prouve que chacune des deux parties d'un rayon qui s'est sous-divisé en pénétrant un premier spath, & dont l'une fait l'office de rayon ordinaire, & l'autre celui de rayon d'aberration, se sous-divise dans le second spath situé convenablement, précisément comme si elle étoit envoyée par un point lumineux placé à l'endroit de son immersion dans ce spath.

On voit par tout ce qui précède, que les résultats indiqués par Newton, tant sur la division des rayons qui pénétrèrent successivement les deux spaths, que sur la grandeur & la direction de l'amplitude d'aberration, ne sont pas exactement conformes aux observations. Cela n'empêche pas que les conséquences qu'il en tire par rapport à la cause physique des phénomènes, ne paroissent s'appliquer en général aux véritables résultats.

Cet illustre géomètre considère les rayons de la lumière, comme des espèces de prismes à quatre pans, dont deux opposés entr'eux, & qu'il appelle *pans de réfraction extraordinaire*, ont des propriétés différentes de celles des deux autres pans. Ces propriétés sont telles, que quand l'un ou l'autre des pans de réfraction extraordinaire se trouve tourné vers la région de cette même réfraction que nous avons dit être située dans le voisinage du petit angle solide, la substance propre du spath exerce sur lui une action particulière, qui l'attire vers ce même angle. Au contraire, si c'est l'un des deux autres pans qui soit tourné vers la région de la réfraction extraordinaire, les rayons auxquels appartiennent ces pans, subiront la réfraction ordinaire.

Or les différens rayons d'un même faisceau qui tombe sur la surface d'un spath, ayant leurs pans diversement tournés, de manière que les uns sont disposés pour subir l'action qui détermine la réfraction ordinaire, & les autres pour subir celle d'où dépend la seconde réfraction, il s'ensuit que ce faisceau, à son immersion dans le spath, doit se diviser en deux parties, dont chacune éprouvera l'espèce de réfraction analogue à sa position.

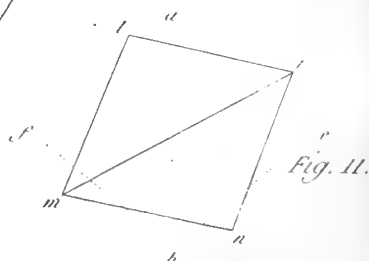
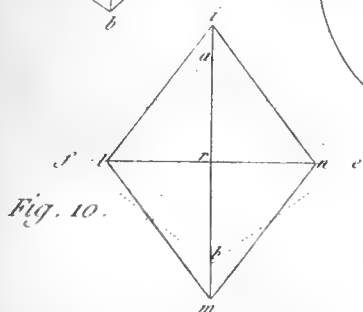
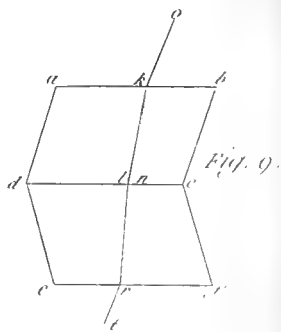
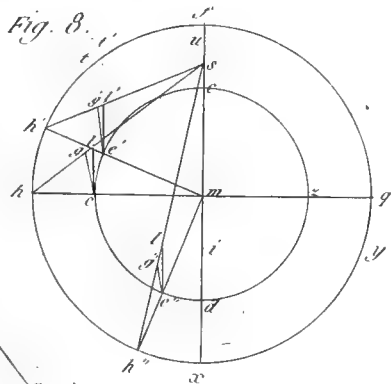
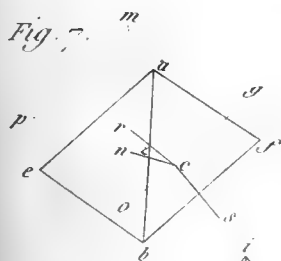
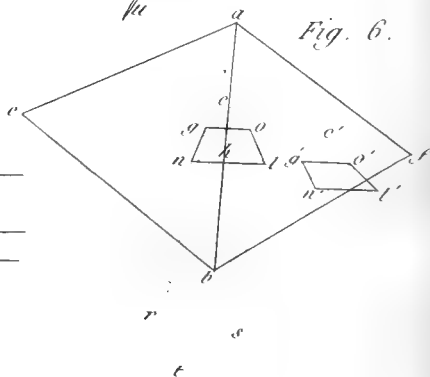
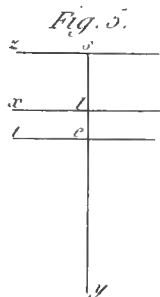
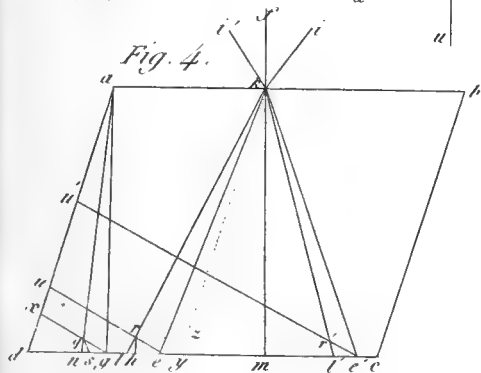
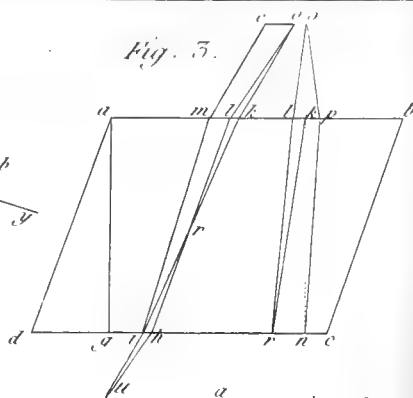
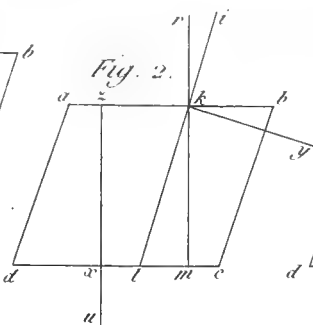
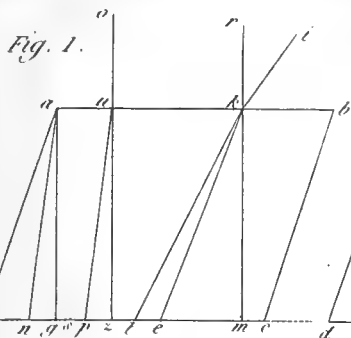
L'existence de ces propriétés, suivant Newton, dérive nécessairement des phénomènes qui ont lieu, lorsque l'on dispose deux spaths l'un au-dessus de l'autre, de manière que leurs pans de réfraction perpendiculaire soient successivement parallèles, ou à angle droit, ou inclinés l'un sur l'autre. Car dans le premier cas, les rayons qui étoient attirés vers la région de la réfraction extraordinaire du spath inférieur, ayant un de leurs pans analogues à cette réfraction, tourné vers la même région dans le spath supérieur, soit que les angles solides des deux spaths se trouvent situés semblablement, ou à contre-sens, ces rayons ne subiront encore dans le second spath que la réfraction extraordinaire. Quant aux autres rayons, il est visible qu'ils se trouvent situés dans les deux spaths, de manière à y subir la réfraction ordinaire.

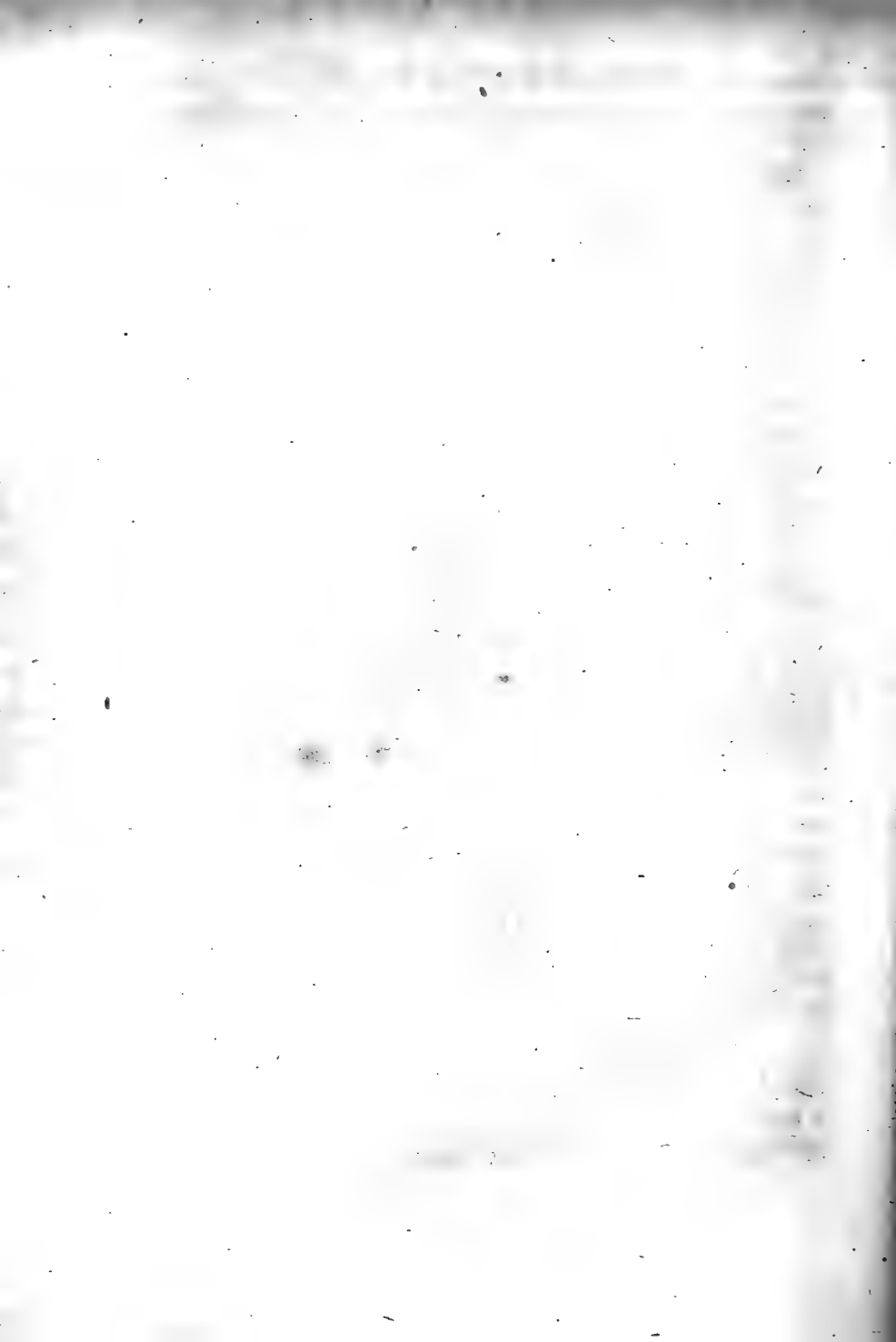
Dans le second cas, les rayons qui étoient attirés vers la région de la réfraction extraordinaire du spath inférieur, ayant ceux de leurs pans qui sont analogues à cette réfraction, situés à angle droit par rapport à la région de la réfraction extraordinaire dans le spath supérieur, n'y subiront que la réfraction ordinaire, & le contraire aura lieu pour les autres rayons.

Enfin, dans le troisième cas, les rayons qui tendoient vers la région de la réfraction extraordinaire dans le spath inférieur, ayant ceux de leurs pans qui sont susceptibles de cette réfraction, situés dans une position-moyenne par rapport au spath supérieur, l'effet qui en résulte doit participer des deux extrêmes; c'est-à-dire, qu'une partie des rayons de chaque faisceau sera attirée vers la région de la réfraction extraordinaire, & une autre partie subira la réfraction ordinaire; d'où il suit qu'alors le faisceau se divisera de nouveau dans le spath supérieur, comme s'il partoît d'un point visible placé à l'endroit de son immersion dans le même spath. Il en faut dire autant des rayons qui s'étoient réfractés à l'ordinaire dans le premier spath.

Les expériences que j'ai faites sur la duplication des images, s'accordent, en général, comme je l'ai dit, avec cette explication. Il y a sur-tout une circonstance qui m'a paru bien remarquable, dans celle qui consiste à faire tourner le rhomboïde supérieur au-dessus de l'autre; c'est la gradation d'intensité que l'on observe entre les images, dont les deux nouvelles sont d'abord à peine visibles, puis se renforcent peu à peu, à mesure que l'on fait mouvoir circulairement le spath supérieur, tandis que les deux premières images s'affoiblissent en passant par des degrés contraires, jusqu'à ce qu'elles disparaissent entièrement. Ces effets semblent indiquer que le rayon d'aberration, dont les pans de réfraction extraordinaire étoient d'abord exactement tournés vers la région de la même réfraction, dans le spath supérieur, se sous-divise peu à peu, à mesure que pendant le mouvement de ce spath, la région de la réfraction extraordinaire change de position, en sorte que les molécules du rayon, qui d'abord obéissoient toutes à-la-fois à l'action émanée de cette même région, échappent les unes après les autres à cette action, pour subir la réfraction ordinaire. Le contraire arrive par rapport à l'autre rayon, qui avoit ses pans de réfraction extraordinaire à angle droit sur la région de la même réfraction; car les pans dont il s'agit se trouvant peu à peu dans une position plus favorable à l'égard de cette région, pendant la révolution du spath, subissent les uns après les autres l'action qui en émane, & le rayon finit par être tout entier dans le cas de l'aberration.

Nous avons vu cependant que les effets qui viennent d'être expliqués d'après les principes de Newton, étoient sujets à certaines déviations, en sorte que quand les rayons tomboient très-obliquement sur les surfaces réfringentes, une partie de chaque faisceau échappoit à la loi qui eût agi sur elle dans le cas d'une moindre obliquité. Je me propose d'examiner dans un plus grand détail ces espèces d'exceptions, & en même temps de faire des recherches





ultérieures pour déterminer la loi que suit l'amplitude d'aberration dans tous les plans qui s'écartent de la section principale, faite sur les petites diagonales des bases. Mais j'ai cru devoir, en attendant, communiquer à l'Académie un travail dont les résultats, sans donner l'entière solution du problème, m'ont paru du moins propres à éclairer la route qui doit y conduire.



*E X T R A I T**D E S**OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES,**Faites par ordre de Sa Majesté,**A l'Observatoire royal, en l'année 1788.*

*M. le Comte DE CASSINI, Directeur.**M.^{rs} NOUET, DE VILLENEUVE & RUELLE, Élèves.*

I N T R O D U C T I O N.

L'ON a employé cette année les mêmes instrumens pour les observations, les mêmes méthodes & les mêmes élémens pour les calculs, que ceux qui ont été décrits dans les extraits précédens. La reconstruction totale des voûtes de l'observatoire ayant entraîné des réparations considérables dans toutes les parties de l'édifice, qui ne pourront être entièrement achevées que vers le milieu de l'année 1790, il a fallu démonter tous nos ateliers & renoncer absolument à la construction projetée des instrumens. Nous avons donc pris le parti, pour ne point perdre l'intervalle précieux de quatre années, de commander au-dehors les nouveaux instrumens. Nous attendons de jour en jour une grande lunette des passages, que le célèbre M. Ramsden nous annonce devoir incessamment nous parvenir, & à la construction de laquelle il nous assure avoir mis toute la perfection de travail dont

il est capable, c'est assez dire que cet instrument doit être un chef-d'œuvre. Le même artiste a déjà aussi commencé pour l'observatoire royal un grand cercle entier tournant, d'une construction toute nouvelle. Nous donnerons une description détaillée de ces deux instrumens aussitôt que nous en serons possesseurs.

En attendant, nous avons fait usage pour l'observation des passages, de notre lunette méridienne de trois pieds & demi de foyer; mais son ouverture qui n'est que de vingt-deux lignes, ne nous permet d'observer que très-peu d'étoiles en plein jour, & très-rarement Mercure : c'est la raison pour laquelle on trouve si peu d'observations de cette planète dans nos extraits; à la vérité, les mauvais temps y contribuent encore plus que le peu de force de la lunette.

Le grand quart-de-cercle mobile de six pieds avec lequel nous déterminons les hauteurs méridiennes des astres, est un instrument d'autant plus précieux pour nous, que l'usage que l'on en fait à l'observatoire royal depuis quarante - six ans, a mis à portée de le mieux connoître. Lorsqu'en 1778, après avoir entrepris de calculer & de comparer toutes les observations faites avec ce quart - de - cercle depuis 1743, je publiai dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, page 484, le premier fruit de ce travail considérable, la détermination de la quantité absolue de l'obliquité de l'écliptique & celle de ses variations; les résultats ne se trouvant pas tout-à-fait d'accord soit avec les opinions, soit avec les observations de quelques astronomes, on n'hésita point de rejeter toute la différence sur l'erreur de notre instrument. On se crut d'autant mieux fondé à le taxer d'imperfection, que sa construction étoit ancienne, que sa carcasse étoit en fer, beaucoup plus simple, beaucoup plus légère, tout autrement disposée enfin que celle des instrumens modernes. Moi-même je crus prudent de ne chercher à défendre mon

instrument qu'après lui avoir fait subir toutes les vérifications qui pouvoient assurer son exactitude ou l'infirmier. J'y fis même porter une nouvelle division tout à côté de l'ancienne; & ce ne fut qu'après plusieurs années de comparaisons, d'observations & de vérifications multipliées, que je me crus en droit d'assurer la bonté de l'instrument & l'exactitude de ses résultats. (Voyez *Mém. Ac. année 1782, page 281.*) J'insistai même sur la supériorité que devoit donner à cet instrument l'application de deux lunettes fixes, l'une à l'extrémité & l'autre au milieu du limbe, ce qui donne l'avantage d'observer la hauteur du même astre sur différens points de la division, & avec deux lunettes différentes qui se vérifient tantôt l'une par l'autre, tantôt séparément, & donnent ainsi des résultats doubles & triples, comme si l'on employoit deux ou trois instrumens différens. Je ne connois que l'instrument de l'observatoire royal qui ait cet avantage, & j'ai lieu de m'étonner qu'on ne le procure pas à tous les grands instrumens mobiles, auxquels je crois devoir donner la préférence sur les autres, par la facilité que l'on a de les vérifier fréquemment, & comme je ne manque pas de le faire, dans les différentes saisons de l'année. Ces vérifications nombreuses & répétées m'ont fait reconnoître qu'il n'y a peut-être pas un aussi grand inconvénient qu'on pourroit l'imaginer à composer la carcasse des instrumens en fer. Je fais tous les raisonnemens que l'on peut faire à ce sujet, tout ce que l'on peut dire contre l'emploi de deux métaux différens dans la construction du même instrument; je conviens même qu'il est plus sûr de n'y employer que le même métal pour toutes les parties. Mais la pratique, mais l'expérience me montrent que dans le grand quart-de-cercle mobile de l'observatoire, dont la carcasse est en fer & le limbe en cuivre, la position des lunettes n'éprouve aucune variation sensible de l'hiver à l'été, & que cet instrument dans tous les temps donne les

mêmes

mêmes résultats (1). Enfin l'exactitude de notre instrument une fois reconnue, j'en tire une conséquence bien importante pour l'art de la construction, c'est que la multiplicité des barres d'assemblage que l'on met dans la carcasse des instrumens modernes, par lesquelles on croit assurer leur solidité, est pour le moins inutile (2); on ne pourra en effet se refuser de le croire, comme ce que j'ai avancé plus haut, si je prouve que le quart-de-cercle mobile de six pieds de l'observatoire royal, fait & divisé il y a quarante-sept ans par le sieur Langlois, dont la carcasse est en fer & le limbe en cuivre, & qui n'a que quatre rayons d'assemblage, donne les mêmes résultats que les instrumens modernes les plus grands & les plus parfaits.

Mon père, dans son dernier ouvrage intitulé *Description géométrique de la France*, a déjà fait connoître (page 187) une comparaison des différens arcs de notre quart-de-cercle mobile

(1) Il faut faire attention que dans les observatoires où l'on prend quelque soin des instrumens, où ils sont renfermés dans des cabinets bien clos, à l'abri des injures & des fortes impressions de l'air, le froid, la chaleur & les variations de la température ne parviennent à eux que très-atténués & *graduellement*, d'une manière en cela fort différente de celle que les physiciens emploient pour soumettre les métaux à leurs expériences sur la dilatation, d'où il pourroit arriver que les résultats qu'ils en tirent ne fussent nullement applicables à l'état & aux circonstances où se trouvent nos instrumens. Je ne prétends pas cependant révoquer en doute l'effet de la chaleur & du froid, mais je crois qu'il est beaucoup moindre sur nos instrumens bien soignés, bien abrités, qu'on voudroit se faire craindre. Je pense même que dans la détermination des hauteurs des astres, la plus grande source

d'erreur, la cause de ces différences qui se remarquent quelquefois dans les résultats de l'observation, c'est plus que toute autre chose l'inégalité des réfractions causée par les variations très-fréquentes de l'atmosphère dont les différentes couches changent d'état selon la force, la direction & même la qualité de certains vents qui eux-mêmes sont différens à diverses élévations. La multitude d'observations que font à l'observatoire, dans le cours d'une année, trois & quatre observateurs sans cesse en activité, a donné lieu à plusieurs remarques intéressantes à ce sujet, que nous ferons connoître lorsqu'une plus longue expérience les aura confirmées ou rectifiées.

(2) Peut-être même plus nuisible qu'avantageuse, en augmentant la masse des instrumens, la difficulté de leur assemblage, & offrant plus de pièces & de surfaces à l'effet de la dilatation, tel qu'il soit.

avec ceux d'un grand quart-de-cercle mural de six pieds & demi de rayon construit par le célèbre Bird, acquis par M. Bergeret, & placé à l'école royale militaire. En voici les résultats.

E N M A I 1783.			MURAL MOBILE		DIFFÉR.
			de	de	
			l'École Milit.	l'Observatoire.	
			D. M. S.	D. M. S.	S.
Distances	{ entre α de la Lyre	& π du Sagittaire.	59. 53. 48	59. 53. 50	2
		& <i>Syrus</i>	54. 59. 20	54. 59. 18	2
		& <i>Arcturus</i>	18. 15. 56	18. 15. 58	2
	{ entre π du Sagitt.	& α de la Couronne.	48. 45. 58	48. 46. 1	3
		& α de la Vierge..	30. 19. 29	30. 19. 29	0
	{ entre <i>Arcturus</i> ...	& la Chèvre....	25. 26. 10	25. 26. 13	3

Voici encore une comparaison de notre instrument avec celui de l'observatoire de Greenwich ; elle résulte des déclinaisons des mêmes étoiles que M. Maskelyne & nous avons déterminées & publiées chacun de notre côté.

ÉTOILES.	DÉCLINAISON MOYENNE AU 1. ^{er} JANVIER 1788.						DIFFÉR.
	Selon M. Maskelyne			Selon Nous.			
	D.	M.	S.	D.	M.	S.	
							Sec.
Aldebaran.....	16.	4.	8	16.	4.	4	+ 4
<i>Arcturus</i>	20.	17.	33	20.	17.	35	- 2
<i>Regulus</i>	12.	59.	47	12.	59.	50	- 3
<i>Syrus</i>	16.	26.	13	16.	26.	13	- 0
α Balance.....	15.	8.	56	15.	8.	59	- 3
α Bélier.....	22.	27.	9	22.	27.	5	+ 4
α Couronne.....	27.	26.	18	27.	26.	18	+ 0
α Orion.....	7.	21.	11	7.	21.	9	+ 2
α Vierge.....	10.	2.	57	10.	2.	53	+ 4
β Lion.....	15.	45.	27	15.	45.	29	- 2
β Vierge.....	2.	57.	37	2.	57.	35	+ 2

Je n'étendrai pas plus loin la comparaison & l'apologie de notre instrument, d'autant que publiant comme nous le faisons chaque année un catalogue étendu des hauteurs méridiennes telles que nous les observons, tout astronome pourra examiner, discuter & comparer nos observations avec les siennes.

Il me reste à dire un mot de notre pendule. Nous étant aperçu de quelques irrégularités dans celle dont nous nous étions servi pendant le cours de 1787, nous y en avions substitué, au mois de septembre, une nouvelle construite exprès & avec soin par un de nos meilleurs artistes. Pendant les sept premiers mois, la marche de cette pendule a été de la plus grande régularité. Mais au mois de mai la chaleur a un peu changé son mouvement, & nous avons reconnu dès-lors, ainsi qu'on le verra par le tableau mis à la fin de cet extrait, qu'elle étoit un peu trop sensible aux variations de la température. A la vérité, comme nous avons l'attention de ne jamais laisser passer un seul jour favorable sans vérifier notre pendule & par le soleil & par les étoiles, ses moindres variations nous sont connues, & il n'en peut résulter d'erreur dans la réduction des observations, d'autant que nous n'avons rapporté dans cet extrait aucune de celles qui se sont trouvées trop éloignées d'une vérification de la pendule. Mais d'après cette sensibilité reconnue dans notre horloge aux variations de la température, nous avons dû craindre que dans les froids excessifs qui ont régné pendant les cinq dernières semaines de l'année, son mouvement n'éprouvât, du jour à la nuit, des irrégularités difficiles à saisir & à déterminer, c'est ce qui nous a engagés à supprimer une grande partie des observations faites dans ces circonstances, comme moins dignes de confiance que les autres.



HISTOIRE PHYSIQUE

DE L'ANNÉE 1788.

IL a plu les huit premiers jours de *Janvier*, & régné jusqu'au 11 un très-grand vent qui a été suivi de plusieurs jours de brouillards, accompagnés de petites gelées; le vent a repris ensuite & il a fait assez vilain temps jusqu'à la fin du mois. La température a été douce pour la saison.

Il a tombé de la neige dans le mois de *Février*, mais en petite quantité; elle a fondu presque aussitôt. Depuis le 12 jusqu'à la fin du mois il a plu tous les jours, excepté les 18 & 19. En conséquence, la température a été humide, mais peu froide.

Il y a eu beaucoup de pluie & de vent les dix premiers jours & les dix derniers du mois de *Mars*. De la neige le 2 & le 10, & de fréquens brouillards du 15 au 28. A quelques petites gelées près dans le commencement du mois, la température, sur-tout depuis le 20, a été très-douce; il y a même eu des éclairs & du tonnerre le 22. L'aurore boréale du 28 a été peu considérable.

Les pluies & les grands vents ont régné pendant les huit premiers jours du mois d'*Avril*. Il a tombé de la grêle mêlée de neige le 4 & le 5; le temps ensuite a été assez beau jusqu'au 22, & les quatre derniers jours du mois, on a observé trois aurores boréales. Le 1.^{er}, le 29 & le 30, qui ont été peu considérables.

Les quatorze premiers jours du mois de *Mai* ont été très-beaux, très-secs & très-chauds, à l'exception du 9 où il y a eu grêle, tonnerre & pluie très-abondante; mais ensuite il a tombé tous les jours de la pluie du 15 au 22 (excepté le 20) & les quatre derniers jours du mois. Le tonnerre & le grand vent ont été fréquens. Dans l'intervalle du 22 au 28 où il a fait assez beau, on a observé deux aurores boréales, l'une le 24, l'autre le 25: celle du 24 a duré depuis dix heures un quart jusqu'à onze heures trois quarts; elle s'étendoit de l'ouest au nord-ouest, des jets de lumière d'un rouge fort vif s'élevoient jusqu'au pôle: celle du 25,

ainsi qu'une autre observée le 2 de ce mois, étoit très-foible. La température de ce mois a été très-chaude.

Les quatorze premiers jours du mois de *Juin* ont été beaux, mais dans le reste du mois il n'y a pas eu un seul jour sans pluie; cependant la chaleur a été forte du 14 au 21, & il a tonné fréquemment dans cet intervalle. On a observé le 16 un arc-en-ciel lunaire, dont les couleurs étoient foibles; on distinguoit cependant très-bien le rouge à la convexité de l'arc, & une couleur verdâtre à sa concavité.

Le 13 de *Juillet* sera long-temps mémorable par le fléau dont il a été l'époque, & qui a causé dans une grande partie de la France de si affreux ravages. Le 3 de ce mois, jour de nouvelle lune, le ciel fut beau toute la matinée, mais fort orageux après midi. A 7^h 40' du soir il tomba de la grêle dont plusieurs grains avoient jusqu'à dix lignes de diamètre; à onze heures du soir il y eut une aurore boréale, mais foible. Du 5 au 10, c'est-à-dire, tout le reste du quartier il n'y eut pas un jour sans pluie. Le 11 il fit assez beau, le thermomètre monta à 24^d,8. Le 12 par un temps couvert la chaleur fut encore plus forte & le thermomètre s'éleva jusqu'à 26^d,8. Sur les huit heures du soir il éclaira beaucoup & l'on entendit plusieurs coups de tonnerre; le reste de la soirée fut assez beau, & le baromètre qui se soutenoit presque toujours depuis le commencement du mois vers vingt-huit pouces zero ligne n'annonçoit rien de particulier, puisqu'à dix heures du soir il baissa à peine d'une ligne. Le lendemain 13 au matin, le ciel fut obscurci de toute part; vers les huit heures un vent violent soufflant de l'ouest, fut accompagné de coups de tonnerre & une grêle épouvantable commença à se répandre. Au centre & au midi de la capitale il n'en tomba que des grains fort ordinaires, noyés dans une averse abondante qui dura depuis huit heures & demie jusqu'à neuf heures & demie; mais au faubourg Saint-Antoine la grosseur de la grêle fut exorbitante & a tout fracassé. Heureux si ce désastre ne se fût pas étendu au-delà; mais arrivé à Paris après avoir traversé le Poitou, la Touraine, la Beauce. le pays Chartrain, il a continué sa funeste route à travers l'Isle-de-France, la Picardie & la Flandre. Ce n'est pas ici le lieu de

donner ces détails aussi curieux qu'effrayans des redoutables effets de cette grêle mémorable; l'Académie royale des Sciences se propose d'en rendre compte au public. Le lendemain de cet orage & les huit jours suivans, il fit un fort beau temps; il n'y eut même dans le reste du mois que cinq jours de pluie, & l'atmosphère n'en fut pas refroidie. Une aurore boréale assez belle eut lieu le 30.

Le temps a été assez beau les onze premiers jours du mois d'*Août* & les cinq derniers, excepté le 31; du 11 au 18 & du 20 au 27 il a été pluvieux. L'aurore boréale du 23 a commencé vers huit heures du soir & a fini vers les dix heures; elle étoit composée de dix-huit jets de lumière, dont quatre d'un rouge-pâle, le reste d'un blanc-terne.

Il a fait généralement assez beau pendant le mois de *Septembre*, si ce n'est du 17 au 23 où il y a eu beaucoup de vent, de pluie & du tonnerre. Le 4 on a aperçu quelques jets d'aurore boréale.

Le mois d'*Octobre* a été très-beau & très-sec, le ciel presque toujours pur du 7 au 21. De deux aurores boréales qui ont eu lieu le 12 & le 31, la première étoit très-belle; elle a été précédée & suivie de brouillards & de vapeurs assez forts.

Le beau temps du mois d'*Octobre* s'est prolongé dans le mois de *Novembre*; l'on a presque toujours joui du ciel le plus pur, à l'exception de très-peu de jours, tels que les 11, 12 & 13, où il régna un brouillard très-épais. Vers le 14 de ce mois, le thermomètre commença à descendre fréquemment au-dessous de zero, mais ce ne fut que le 24 où commença à s'établir ce froid si long & si rigoureux, qui rendra cette année mémorable dans l'histoire météorologique. Le 26 il tomba un peu de neige, la nuit suivante le thermomètre descendit à 9^d, 7, & le 28 matin à 11^d, 3; le 30 le froid parut beaucoup diminué, le thermomètre à midi revint presque à zero. La température a été douce & très-sèche dans la première moitié de ce mois, très-froide dans la seconde. Les brouillards ont été assez fréquens; les eaux de la Seine excessivement basses à cause de la sécheresse de l'automne, ont été prises de glace dès le 29.

La gelée qui avoit été déjà si longue dans le mois de *Novembre*, s'établit encore plus constamment dans le mois de *Décembre*. Un

seul jour, le 25, le thermomètre ne descendit pas au-dessous de zero. Dès le 10 de ce mois il parvint à $11^{\text{d}},7$ au-dessous du terme de la glace; le 18 à $14^{\text{d}},2$; les neuf jours suivans le froid parut vouloir diminuer, mais le 28 il se ranima, & les quatre derniers jours du mois le thermomètre descendit à $11^{\text{d}}, 11^{\text{d}},6$; $14^{\text{d}},6$ & $17^{\text{d}},4$: ce dernier terme eut lieu le 31 au matin & fut le plus grand froid que l'on éprouva cette année, & que l'on eût même éprouvé depuis long-temps. La neige qui tomba fréquemment s'accumula sur la terre, & au moyen de l'humidité des brouillards fréquens & de l'intensité du froid, forma une couche de glace des plus épaisses.

Il résulte de tout ce que nous venons de rapporter, & des tableaux météorologiques qui suivront cet article, qu'à la suite d'un hiver très-doux, nous avons eu cette année un printemps sec & chaud, un automne encore plus sec, terminé par le froid le plus long & le plus rigoureux qu'on eût éprouvé depuis longues années

R É S U L T A T S G É N É R A U X

des Observations météorologiques de l'année 1788.

1788.	PLUS GRANDE.	PLUS PETITE.	VARIATION annuelle.	
HAUTEUR du Baromètre.	28 ^{pouc.} 9 ^{lig.} , 1, le 16 Janvier.	26 ^{pouc.} 10 ^{lig.} , 5, le 21 Février.	2 ^{pouc.} 10 ^{lig.} , 6,	Jours de pluie.... 149. Jours de neige.... 18. Jours de gelée,... 67.
HAUTEUR du Thermomètre exposé à l'air libre.	+ 26 ^d , 8 le 12 Juillet.	— 17 ^d , 4 le 31 Décembre.	44 ^d , 2	Quantité d'eau tombée dans l'année, 17 ^{pouc.} 2 ^{lig.} , 0.
Au fond des caves.	+ 9,47 en Novembre.	+ 9,41 en Février.	0,06	
VARIAT. DIUR de l'aiguille aimant. suspendue à un fil de soie.	20', 5 en Avril.	8', 2 en Janvier.	12', 3	Déclinaison de l'aiguille aimantée, le 1 ^{er} Juin.... 21 ^d 40'. Inclinaison..... 71 ^d , 1.

72 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
JANVIER.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 9^{lign.} 1, le 16, à 10^h du matin.</p> <p>Plus petite hauteur. 27^{pouc.} 2^{lign.} 9, le 3, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Dix jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 1^{pouc.} 4^{lign.} 8.</p>	<p>Plus grande hauteur + 8^{d.} 4, le 2, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Plus petite hauteur — 2^{d.} 0, le 16, à 8^h du matin.</p> <p>Dix jours de gelée.</p>	<p>S.</p> <p>N. N. E.</p> <p>S. O.</p>	<p>Dix-neuf jours de grand vent, principalement les 2, 5, 6, 8, 10, 14, 18, 24, & 25.</p> <p>Brumes & brouillards assez fréquens, particulièrement les 1, 11 & 28.</p> <p>Le 19, pluie mêlée de grêle.</p>
FÉVRIER.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 3^{lign.} 8, le 12, à midi.</p> <p>Plus petite hauteur 26^{pouc.} 10^{lign.} 5, le 21, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Dix-neuf jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 2^{pouc.} 3^{lign.} 6.</p>	<p>Plus grande hauteur + 9^{d.} 3, le 28, à midi.</p> <p>Plus petite hauteur — 1^{d.} 6, le 2, à 7^h $\frac{1}{2}$ du matin.</p> <p>Quatre jours de gel.</p> <p>Trois jours de neige</p>	<p>E.</p> <p>O.</p> <p>S. S. E.</p>	<p>Six jours de grand vent, particulièrement les 3, 21, 22 & 24.</p> <p>Six jours de brouillards, particulièrement les 4 & 6.</p>
MARS.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 1^{lign.} 9, le 29, à 10^h du soir.</p> <p>Plus petite hauteur 27^{pouc.} 3^{lign.} 2, le 22, à 5^h du soir.</p> <p>Dix-sept jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 1^{pouc.} 4^{lign.} 9.</p>	<p>Plus grande hauteur + 11^{d.} 7, le 31, à 2^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Plus petite hauteur — 1^{d.} 5, le 4, à 7^h du matin.</p> <p>Quatre jours de gel.</p> <p>Deux jours de neige.</p>	<p>N. O.</p> <p>N. E.</p> <p>S.</p>	<p>Onze jours de grands vents, particulièrement le 3, le 30 & le 31.</p> <p>Cinq jours de brouillards, particulièrement le 20.</p> <p>Tonnerre le 22.</p> <p>Aurore boréale le 28.</p>

TABLEAU

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
AVRIL.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 5^{lig.}, 7, le 9, à 10^h du matin.</p> <p>Plus petite hauteur 27^{pouc.} 8^{lig.}, 3, le 3, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Quatorze jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 0^{pouc.} 5^{lig.} 6.</p>	<p>Plus grande hauteur + 20^{d.}, 3, le 30, à 2^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Plus petite hauteur + 0^{d.}, 5, le 5, à 6^h $\frac{1}{2}$ du matin.</p> <p>Un jour de gelée.</p> <p>Deux jours de neige.</p>	<p>O. N. O.</p> <p>N. N. O.</p> <p>O.</p>	<p>Dix jours de grand vent, particulièrement les 1 & 3.</p> <p>Brume assez forte le 14.</p> <p>Grêle & neige les 4 & 5.</p> <p>Aurore boréale les 1, 29 & 30.</p>
MAI.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 4^{lig.}, 4, le 22, à 5^h du matin.</p> <p>Plus petite hauteur 27^{pouc.} 8^{lig.}, 5, le 29, à 2^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Douze jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 2^{pouc.} 7^{liges}, 9.</p>	<p>Plus grande hauteur + 22^{d.}, 1, le 26, à 1^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Plus petite hauteur + 6^{d.}, 5, le 16, à 6^h du matin.</p>	<p>N. N. E.</p> <p>N. E.</p> <p>S. E.</p>	<p>Cinq jours de grand vent, particulièrement le 3.</p> <p>Grêle le 9 & le 16.</p> <p>Tonnerre les 6, 9, 18, 19, 28, 29, 30 & 31.</p> <p>Aurore boréale les 2, 24 & 25.</p>
JUIN.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 3^{lig.}, 7, le 5, à 10^h du soir.</p> <p>Plus petite hauteur 27^{pouc.}, 10^{lig.}, 0, le 24, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Vingt-un jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 2^{pouc.} 10^{liges}, 9.</p>	<p>Plus grande hauteur 23^{d.}, 7, le 18, à 2^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Plus petite hauteur 9^{d.}, 1, le 8, à 9^h du soir.</p>	<p>N. N. E.</p> <p>Calme.</p> <p>S. O.</p>	<p>Cinq jours de grand vent.</p> <p>Brume assez forte le 21.</p> <p>Tonnerre les 3, 15, 16, 17, 18, 20 & 21.</p> <p>Arc-en-ciel lunaire le 16.</p>

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
JUILLET.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 3^{lig.}, 5, le 31, à 2^h $\frac{1}{2}$ du matin.</p> <p>Plus petite hauteur 27^{pouc.} 4^{lig.}, 7, le 3, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Seize jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 1^{pouc.} 4^{lig.}, 2.</p>	<p>Plus grande hauteur + 26^{d.}, 8, le 12, à midi.</p> <p>Plus petite hauteur + 9^{d.}, 2, le 25, à minuit.</p>	<p>O. S. O.</p> <p>S. S. O.</p> <p>O. N. O.</p>	<p>Tonnerre les 3, 4, 12 & 13.</p> <p>Grêle le 3 & particu- lièrement le 13, jour fatal où elle a causé de si grands ravages dans une partie de la France.</p> <p>Auroré boréale les 3 & 30.</p>
AOÛT.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 5^{lig.}, 6, le 3, à 2^h du matin.</p> <p>Plus petite hauteur 27^{pouc.} 8^{lig.}, 5, le 14, à 2^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Treize jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 2^{pouc.} 1^{lig.}, 0.</p>	<p>Plus grande hauteur + 19^{d.}, 9, le 21, à midi.</p> <p>Plus petite hauteur + 10^{d.}, 2, le 7, à 5^h du matin.</p>	<p>N. N. E.</p> <p>S. O.</p> <p>O.</p>	<p>Neuf jours de grand vent, particulièrement le 5.</p> <p>Tonnerre les 11 & 12.</p> <p>Auroré boréale le 23.</p>
SEPT.	<p>Plus grande hauteur 28^{pouc.} 2^{lig.}, 9, le 12, à 2^h du matin.</p> <p>Plus petite hauteur 27^{pouc.} 7^{lig.}, 2, le 20, à 9^h du soir.</p> <p>Quinze jours de pluie.</p> <p>Eau tombée, 2^{pouc.} 2^{lig.}, 5.</p>	<p>Plus grande hauteur + 21^{d.}, 3, le 5, à 2^h $\frac{1}{2}$ du soir.</p> <p>Plus petite hauteur + 6^{d.}, 7, le 25, à 6^h du matin.</p>	<p>S. S. E.</p> <p>N. N. E.</p> <p>S. S. O.</p>	<p>Neuf jours de grand vent, particulièrement les 19, 20 & 21.</p> <p>Tonnerre les 18 & 19.</p> <p>Auroré boréale le 4.</p>

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
OCTOBRE.	Plus grande hauteur 28 ^{pouc.} 5 ^{lig.} , 6, le 31, à 9 ^h du soir.	Plus grande hauteur + 16 ^{d.} , 0, le 2, à 2 ^h $\frac{1}{2}$ du soir.	S. O.	Six jours de grand vent, particulièrement les 8 & 9.
	Plus petite hauteur 27 ^{pouc.} 8 ^{lig.} , 5, le 16, à 9 ^h $\frac{1}{2}$ du soir.	Plus petite hauteur + 14 ^{d.} , 2, le 21, à 5 ^h du matin.	N. N. E.	Sept jours de brouillards, particulièrement les 5 & 16.
	Quatre jours de pluie. Eau tombée, 0 ^{pouc.} 0 ^{lig.} , 4.		N. N. O.	Aurores boréales les 12 & 31.
NOVEMB.	Plus grande hauteur 28 ^{pouc.} 7 ^{lig.} , 8, le 24, à 10 ^h du soir.	Plus grande hauteur + 14 ^{d.} , 3, le 3, à 2 ^h $\frac{3}{4}$ du soir.	E.	Brouillards épais les 11, 12, 13, 27 & 29.
	Plus petite hauteur 27 ^{pouc.} 9 ^{lig.} , 5, le 10, à 7 ^h du matin.	Plus petite hauteur — 11 ^{d.} , 3, le 28, à 7 ^h $\frac{1}{2}$ du matin.	O. N. O.	
	Cinq jours de pluie. Eau tombée, 0 ^{pouc.} 2 ^{lig.} , 6.	Dix-huit jours de gelée. Un jour de neige.	N.	Un peu de neige le 26.
DÉCEMB.	Plus grande hauteur 28 ^{pouc.} 4 ^{lig.} , 1, le 23, à 9 ^h $\frac{1}{2}$ du soir.	Plus grande hauteur + 2 ^{d.} , 9, le 24, à 2 ^h du soir.		Cinq jours de grand vent, particulièrement les 5, 7 & 8.
	Plus petite hauteur 27 ^{pouc.} 3 ^{lig.} , 5, le 14, à 5 ^h du soir.	Plus petite hauteur — 17 ^{d.} , 4, le 31, à 7 ^h $\frac{1}{2}$ du matin.		Brouillard considérable les 12, 19, 20 & 23.
	Trois jours de pluie. Eau tombée, 0 ^{pouc.} 1 ^{lig.} , 6.	Trente jours de gelée. Dix jours de neige.		Aurore boréale le 23.

HISTOIRE CÉLESTE

DE L'ANNÉE 1788.

CETTE année n'a offert d'autre événement astronomique qu'une éclipse de Soleil qui a eu lieu le 4 juin, mais que le mauvais temps a empêché d'observer à Paris; l'apparition de deux comètes découvertes, l'une en France, par M. Messier, vers la fin de novembre, l'autre en Angleterre, par M^{rs} Herschel, vers la fin de décembre. Ces deux comètes n'ont pu être aperçues qu'avec le secours des lunettes; la dernière sur-tout étoit fort difficile à voir, & l'on n'en a pu faire à Paris qu'un très-petit nombre d'observations. Enfin une occultation de Jupiter par la Lune, observée le 14 mars, & dont on trouvera les circonstances dans le cours de cet extrait.

Nous avons apporté cette année une attention particulière à chercher dans les premiers jours de chaque nouvelle lune, l'apparence de volcan annoncée par M. Herschel, & dont nous avons parlé avec détail l'année dernière, & il a été tenu registre également des époques où cette apparence a été remarquée, & de celles où elle n'a point été visible, quoique les circonstances fussent favorables; voici un extrait de ces observations.

Le 13 mars, M. Nouët a aperçu très-distinctement, & observé pendant une heure, dans la partie obscure de la Lune, une lumière très-pâle & blanche, qui de temps en temps devenoit plus vive, puis disparoissoit quelquefois entièrement; le lendemain & les jours suivans, on n'a rien aperçu: mais au mois d'avril suivant, dès le 8, c'est-à-dire, deux jours après la nouvelle Lune, cette apparence a été aperçue comme une petite nébulosité; & le lendemain 9, par le temps le plus favorable, toutes les taches brillantes de la Lune s'apercevant à travers la lumière cendrée, on voyoit au milieu de la nébulosité pointiller une petite lumière vive & qui n'étant pas très-éloignée d'Héraclide,

faisoit douter si elle partoît d'Ariflarchus ou d'Ecphantus. Le 11, même apparence, mais plus foible, parce que la partie éclairée de la Lune commençoit à être assez considérable; mais après la nouvelle Lune de juillet, d'octobre & de décembre, quoique les circonstances fussent également favorables qu'en août, on n'a pu rien distinguer de cette apparence. Nous continuerons ces observations à chaque lunaïson où les circonstances seront favorables; & ce ne fera qu'après les avoir long-temps répétées, que l'on pourra peut-être parvenir à reconnoître la nature & la cause de cette apparence.

LE SOLEIL.

Une seule éclipse de Soleil devoit être visible à Paris, celle du 4 juin, mais une pluie presque continuelle pendant le temps de cette éclipse, a empêché de la voir.

Au mois de mars on a observé

La hauteur méridienne du bord }
supérieur du Soleil, le 19 Mars, } $41^{\circ} 16' 45'',9$.

D'où l'on conclut

La déclinaison du centre du Soleil $0^{\circ} 10' 6'',6$

L'heure de l'équinoxe, le 19 Mars, à $10^h 14' 43$

Au mois de juin, avec une seconde lunette fixée sur le quart de-cercle mobile de 6 pieds à $49^{\circ} 25' 58'',4$, on a observé les hauteurs méridiennes du bord supérieur du Soleil vers le solstice, ainsi qu'il suit.

	HAUTEURS marquées sur le limbe.			HAUTEUR du bord supér. du Soleil.			RÉDUCT. au Solstice.		Demi - diam. du Soleil.			HAUTEUR solsiciale du centre du ☉.				
	D.	M.	S.	D.	M.	S.	M. S.		M. S.			D.	M.	S.		
Juin.																
16	24.	15.	56,4	64.	49.	58,0	+	3.	53,7	—	15.	47,3	Réfraction.	64.	37.	40,8
18	24.	18.	46,0		52.	47,6		1.	8,2		15.	47,2	— 27",2			45,0
20	24.	19.	51,9		53.	53,5		0.	1,4		15.	47,1	Parallaxe.			44,2
23	24.	18.	26,5		52.	28,1		1.	27,6		15.	47,0	+ 3",6			45,1
25	24.	15.	25,4		49.	27,0		4.	28,9		15.	46,9				45,8

Par un milieu, $64^{\circ} 37' 44'',2$

Hauteur de l'équateur (a).....		41 ^d	9' 48",9
Donc, {	obliquité de l'écliptique <i>apparente</i>	23	27 56,2
	Nutation.....	+	2,2
	obliquité de l'écliptique <i>moyenne ou vraie</i> ...	23	27 58,4

Remarquons en passant que cette obliquité de l'écliptique s'accorde à 3",2 près avec celle que nous avons déterminée en 1786 avec le même instrument, mais en employant une autre lunette fixée à l'extrémité de l'arc, & qui donnoit les hauteurs du Soleil au point du limbe éloigné de celui-ci de 40^d; ce qui détruit entièrement les soupçons que l'on avoit élevés sur l'exactitude de notre instrument, ne faisant point attention sans doute que lorsque deux lunettes différentes fixées sur le même instrument & qui se vérifient chacune séparément, donnent avec le plus grand accord la même hauteur des mêmes astres sur des points différens du limbe, il est impossible de supposer ni erreurs dans la division, ni changement de figure dans l'instrument, puisque c'est précisément dans diverses positions & sur divers points de la division que se remarque l'accord dans les résultats.

Au mois de septembre on a observé

La hauteur méridienne du bord } supérieur du Soleil, le 21 Sept. }		41 ^d 48' 10",1
---	--	---------------------------

D'où l'on conclut

La déclinaison du centre du Soleil.....	0 ^d 21' 24",8
L'heure de l'équinoxe, le 21 Septembre, à.....	21 ^h 55' 52"

Les passages, au méridien du Soleil & de diverses étoiles qui se sont trouvées dans son parallèle, observés à une lunette méridienne de 3 pieds & demi de foyer, & leurs hauteurs prises avec le quart-de-cercle mobile de 6 pieds, ont donné les résultats suivans.

(1) J'emploie ici la hauteur de l'équateur de 41^d 9' 48" parce que c'est ainsi que je l'ai supposée dans le calcul que j'ai fait des diverses obliquités de l'écliptique déterminées depuis 1743 à l'Observatoire royal avec ce même instrument (Voyez *Mém. Acad. années 1778 & 1782*). Je me réserve au reste à traiter dans nos prochains extraits ce qui a rapport à la véritable hauteur du pôle de l'Observatoire, sur laquelle on n'est pas généralement d'accord à quatre secondes près.

ÉPOQUES 1788.	ÉTOILES.	DIFFÉR. d'ascens. droite du centre du SOLEIL & de l'ÉTOILE.			DIFFÉRENCE de déclinaison du bord supérieur du SOLEIL & de l'ÉTOILE.		
		D.	M.	S.	D.	M.	S.
Janv. 22	α Lièvre...	136.	20.	26	"	"	"
27	Idem.	131.	7.	16	"	"	"
Fév. 7	γ Eridan...	96.	7.	33	+ 0.	54.	40
Mars 16	τ ² Hydre...	143.	25.	35	+ 0.	49.	15
	ε Hydre...	132.	1.	4	"	"	"
	l Hydre...	145.	23.	24	+ 0.	53.	29
17	η Vierge...	190.	29.	9	+ 1.	11.	57
	γ Vierge...	198.	57.	11	+ 0.	24.	11
	ζ Vierge...	203.	11.	44	+ 1.	10.	52
	τ ² Hydre...	142.	30.	47	+ 0.	25.	31
26	τ ¹ l'Hydre...	134.	20.	17	— 3.	6.	37
	l Hydre...	136.	18.	15	— 3.	2.	21
Avril. 14	ρ Lion....	132.	6.	3	+ 0.	22.	35
19	ρ Lion....	127.	28.	27	— 1.	22.	22
	ε Vierge...	164.	58.	22	+ 0.	20.	8
20	ε Vierge...	164.	2.	37	— 0.	0.	17
21	Idem.	163.	6.	50	— 0.	20.	29
30	β Lion....	"	"	"	+ 0.	26.	5
Mai. 2	Idem.	134.	21.	54	— 0.	9.	49
5	θ Lion....	122.	41.	57	— 0.	11.	58
12	η Bouvier..	163.	46.	45	+ 0.	49.	45
19	Arcturus...	154.	40.	57	+ 0.	3.	19
21	Idem.	152.	41.	1	— 0.	21.	3
23	Idem.	150.	40.	31	— 0.	44.	5
ÉPOQUES 1788.	ÉTOILES.	DIFFÉR. d'ascens. droite du centre du SOLEIL & de l'ÉTOILE.			DIFFÉRENCE de déclinaison du bord supérieur du SOLEIL & de l'ÉTOILE.		
		D.	M.	S.	D.	M.	S.
Mai. 25	β Hercule..	"	"	"	+ 0.	34.	35
26	Idem.	181.	25.	38	+ 0.	24.	21
30	Idem.	177.	21.	35	— 0.	13.	3
Juin. 14	Idem.	161.	53.	16	"	"	"
Juillet. 1	Idem.	144.	14.	29	"	"	"
3	Idem.	141.	10.	11	"	"	"
15	Idem.	129.	54.	56	+ 0.	17.	15
19	Idem.	125.	53.	44	+ 0.	59.	5
	Arcturus...	92.	6.	52	— 0.	41.	14
20	β Hercule..	124.	53.	53	"	"	"
22	Arcturus...	89.	7.	21	— 0.	6.	1
Août. 3	α Flèche...	159.	12.	51	— 0.	1.	15
4	Idem.	157.	33.	47	+ 0.	14.	42
	γ Flèche*..	162.	14.	26	"	"	"
Sept. 3	β Aigle....	133.	15.	4	— 1.	36.	4
Oct. 8	β Verseau..	125.	31.	9	"	"	"
13	λ Verseau..	141.	11.	38	— 0.	49.	56
14	Idem.	140.	15.	41	— 0.	27.	30
15	λ Verseau..	139.	19.	40	— 0.	5.	22
26	α ² Capric..	90.	4.	54	— 0.	40.	0
Nov. 1	Idem.	84.	13.	56	+ 1.	18.	8
7	δ Capric...	100.	31.	53	— 0.	45.	25
8	Idem.	99.	31.	18	— 0.	28.	4
10	Idem.	97.	30.	3	"	"	"

Nota. L'astérisque * que l'on trouve dans la seconde colonne, indique que le passage des étoiles & du Soleil a été déterminé le même jour par des hauteurs correspondantes. Le signe + dans la quatrième colonne, indique que l'étoile étoit plus haute dans le méridien que le bord supérieur du Soleil; le signe — indique qu'elle étoit plus basse. Cette quatrième colonne renferme la différence de hauteur observée sans aucune correction.

Ces comparaisons du Soleil aux différentes étoiles, donnent encore les résultats suivans.

Passages du Soleil dans le parallèle des Étoiles.				
ÉTOILES.			DIFFÉRENCE	
			d'Ascension dr.	
			H. M. S.	D. M. S.
ε Vierge....	Avril 20		18. 29. 36	163. 19. 38
β Lion.....	Mai 2		8. 12. 18	134. 2. 14
θ Lion.....	Idem..... 5		5. 29. 33	122. 28. 41
Arcturus.	Idem..... 20		13. 26. 29	153. 7. 26
β Hercule..	Idem..... 30		10. 36. 41	176. 54. 8
Arcturus.	Juillet 21		4. 36. 41	89. 55. 35
α Capric...	Novembre 8		17	98. 48. 26

M E R C U R E.

CETTE planète a achevé, dans le courant de cette année, quatre révolutions plus quarante-deux degrés cinquante minutes autour du Soleil, & s'est trouvée

EN CONJONCTION.		PLUS G. de DIGRESSION		STATIONNAIRE.	DANS SON NŒUD.	
Supérieure.	Inférieure.	Orientale.	Occidentale.		Ascendant.	Descendant.
11 Février.	26 Mars.	10 Mars.	22 Avril.	17. Mars.	19 Février.	10 Janvier.
31 Mai.	2 Août.	4 Juillet.	19 Août.	9 Avril.	11 Mars.	7 Avril.
14 Septemb.	21 Nov.	31 Octobre.	10 Décemb.	20 Juillet.	26 Mai.	4 Juillet.
				12 Août.	22 Août.	30 Septemb.
				11 Novembre.	18 Novemb.	27 Décemb.
				30 Novembre.		

On a déterminé, par observation, trois lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE MERCURE.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Haut.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
			H. Al. S.	H. Al. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
Mai 23	23. 27. 8, +	α Arturus..	+ 13. 26. 9,0	— 1. 31. 33	55. 49. 15	0. 28. 57: A.	— 13	+ 3
		β Hercule	+ 11. 11. 24,5	59. 56. 5				
Juin 16	1. 18. 47,3	μ Hercule	— 10. 35. 31,0	65. 53. 7	103. 49. 20	1. 58. 53: B.	+ 4	+ 23
Oct. 16	1. 13. 48,6	γ Capric..	— 6. 45. 22,0	— 0. 2. 17				
				233. 30. 30	1. 48. 49: A.	— 24	+ 11	

Nota. Le signe — pour la différence des passages, indiquera toujours que la planète étoit moins avancée en ascension droite que l'étoile, ou qu'elle *précédait* l'étoile au méridien, & qu'ainsi pour avoir l'ascension droite de la planète, il faut, de l'ascension droite de l'étoile, *ôter* sa différence avec la planète. Le signe + indique que la planète suivait l'étoile au méridien, & que par conséquent, pour avoir l'ascension droite de la planète, il faut, à l'ascension droite de l'étoile *ajouter* sa différence avec la planète.

Le signe — pour la différence de hauteur, indique que la planète étoit *moins élevée* sur l'horizon que l'étoile. Le signe + indique que la planète étoit *plus haute* dans le méridien.

Lorsque la hauteur de l'étoile n'a pas été prise, nous avons rapporté la hauteur absolue observée de la planète, d'après laquelle a été conclue sa déclinaison; cette hauteur est sans autre correction que celle de l'instrument. On l'a distinguée dans la cinquième colonne en ne la précédant d'aucun signe.

V É N U S.

Cette planète a achevé, dans le courant de cette année, deux révolutions moins $4^{\frac{1}{2}}$ $12^{\frac{2}{3}}$ autour du Soleil, & s'est trouvée

EN CONJONCTION		PLUS G. ^{de} DIGRESSION		STATIONNAIRE.	DANS SON NŒUD	
Supérieure.	Inférieure.	Orientale.	Occidentale.		Ascendant.	Descendant.
	8 Août.	30 Mai	19 Octobre.	16 Février. 17 Juill. 29 Août.	10 Mars. 21 Octobre.	30 Juin.

On a déterminé, par observation, cinquante-huit lieux de cette planète, qui, comparés aux tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE VÉNUS.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
			H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
Fév. 7	1.43.57,6	♌ Orion...	— 6.16. 9,7	— 0.57.34	345. 17. 32	Australe. 1. 19. 39 Boréale.	— 0.1	+ 10
Mars 16	2. 9.45,0	♋ Régulus...	— 7.58.12,8	— 0.38. 4	31. 40. 13	0. 18. 37	— 13	— 32
Avril 13	2.39.16,8	♊ ♌ Écrevise.	— 4.21. 4,0	+ 0.42.12	64. 38. 53	1. 51. 42	+ 13	+ 40
14	2.40.27,6	♌ Lion.....	— 5.49.50,5	— 1.17. 5	65. 47. 23	1. 54. 50	+ 4	+ 11
20	2.47.33,7	Idem.....	— 5.20.32,5	+ 0. 2.43	72. 38. 28	2. 11. 33	— 29	+ 18
21	2.48.46,6	♋ Arcturus...	— 9.16. 4,5	+ 4.24.22	73. 46. 45	2. 14. 6	— 11	+ 17
28	2.56.49,5	♌ Lion.....	— 4.41.17,0	+ 1.13.51	81. 37. 46	2. 30. 5	+ 9	+ 36
29	2.57.55,7	Idem.....	— 4.36.23,6	+ 1.19.46	82. 44. 24	2. 31. 56	— 9	+ 11
30	2.59. 9,7	Idem.....	— 4.31.30,0	+ 1.25. 7	83. 50. 47	2. 33. 56	— 11	+ 20
Mai 2	3. 1. 8,2	Idem.....	— 4.21.45,2	+ 1.33.40	86. 2. 56	2. 37. 21	— 15	+ 15
3	3. 2. 9,8	Idem.....	— 4.16.54,0	+ 1.37. 0	87. 8. 33	2. 39. 9	— 17	+ 19
5	3. 4.10,4	♌ Lion.....	— 4.10.35,7	+ 5.15.14	89. 19. 28	2. 42. 5	— 36	+ 28
7	3. 6. 4,6	♋ Bouvier..	— 8.27.42,3	— 1.46.35	91. 29. 59	2. 40. 30	— 12	+ 22
12	3.10.23,7	♋ Bouvier..	— 7.12.56,0	67.15.50 — 1.52.34	96. 51. 20	2. 48. 54	— 5	+ 23
13	3.11. 8,1	♋ Bouvier..	— 7. 8.15,8	67.12.48 — 1.55.38	97. 54. 36	2. 49. 20	— 18	+ 20
23	3.16.40,3	♋ Hercule..	— 8.59. 6,3	66. 9.37 + 4.41.56	108. 12. 39	2. 47. 46	— 10	+ 32
24	3.16.59,0	♋ Arcturus...	— 6.44.21,8	+ 4.32.32	109. 12. 22	2. 46. 27	— 17	+ 11
25	3.17.14,6	♋ Hercule..	— 8.50.28,7	+ 2.42.29	110. 12. 12	2. 45. 36	— 16	+ 14
Juill. 2	2.41.25,4	♋ Hercule..	— 7.23.33,6: C	— 0.14. 1	140. 16. 5	Australe. 0. 20. 55	— 9	— 13
15	1.59.53,7	♋ Arcturus...	— 4.23.33,9: C	52. 3.14	144. 3. 34	2. 47. 20	— 47	+ 2
19	1.42.40,4	♌ Aigle....	— 9.54. 3,7: C	— 0. 4. 3	144. 2. 46	3. 40. 32	— 34	+ 20
22	1.28.15,7	♋ Ophiucus.	— 7.45.49,2: C	— 3.11.35	143. 38. 42	4. 21. 19	— 42	+ 9
31	0.37.59,5	Idem.....	— 8. 0.46,5: C	49.52.54	140. 22. 59	6. 19. 2	— 68	+ 3
Août 1	0.31.53,6	♋ Ophiucus.	— 8. 3. 0,5: C	— 4. 2.38	139. 51. 59	6. 30. 57	— 48	+ 30
		♌ Ophiucus.	— 8.15. 9,0: C	+ 5.52.28				

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE VÉNUS.		ERREUR des TABLES.		
			des passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude	En long.	En latit.	
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
							Australe.		
Août 2	0. 25. 43,2	α Ophiucus	— 8. 5. 18,4 : C	49. 50. 50 : S	139. 19. 24	6. 42. 3	— 41	+ 28	
		γ Ophiucus	— 8. 17. 27,4 : C	+ 5. 51. 51 : S					
3	0. 19. 29,4	α Aigle..	— 10. 22. 40,3 : C	+ 0. 21. 1 : S	138. 45. 23	6. 52. 46	— 37	+ 39	
		β Aigle..	— 10. 27. 7 : C	49. 51. 6 : S					
4	0. 13. 12,4	α Aigle..	— 10. 39. 13,5 : C	+ 0. 22. 11 : S	138. 10. 11	7. 2. 40	— 59	+ 20	
		β Aigle..	— 10. 29. 33,2 : C	+ 2. 47. 57,2 : S					
5	0. 6. 54,6	α Aigle..	— 10. 27. 34,3 : C	49. 54. 16 : S	137. 34. 17	7. 11. 39	— 57	+ 35	
8	23. 41. 44,1	Idem....	+ 13. 18. 30,3 : C	+ 0. 38. 54					
21	22. 28. 39,6	ζ Aigle..	+ 13. 38. 36,0 : C	+ 0. 36. 22	128. 46. 25	7. 46. 8	— 41	+ 37	
23	22. 19. 35,6	Idem....	+ 13. 36. 50,0 : C	52. 1. 57					
Sept. 3	21. 41. 23,7	ζ Aigle..	+ 13. 38. 37,4 : C	— 1. 26. 30	128. 23. 20	6. 16. 1	— 45	+ 20	
			γ Aigle..	+ 12. 58. 13,4 : C					+ 2. 0. 32
13	21. 21. 34,4	Idem....	+ 13. 14. 18,8 : C	+ 2. 29. 53	132. 4. 14	4. 45. 40	— 41	+ 20	
19	21. 14. 38,6	Idem....	+ 13. 28. 53,5 : C	+ 2. 22. 23					
Oct. 4	21. 7. 39,1	ϵ Pégaſe.	+ 12. 18. 43,0	+ 1. 53. 26	147. 3. 13	1. 48. 5	— 36	+ 20	
	7	21. 7. 21,8	Idem....	+ 12. 29. 23,5					+ 1. 19. 18
	8	21. 7. 18,7	Idem....	+ 12. 33. 1,5	+ 1. 6. 59	150. 37. 58	1. 18. 20	— 19	+ 6
	9	21. 7. 17,4	Idem....	+ 12. 36. 40,7	+ 0. 54. 4				
	10	21. 7. 17,5	ϵ Pégaſe.	+ 13. 1. 48,2	50. 46. 21	152. 29. 9	1. 4. 16	— 17	+ 9
	13	21. 7. 24,3	α Pégaſe.	+ 11. 31. 20,5	50. 3. 34				
	14	21. 7. 28,2	ϵ Pégaſe.	+ 12. 55. 20,8	— 0. 17. 22	156. 17. 34	0. 37. 26	— 16	+ 11
	15	21. 7. 32,9	Idem....	+ 12. 59. 10,0	— 0. 32. 47				
	17	21. 7. 45,2	ϵ Pégaſe.	+ 13. 28. 16,7	49. 0. 7	159. 14. 17	0. 18. 28	— 27	+ 9
	18	21. 7. 52,1	ϵ Pégaſe.	+ 13. 10. 44,1	— 1. 22. 24				
19	21. 8. 0,6	Idem....	+ 13. 14. 38,2	— 1. 39. 41	161. 14. 38	0. 6. 14	— 15	— 8	
26	21. 9. 2,3	β Aigle..	+ 15. 30. 56,6	— 0. 50. 44	168. 28. 23	0. 31. 59	— 39	+ 11	
Nov. 1	21. 9. 58,3	Idem....	+ 15. 55. 16,5	44. 7. 26					
	2	21. 10. 7,4	γ Verſeau	+ 13. 33. 55,9	+ 5. 1. 11	175. 58. 32	1. 4. 11	— 18	+ 2
	5	21. 10. 33,1	Idem....	+ 13. 46. 18,5	+ 3. 53. 32				
	6	21. 10. 42,7	Idem....	+ 13. 50. 27,8	+ 3. 30. 35	180. 22. 44	1. 19. 50	+ 6	+ 4
	7	21. 10. 51,3	Idem....	+ 13. 54. 36,2	+ 3. 7. 22				
						181. 29. 16	1. 23. 25	+ 12	+ 4

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE VÉNUS.		ERREUR des TABLES.	
			des Pôlles.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long	En latit.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
Nov. 8	21. 10. 58,8	<i>Idem</i> ...	+13. 58. 47,0	+ 2. 43. 59	182. 36. 7	1. 26. 56	+ 19	+ 8
14	21. 11. 46,2	<i>Idem</i> ...	+14. 24. 0,2	+ 0. 20. 14	189. 21. 30	1. 45. 0	+ 14	+ 5
		α Lion ..	+10. 44. 11,7	— 3. 50. 31				
15	21. 11. 53,5	β Eridan.	+ 7. 42. 36,0	+ 2. 51. 26	190. 29. 47	1. 47. 43	+ 8	+ 11
21	21. 12. 36,3	γ Verseau	+14. 54. 0,2	— 3. 32. 0 ^d	197. 23. 33	2. 0. 49	— 5	+ 21
22	21. 12. 43,2	λ Verseau	+14. 27. 34,5	+ 3. 17. 52	198. 33. 18	2. 2. 18	+ 4	+ 7
24	21. 12. 57,3	γ Verseau	+15. 7. 3,5	— 3. 46. 38	200. 52. 51	2. 5. 35	— 11	+ 9
28	21. 13. 28,9	λ Verseau	+14. 53. 55,0	+ 0. 48. 7	205. 34. 36	2. 9. 18	+ 17	+ 13
Déc. 9	21. 15. 21,1	<i>Idem</i> ...	+15. 43. 40,7	— 3. 34. 15	218. 37. 15	2. 14. 12	+ 11	+ 9

Nota. On a comparé les observations aux nouvelles tables de M. de la Lande, publiées dans la Connoissance des temps, année 1789. Dans la 4.^{me} colonne, \odot désigne le bord occidental & \odot le bord oriental de Vénus ; & dans la colonne suivante, S désigne le bord supérieur ou boréal.

M A R S.

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 175^d 24' autour du Soleil, & s'est trouvée

DANS SON NŒUD descendant.	EN QUADRATURE	EN OPPOSITION.	STATIONNAIRE.
Le 29 Septembre.	Le 11 Avril.	Le 7 Janvier.	Le 16 Février.

On a déterminé, par observation, vingt lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE MARS.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
						Boréale.		
Janv. 4	12. 19. 39,0	ε Gém..	+ 0. 51. 15	67. 19. 54	108. 26. 18	4. 0. 17	— 3. 41	+ 19
10	11. 43. 2,9	Idem...	+ 0. 40. 46,3	+ 1. 14. 47	106. 2. 42	4. 6. 6	— 3. 50	+ 16
22	10. 33. 9,5	β Gém..	— 0. 39. 12,5	68. 11. 53	101. 49. 18	+ 6. 29	— 3. 34	+ 16
Févr. 7	9. 13. 19,7	β Taur..	+ 1. 25. 20	68. 11. 0	98. 35. 15	3. 50. 11	— 3. 7	+ 21
13	8. 48. 8,0	Idem...	+ 1. 23. 44,5	— 1. 31. 28	98. 14. 26	3. 41. 17	— 2. 47	+ 21
19	8. 25. 22,1	Idem...	+ 1. 24. 10	— 1. 41. 22	98. 20. 36	3. 31. 37	— 2. 54	+ 36
Mars 6	7. 35. 3,0	ε Gém..	+ 0. 16. 4,6	+ 0. 48. 37	100. 33. 34	3. 5. 59	— 2. 3	— 3
13	7. 16. 50,7	Idem...	+ 0. 23. 31,7	+ 0. 29. 6	102. 15. 46	2. 55. 18	— 1. 58	+ 5
16	7. 9. 36,7	Idem...	+ 0. 27. 12,4	+ 0. 19. 42	103. 6. 20	2. 50. 51	— 1. 48	+ 3
17	7. 7. 13,6	Idem...	+ 0. 28. 30,5	+ 0. 16. 24	103. 24. 16	2. 49. 31	— 1. 32	— 12
24	6. 51. 38,8	ε Lion..	— 2. 24. 10,2	+ 0. 26. 52	105. 38. 36	2. 39. 31	— 1. 28	+ 4
29	6. 41. 6,3	Idem...	— 2. 16. 30,5	+ 0. 7. 0	107. 24. 58	2. 32. 49	— 1. 35	+ 7
Avril 11	6. 16. 2,7	γ Écrev..	— 0. 51. 40,8	+ 1. 35. 48	112. 35. 16	2. 16. 39	— 1. 11	+ 13
13	6. 12. 12,6	Idem...	— 0. 48. 2,0	+ 1. 24. 44	113. 26. 40	2. 14. 20	— 1. 54	+ 15
14	6. 10. 31,8	ζ Lion..	— 2. 19. 49,0	— 0. 55. 39	113. 52. 30	2. 13. 6	— 1. 27	+ 11
20	5. 59. 38,9	Idem...	— 2. 8. 29,0	— 1. 31. 56	116. 33. 9	2. 7. 15	— 1. 44	+ 28
		δ Lion..	— 3. 6. 16,2	+ 1. 15. 5				
21	5. 57. 50,8	Arcturus..	— 6. 7. 2,0	+ 2. 32. 9	117. 0. 40	2. 5. 12	— 1. 14	+ 10
25	5. 50. 40,9	ζ Lion..	— 1. 58. 45,5	— 2. 5. 10	118. 52. 14	2. 0. 49	— 1. 19	+ 8
29	5. 43. 31,9	Idem...	— 1. 50. 48,3	— 2. 33. 42	120. 46. 39	1. 56. 36	— 1. 0	+ 7
Mai 5	5. 32. 44,2	γ Lion..	— 1. 42. 2,5	+ 0. 13. 34	123. 42. 31	1. 50. 32	— 1. 20	+ 9
		θ Lion..	— 2. 36. 44,2	+ 4. 32. 55				

Les observations du mois de Janvier donnent encore les résultats suivans :

Opposition vraie de Mars, le 7 Janvier 1788, à $\left\{ \begin{array}{l} 8^h \ 2' \ 43'' \text{ temps moy.} \\ 7. \ 55. \ 50,8, \text{ temps vrai} \end{array} \right.$

Longitude en opposition, comptée de l'équinoxe moyen. $107^d \ 18' \ 16'', 8$

Latitude en opposition $4 \ 4. \ 3,5$ boréale.

On a supposé l'erreur moyenne des Tables, de 3 minutes

86 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
45 secondes, soustractive en longitude, & 17 secondes, additive en latitude.

On conclut des premières observations } le 11, à { 10^h 16' 20", 1. t. n.
d'Avril la quadrature de Mars, } 10. 17. 2. t. m.

Longitude géocentrique vraie de Mars en quadrature.....112^d 39' 4", 8.

On a supposé l'erreur moyenne des tables, de 1' 35", soustractive en longitude.

J U P I T E R.

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 30^d 37' autour du Soleil, & s'est trouvée

DANS SON NŒUD A SCENDANT.	EN QUADRATURE.	OCCULTATION PAR LA LUNE.	STATIONNAIRE.
Le 2 Juillet.	Le 7 Mars. 21 Octobre.	Le 14 Mars.	Le 10 Février. 26 Novembre.

On a déterminé, par observation, quarante-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE JUPITER.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
Janv. 9	9. 44. 20,8	α Bélier..	+ 3. 12. 36,4	63. 42. 40	78. 6. 11	0. 23. 32	— 5. 42	— 67
		ζ Taureau	— 0. 16. 33,8	+1. 32. 32				
10	9. 39. 34,1	α Bélier..	+ 3. 12. 10,3	63. 42. 19	78. 0. 8	0. 23. 23	— 5. 47	— 6
		Alcyone..	+ 1. 32. 46,8	— 0. 54. 5				
15	9. 15. 7,9	α Bélier..	+ 3. 10. 15,9	63. 40. 44	77. 33. 35	0. 22. 29	— 5. 50	— 61
		ζ Taureau	— 0. 18. 54,3	+1. 30. 36				
22	8. 44. 18,7	Idem....	— 0. 21. 4,7	+1. 29. 6	77. 3. 35	0. 21. 12	— 5. 37	— 64
		η Gém....	— 0. 58. 4,7	63. 39. 14				

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE JUPITER.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
Janv. 27	8. 22. 23,4	n Gém...	— 0. 59. 12,5	63. 38. 34	76. 47. 42	Australe.		
Fév. 7	7. 36. 32,6	Idem....	— 1. 0. 29,7	— 0. 4. 18		0. 20. 20	— 5. 8	— 54
		ζ Gém...	— 1. 49. 48	63. 38. 57	76. 29. 53	0. 18. 13	— 4. 33	— 57
13	7. 12. 58,1	n Gém...	— 1. 0. 28	— 0. 3. 11	76. 30. 23	0. 17. 5	— 5. 1	— 56
16	7. 1. 31,7	Idem....	— 1. 0. 15,3	63. 40. 51	76. 33. 19	0. 16. 37	— 5. 2	— 53
		ζ Gém...	— 1. 49. 34,3	" " "				
17	6. 57. 46,5	n Gem...	— 1. 0. 9,0	— 0. 1. 59	76. 34. 54	0. 16. 13	— 4. 47	— 67
19	6. 50. 19,1	Idem....	— 0. 59. 55,3	— 0. 1. 25	76. 38. 30	0. 16. 10	— 4. 23	— 48
Mars. 5	5. 57. 33,1	γ Écrev.	— 3. 24. 53,9	+ 0. 26. 9	77. 27. 46	0. 13. 13	— 4. 15	— 72
13	5. 31. 15,1	Idem....	— 3. 21. 50,5	+ 0. 31. 7	78. 10. 24	0. 12. 6	— 4. 22	— 62
		n Gem...	+ 0. 53. 20,0	63. 54. 21				
Avril 11	4. 2. 35,8	γ Écrev.	— 3. 5. 6	+ 0. 52. 21	82. 3. 16	0. 8. 10	— 4. 7	— 51
13	3. 56. 41,8	Idem....	— 3. 3. 40	+ 0. 53. 45	82. 23. 10	0. 7. 52	— 3. 59	— 54
14	3. 53. 44,2	ζ Lion...	— 4. 36. 35,2	— 1. 20. 19	82. 32. 44	0. 7. 49	— 4. 22	— 56
20	3. 36. 2,5	Idem....	— 4. 32. 38	— 1. 16. 16	83. 35. 15	0. 7. 8	— 4. 24	— 47
21	3. 33. 5,9	Arcturus...	— 8. 31. 45,5	— 2. 54. 47	83. 46. 11	0. 6. 57	— 4. 5	— 49
28	3. 12. 24,9	ζ Lion...	— 4. 25. 41,3	— 1. 11. 29	85. 3. 36	0. 6. 4	— 4. 7	— 53
29	3. 9. 27,5	Idem....	— 4. 24. 51,6	— 1. 11. 4	85. 15. 1	0. 6. 0	— 4. 3	— 48
30	3. 5. 28,4	Idem....	— 4. 24. 2,5	+ 1. 10. 32	85. 26. 23	0. 5. 52	— 4. 13	— 50
						Boréale.		
Août. 3	22. 10. 36,5	β Hercule	+ 14. 47. 11,0	+ 0. 33. 46	106. 18. 50	0. 3. 44	— 4. 11	— 52
8	21. 56. 8,9	Idem....	+ 14. 51. 43,6	+ 0. 26. 13	107. 22. 27	0. 4. 8	— 3. 54	+ 38
Sept. 3	20. 42. 1,0	ζ Aigle...	+ 12. 39. 15,5	62. 52. 39	112. 27. 5	0. 6. 57	— 4. 29	+ 37
		e Pégaſe...	+ 10. 23. 1,3	+ 2. 47. 35				
22	19. 47. 9,8	e Pégaſe...	+ 10. 36. 12,0	+ 2. 17. 27	115. 34. 10	0. 9. 25	— 4. 32	+ 46
Oct. 4	19. 10. 27,2	Idem....	+ 10. 42. 58,7	+ 2. 0. 42	117. 10. 27	0. 11. 1	— 4. 59	+ 47
7	19. 0. 58,0	Idem....	+ 10. 44. 28	+ 1. 56. 58	117. 31. 40	0. 11. 27	— 4. 57	+ 46
8	18. 57. 46,4	Idem....	+ 10. 44. 56,7	+ 1. 55. 45	117. 38. 31	0. 11. 34	— 4. 58	+ 45
9	18. 54. 32,8	e Pégaſe...	+ 10. 23. 57,0	61. 59. 44	117. 44. 33	0. 11. 37	— 5. 21	+ 41
10	18. 51. 18,9	e Pégaſe...	+ 10. 45. 50,8	+ 1. 53. 35	117. 51. 16	0. 11. 56	— 4. 58	+ 41
13	18. 41. 30,7	Idem....	+ 10. 47. 7,4	+ 1. 50. 15	118. 9. 41	0. 12. 19	— 5. 15	+ 48
15	18. 34. 52,2	Idem....	+ 10. 47. 56,7	+ 1. 48. 16	118. 21. 15	0. 12. 39	— 5. 1	+ 50
18	18. 24. 44,2	Idem....	+ 10. 49. 4,0	+ 1. 45. 32	118. 37. 24	0. 13. 5	— 5. 2	+ 50
		γ Dauph.	+ 11. 24. 26,0	+ 5. 17. 40				

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE JUPITER.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
			H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
Oct. 31	17. 38. 26,6	e Pégase..	+ 10. 52. 41	+ 1. 36. 46	119. 28. 49	0. 15. 7	— 5. 29	+ 40
Nov. 1	17. 33. 43,8	γ Bélier..	+ 6. 23. 56,5	+ 2. 15. 50	119. 31. 20	0. 15. 11	— 5. 45	+ 43
2	17. 30. 57,4	e Pégase..	+ 10. 53. 2,5	+ 1. 35. 55	119. 33. 57	0. 15. 21	— 5. 48	+ 40
5	17. 19. 28,7	Idem....	+ 10. 53. 30,5	+ 1. 35. 5	119. 40. 31	0. 15. 56	— 5. 19	+ 48
6	17. 15. 39,1	γ Pégase..	+ 8. 4. 1,7	+ 6. 28. 52	119. 42. 31	0. 16. 15	— 5. 29	+ 59
7	17. 11. 43,8	γ Écrev..	— 0. 23. 8,3	61. 39. 52	119. 43. 39	0. 16. 17	— 5. 36	+ 50
		e Pégase..	+ 10. 53. 43	+ 1. 34. 43				
9	17. 3. 55,4	δ Écrev..	— 0. 24. 34	+ 1. 34. 20	119. 46. 32	0. 16. 39	— 5. 40	+ 53
21	16. 14. 16,4	α Bélier..	+ 6. 11. 38,2	— 1. 55. 44	119. 45. 15	0. 18. 49	— 5. 35	+ 57
		δ Écrev..	— 0. 24. 37,3	61. 40. 45				
22	16. 9. 56,8	Idem....	— 0. 24. 43,7	+ 1. 37. 6	119. 43. 41	0. 18. 57	— 5. 27	+ 54
		α Bélier..	+ 6. 11. 31,8	— 1. 55. 17				
24	16. 1. 15,7	δ Écrev..	— 0. 24. 56,7	61. 42. 17	119. 40. 26	0. 19. 17	— 5. 38	+ 52

Occultation de Jupiter par la Lune, le 14 Mars.

- 4^h 46' 28",0 1.^{re} contact extérieur des bords de Jupiter & de la Lune.
 4. 47. 49,0 1.^{re} contact intérieur ou immersion totale de Jupiter, derrière le bord obscur de la Lune, mais visible.
 6. 4. 40,7 2.^{me} contact intérieur ou émerision du 1.^{er} bord de Jupiter du bord éclairé de la Lune.
 6. 6. 0,7 2.^{me} contact extérieur ou émerision totale de Jupiter.

S A T U R N E

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 1^d 45' autour du Soleil, & s'est trouvée

EN QUADRATURE.	EN OPPOSITION.	STATIONNAIRE.
Le 31 Mai. 26 Novembre.	Le 29. Août.	Le 19 Juin. 6 Novembre.

ON a déterminé, par observation, quarante-sept lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS		ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE SATURNE.		ERREUR des TABLES.		
	VRAI.									
	H.	M. S.	des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En longit.	En lat.		
	H.	M. S.	H.	M. S.	D.	M. S.	D.	M. S.	M. S.	S.
Juill. 6	15.44.	48	γ Ophiucus	+ 6.24.57,5	+ 0.51.3	340.41.52	Australe.			
12	15.18.59,3		λ Verfeau	+ 0.9.18,1	— 0.40.7	340.30.51	1.50.49	— 5.26	— 44	
14	15.10.40,0		ζ Ophiucus	+ 6.24.3,0	+ 0.43.27	340.26.36	1.52.24	— 5.12	— 30	
15	15.6.28,3		Idem....	+ 6.23.54,0	+ 0.42.19	340.24.5	1.52.49	— 5.21	— 31	
			λ Verfeau	+ 0.8.54,0	— 0.43.14		1.52.56	— 5.21	— 36	
19	14.49.51,3		Idem....	+ 0.8.16,7	— 0.47.55	340.13.46	1.53.53	— 5.16	— 30	
			ζ Ophiucus	+ 6.23.17,0	+ 0.37.38					
21	14.41.33,7		δ Ophiucus	+ 6.45.9,0	— 6.23.32	340.8.24	1.54.5	— 5.13	— 44	
29	14.8.33,3		γ Ophiucus	+ 5.9.50	31.28.0	339.42.48	1.55.48	— 5.27	— 32	
31	14.0.22,1		λ Verfeau	+ 0.5.57,5	— 1.4.25	339.35.44	1.56.4	— 5.29	— 35	
Aug. 2	13.52.11,3		Idem....	+ 0.5.30,5	— 1.7.27	339.28.27	1.56.20	— 5.21	— 40	
8	13.27.50,4		Idem....	+ 0.4.42	— 1.17.8	339.5.7	1.57.8	— 5.13	— 48	
16	12.55.43,8		Idem....	+ 0.2.0,7	— 1.30.51	338.31.41	1.58.28	— 5.15	— 32	
21	12.35.51,0		Idem....	— 0.0.38,0	— 1.39.33	338.9.52	1.58.53	— 5.28	— 38	
Sept. 1	11.52.33,3		α^2 Capric.	+ 2.32.22,0	+ 2.29.55	337.19.21	1.59.43	— 5.32	— 33	
			β Verfeau	+ 1.18.27,0	30.30.22					
3	11.44.48,9		α^2 Capric.	+ 2.31.47,3	+ 2.26.21	337.10.12	1.59.55	— 5.41	— 43	
			λ Verfeau.	— 0.3.32	— 2.2.37					
7	11.29.17,6		Idem....	— 0.4.10,5	30.20.3	336.52.13	1.59.54	— 5.32	— 40	
			α^2 Capric.	+ 2.30.39,5	+ 2.19.36					
12	11.9.58,8		Idem....	+ 2.29.16,5	+ 2.11.18	336.30.4	2.0.2	— 5.24	— 38	
			λ Verfeau	— 0.5.34,0	— 2.17.43					
13	11.6.7,5		Idem....	— 0.5.50,5	— 2.19.19	336.25.47	1.59.58	— 5.39	— 43	
			α^2 Capric.	+ 2.29.0,0	+ 2.9.41					
15	10.58.23,9		λ Verfeau	— 0.6.23,0	— 2.22.28	336.17.15	1.59.54	— 5.34	— 44	
22	10.31.32,0		α^2 Capric.	+ 2.26.41,2	+ 1.56.2	335.48.55	2.0.2	— 5.31	— 30	
			λ Verfeau	— 0.8.9,3	29.56.29					
28	10.8.31,8		Idem....	— 0.9.35,5	— 2.40.56	335.26.25	1.59.35	— 5.26	— 41	
29	10.4.40,8		Idem....	— 0.9.49,0	— 2.42.15	335.22.49	1.59.37	— 5.11	— 36	

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.				LIEUX OBSERVÉS DE SATURNE.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.		des Hauteurs		Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
			H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	Australe.	M. S.	S.
Oct.	5	9. 41. 38,6	λ Verseau.	— 0. 11. 4,5	— 2. 49. 4	335. 2. 50	1. 59. 7	— 5. 43	— 24	
			α ² Capric.	+ 2. 23. 46,0	+ 1. 39. 52					
	7	9. 33. 58,0	Idem.	+ 2. 23. 24,2	+ 1. 37. 51	334. 57. 0	1. 59. 0	— 5. 26	— 35	
			λ Verseau.	— 0. 11. 26,3	— 2. 51. 6					
	9	9. 26. 15,4	Idem.	— 0. 11. 48,7	29. 36. 26	334. 51. 20	1. 58. 51	— 5. 39	— 36	
			α ² Capric.	+ 2. 23. 2,3	+ 1. 35. 56					
	11	9. 18. 33,4	Idem.	+ 2. 22. 42,5	+ 1. 34. 7	334. 46. 5	1. 58. 46	— 5. 34	— 30	
			Idem.	+ 2. 22. 32	+ 1. 33. 24					
	12	9. 14. 42,2	Idem.	+ 2. 22. 32	+ 1. 33. 24	334. 43. 24	1. 58. 26	— 5. 43	— 44	
			Idem.	+ 2. 22. 23,9	+ 1. 32. 30					
	13	9. 10. 51,1	Idem.	+ 2. 22. 23,9	+ 1. 32. 30	334. 41. 16	1. 58. 34	— 5. 27	— 30	
			λ Verseau.	— 0. 12. 27,6	29. 33. 0					
	14	9. 6. 59,0	Idem.	— 0. 12. 36,3	— 2. 57. 14	334. 38. 55	1. 58. 27	— 5. 27	— 32	
			α ² Capric.	+ 2. 22. 14,5	+ 1. 31. 43					
	18	8. 51. 28,0	Idem.	+ 2. 21. 41,5	+ 1. 29. 5	334. 30. 20	1. 57. 48	— 5. 35	— 32	
			λ Verseau.	— 0. 13. 10,0	— 2. 59. 52					
	20	8. 43. 43,3	α ² Capric.	+ 2. 21. 27,8	+ 1. 27. 54	334. 26. 40	1. 57. 45	— 5. 30	— 33	
			Idem.	+ 2. 20. 54,0	+ 1. 25. 26					
	26	8. 20. 16,1	β Capric.	+ 0. 52. 5,7	29. 25. 57	334. 18. 1	1. 56. 57	— 5. 25	— 38	
			λ Verseau.	— 0. 14. 2,0	— 3. 4. 5					
Nov.	31	8. 0. 32,0	Idem.	— 0. 14. 15,5	— 3. 4. 35	334. 13. 38	1. 56. 17	— 5. 15	— 30	
			α ² Capric.	+ 2. 20. 34,0	+ 1. 24. 15					
	1	7. 56. 34,7	Idem.	+ 2. 20. 31,0	+ 1. 24. 13	334. 12. 15	1. 56. 7	— 5. 36	— 41	
			λ Verseau.	— 0. 14. 24,2	— 3. 4. 16					
	2	7. 52. 36,2	Idem.	+ 2. 20. 31,0	+ 1. 24. 13	334. 12. 0	1. 55. 53	— 5. 30	— 41	
			β Baleine.	— 2. 30. 22,5	29. 24. 37					
	3	7. 48. 37,5	α ² Capric.	+ 2. 20. 28,3	+ 1. 24. 10	334. 11. 44	1. 56. 2	— 5. 23	— 22	
			β Baleine.	— 2. 5. 28,7	29. 24. 41					
	4	7. 44. 37,8	Idem.	— 0. 14. 23,8	29. 24. 51	334. 11. 41	1. 55. 35	— 5. 10	— 34	
			α ² Capric.	+ 2. 20. 27,2	+ 1. 24. 30					
	6	7. 36. 40,2	λ Verseau.	— 0. 14. 23,8	29. 24. 51	334. 11. 30	1. 55. 31	— 5. 23	— 28	
			α ² Capric.	+ 2. 20. 27,2	+ 1. 24. 30					
	7	7. 32. 39,2	Idem.	— 0. 14. 24,2	— 3. 4. 16	334. 11. 45	1. 55. 16	— 5. 14	— 35	
			λ Verseau.	— 0. 14. 24,2	— 3. 4. 16					
	8	7. 28. 37,5	α ² Capric.	+ 2. 20. 29,3	+ 1. 25. 10	334. 12. 14	1. 55. 7	— 5. 22	— 26	
			β Baleine.	— 2. 30. 15,0	— 0. 26. 0					
	10	7. 20. 35,4	Idem.	— 2. 29. 44,3	— 0. 22. 14	334. 22. 57	1. 53. 22	— 5. 14	— 40	
			Idem.	— 2. 29. 38,7	— 0. 21. 26					
	14	7. 4. 23,6	Idem.	— 2. 29. 33,5	— 0. 20. 56	334. 25. 54	1. 53. 7	— 5. 13	— 37	
			λ Verseau.	— 2. 29. 25,7	— 0. 19. 57					
	21	6. 35. 48,9	Idem.	— 0. 13. 24,7	— 2. 56. 11	334. 28. 9	1. 53. 1	— 5. 11	— 32	
			β Baleine.	— 2. 29. 18,5	— 0. 19. 9					
	23	6. 27. 33,7	Idem.	— 2. 29. 18,5	— 0. 19. 9	334. 30. 0	1. 52. 53	— 5. 11	— 31	
			λ Verseau.	— 0. 13. 24,7	— 2. 56. 11					
	24	6. 23. 26,8	Idem.	— 2. 29. 18,5	— 0. 19. 9					
			β Baleine.	— 2. 29. 18,5	— 0. 19. 9					
	25	6. 19. 18,8	Idem.	— 2. 29. 18,5	— 0. 19. 9					
			β Baleine.	— 2. 29. 18,5	— 0. 19. 9					

Les observations de la fin d'Août & du commencement du mois de Septembre, donnent encore les résultats suivans :

Opposition vraie de Saturne , le 29 Août, à..... $\left\{ \begin{array}{l} 8^h 15' 52'' \text{ temps moyen.} \\ 8. 15. 31 \text{ temps vrai.} \end{array} \right.$
 Longitude en opposition comptée de l'équinoxe moyen... $337^d 31' 46''$
 Latitude en opposition..... $1. 59. 43$ *Ausrale.*

On a supposé l'erreur des Tables, de $5' 30''$ soustractive en longitude, & de $35''$ soustractive en latitude.

On conclut aussi des dernières observations de Novembre

La quadrature de Saturne, le 25 Novembre..... $12^h 48' 34''$ *temps moyen.*
 Longitude géocentrique vraie de Saturne, en quadrature... $334. 30. 46$ comptée de l'équinoxe moyen.

On a supposé l'erreur des Tables en longitude, de $5' 11''$ soustractive.

HERSCHEL.

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de $6^d 35'$ autour du Soleil, & s'est trouvée

EN OPPOSITION.	STATIONNAIRE.
Le 18. Janvier.	Le 3 Avril.

On a déterminé, par observation, dix-huit lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.		ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES.		LIEUX OBSERVÉS		ERREUR des TABLES.	
				DANS LE MÉRIDIEN.		DE HERSCHEL.		TABLES.	
				des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
							Boréale.		
Janv. 9	12.	38.	35,1	ζ Taureau	+ 2.37.43,8	+ 0. 2. 11	118. 32. 54	0. 34. 24	- 10 + 12
14	12.	16.	6,5	Idem....	+ 2.36.50,0	- 0. 5. 23	118. 19. 53	0. 34. 58	- 11 + 17
Fév. 13	10.	8.	6,5	η Gém...	+ 1.54.37,0	- 1. 12. 54	117. 5. 4	0. 35. 1	+ 6 + 19
16	9.	55.	56,8	ζ Gém...	+ 1. 4.50,5	+ 0. 29. 18	116. 58. 37	0. 34. 46	+ 6 + 5
19	9.	43.	57,9	Idem....	+ 1. 4.24,4	62. 32. 37			
				ζ Taureau	+ 2.30.43,0	+ 0. 22. 29	116. 52. 19	0. 34. 45	+ 2 + 7
Mars 6	8.	42.	4,0	γ Écrev..	- 0.36.42,3	- 0. 45 24	116. 25. 14	0. 34. 46	+ 31 + 16
29	7.	17.	4,2	ε Lion...	- 1.40.37,5	- 3. 13. 45	116. 6. 47	0. 34. 8	+ 24 + 13
Oct. 31	18.	1.	0,7	ε Pégafe..	+ 11.15.14,3	+ 0. 43. 42	124. 51. 11	0. 35. 9	- 32 + 7
Nov. 1	17.	57.	6,3	δ Écrev..	- 0. 3. 13,5	+ 0. 43. 21	124. 51. 42	0. 35. 14	- 29 + 10
2	17.	53.	11,9	ε Pégafe..	+ 11.15.16,5	+ 0. 43. 29	124. 51. 40	0. 35. 12	- 39 + 4
5	17.	41.	19,9	Idem....	+ 11.15.20,7	+ 0. 43. 23	124. 51. 45	0. 35. 21	- 28 + 7
6	17.	37.	21,3	δ Écrev..	- 0. 3. 7,8	+ 0. 43. 12	124. 53. 1	0. 35. 24	- 18 + 7
7	17.	33.	21,5	Idem....	- 0. 3. 7,5	+ 0. 43. 8,5			
				γ Écrev..	- 0. 1.30,8	60. 48. 29	124. 53. 6	0. 35. 22	- 31 + 3
9	17.	25.	17,6	δ Écrev..	- 0. 3. 8,0	60. 48. 29	124. 53. 0	0. 35. 23	- 24 - 2
10	17.	21.	14,7	γ Écrev..	+ 0. 1.30,7	60. 48. 35	124. 53. 5	0. 35. 29	- 21 + 4
21	16.	35.	28,4	γ Pégafe..	+ 8.25.28,0	+ 5. 39. 0	124. 48. 44	0. 36. 12	- 30 + 21
22	16.	31.	12,4	Idem....	+ 8.25.25,0	+ 5. 39. 4	124. 47. 58	0. 35. 56	- 26 + 4
24	16.	22.	37,9	α Pégafe..	+ 9.33.16,0	60. 50. 48	124. 46. 29	0. 36. 9	- 17 + 11

Les Observations du mois de Janvier donnent encore les résultats suivans :

Opposition vraie de Herschel, le $\left\{ \begin{smallmatrix} 18 \\ 17 \end{smallmatrix} \right\}$ Janvier, à $\left\{ \begin{smallmatrix} 0^h \ 2' \ 39'', t. m. \\ 23. \ 51. \ 46, t. v. \end{smallmatrix} \right.$

Longitude vraie en opposition, comptée de l'équinoxe moyen..... $\left. \begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right\} 118^d \ 10' \ 13''$.

Latitude en opposition..... $0. \ 34. \ 55$, boréale.

On a supposé l'erreur moyenne des Tables $0' \ 10''$ soustractive en longitude, & de $15''$ additive en latitude.

LA LUNE.

On a déterminé, par observation, cinquante-sept lieux de la Lune, qui, comparés aux Tables d'Euler, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE LA LUNE.		ERREUR DES TABLES.	
			des Passage ^s .	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
Fév. 16	7.28.18,2	η Gém...	— 0.33.29,0 : C	+ 0.6.21 : I	83. 2. 50	0. 5.12 : D	— 0.34	+ 42
17	8.29.36,6	ζ Gém...	— 0.17.37,7 : C	+ 0.22. 9 : I	98. 7. 16	1. 16. 8 : A	— 0.55	+ 42
18	9.29.54,5	<i>Idem</i> ...	+ 0.46.31,0 : C	— 2. 7.38 : S	113. 25. 58	2. 29.42 : A	— 65	+ 70
Mars 13	4.27.55,6	η Gém...	— 1.56.38,8 : C	— 0.50.42 : I	63. 53. 1	1. 29.18 : B	+ 18	— 15
14	5.26.52,7	γ Écrev.	— 3.22.34,7 : C	+ 0.49.12 : S	78. 18. 56	0. 14.47 : B	+ 48	+ 23
16	7.25.36,5	γ Gém...	+ 0.48.36,7 : C	61. 1. 8 : S	107. 41. 34	2. 15.13 : A	+ 78	— 43
Avril 11	4.29.38,3	γ Écrev.	— 2.38. 3,5 : C	+ 0.10.38 : S	88. 32. 54	0. 53.17 : A	+ 40	— 66
13	6.25.48,2	δ Lion...	— 3. 6.17,0 : C	+ 0.34. 6 : S	117. 57. 10	3. 15.19 : A	+ 39	— 44
14	7.20. 1,9	ϵ Lion...	— 0.35.21,8 : C	+ 1.53.54 : S	132. 36. 25	4. 8.56 : A	+ 46	— 41
		ρ Lion...	— 1.27. 2,3 : C	+ 2.21.12 : S				
		θ Lion...	— 2. 8.23,3 : C	53.55. 3 : S				
18	10.38.58,7	α Vierge.	— 0.45.16,5 : C	+ 1. 8.29 : S	190. 8. 5	4. 43.26 : A	+ 24	— 81
19	11.28. 4,8	δ Corb.	+ 1. 2.31,2 : C	+ 1.34.23 : S	204. 2. 17	4. 8.12 : A	+ 52	— 40
20	12.20.21,5	α Coupe.	+ 3.27.42,7 : D	— 0.38. 1 : S	217. 40. 23	3. 18.31 : A	+ 55	— 34
		δ Corb.	+ 1.58.29,7 : D	23.23. 6 : S				
28	18.49.31,6	α Vierge.	+ 8. 2.39,0 : D	— 1.33. 7 : S	318. 14. 42	4. 31.51 : B	— 2	+ 16
29	19.32.41,2	<i>Idem</i> ...	+ 8.49.35,0 : D	+ 2.58.24 : S	330. 44. 42	4. 58.35 : B	— 5	+ 50
		θ Vierge.	+ 9. 4.36,0 : D	34. 6.26 : S				
Mai. 12	6.12.44,6	α Serpent.	— 5.59.32,0 : C	+ 1.55.51 : S	142. 50. 42	4. 46.35 : A	+ 20	— 43
		η Bouvier.	— 4.10.34,5 : C	50.12.30 : S	157. 16. 33	5. 9.46 : A	+ 17	— 2
13	7. 2.28,7	β Vierge.	— 1.12.19,2 : C	+ 0.40.11 : S				
		δ Vierge.	— 2.17.25,3 : C	44.48.12 : S	171. 28. 27	5. 13.29 : A	+ 31	— 48
14	7.50.37,7	δ Vierge.	— 1.25.21,8 : C	— 6.27.19 : S				
		β Vierge.	— 0.20.15,8 : C	— 4.51.30 : S	208. 52. 31	1. 38.14 : A	+ 33	— 34
19	11.54.39,3	δ Scorp.	— 0. 3.56,0 : C	— 0. 8.28 : S				

1788.	TEMPS VRAI.	ETOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE LA LUNE.		ERREUR DES TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
			H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
Mai 20	12.47.55,3	♄ Scorp..	+ 0.53.20,3 : D	— 1.48.16 : J	251.40.22	0.29.18 : A	+	5
		♄ Scorp..	+ 0.32.53,0 : D	17.23.48 : J				
		Antarès..	+ 0.24.48,3 : D	+ 2.7.25 : J				
21	13.38.31,4	♄ Scorp..	+ 1.47.56,5 : D	— 1.16.17 : J	264.14.54	0.40.32 : B	—	13
		♄ Scorp..	+ 1.27.29,5 : D	17.55.44 : J				
		Antarès..	+ 1.19.24,5 : D	+ 2.39.24 : J				
24	16.1.31	♄ Scorp..	+ 4.10.41,2 : D	+ 1.59.15 : J	301.8.25	3.41.9 : B	—	13
		♄ Scorp..	+ 4.22.31,7 : D	24.17.25 : J				
		♄ Scorp..	+ 0.22.20,9 : C	+ 0.29.56 : J	234.32.19	2.1.30 : A	+	12
Juin 15	9.46.18	♄ Scorp..	+ 0.42.48,2 : C	19.42.1 : J				
		♄ Ophiucus	+ 0.5.34,5 : C	17.46.45 : J				
17	11.26.35,3	♄ Ophiucus	+ 0.5.34,5 : C	17.46.45 : J	259.48.50	0.15.48 : B	—	21
		♄ Capric.	+ 0.32.52,7 : D	+ 0.50.57 : J				
		Antarès..	— 0.13.30,2 : C	18.34.25 : J	243.17.47	1.12.6 : A	—	2
Juill. 13	8.28.6,8	♄ Scorp..	— 0.5.25,4 : C	.				
		Antarès..	+ 0.40.40,5 : C	+ 2.33.24 : J				
		♄ Scorp..	+ 0.48.45,5 : C	+ 1.40.0 : J	255.49.7	0.4.30 : A	—	15
15	10.7.54,8	♄ Scorp..	+ 2.2.55,7 : C	— 1.0.40 : J				
		♄ Sagitt.	— 0.8.10,2 : C	+ 0.28.39 : J				
16	10.56.27,8	♄ Sagitt.	— 0.8.10,2 : C	+ 0.28.39 : J	280.29.5	2.6.4 : B	+	9
		♄ Ophiucus	+ 3.27.26,3 : D	— 0.24.57 : J				
		♄ Ophiucus	+ 3.27.26,3 : D	— 0.24.57 : J	304.56.12	3.52.0 : B	+	2
18	12.30.38,2	♄ Ophiucus	+ 3.27.26,3 : D	— 0.24.57 : J				
		♄ Verseau	— 1.27.28,7 : D	— 3.15.27 : J				
19	13.14.57	♄ Ophiucus	+ 4.47.31,6 : D	— 1.49.55 : J	317.9.31	4.30.0 : B	—	12
		♄ Verseau	— 1.27.28,7 : D	— 3.15.27 : J				
		♄ Dauph.	+ 5.29.56,8 : D	56.49.51 : J	33.22.20	3.28.51 : B	—	25
25	17.36.23,7	♄ Ophiucus	+ 8.34.8,2 : D	+ 2.55.45 : J				
		♄ Verseau	— 0.56.59,6 : D	— 0.23.1 : J	325.27.54	4.45.30 : B	—	32
Août 16	11.55.43,5	♄ Verseau	— 0.56.59,6 : D	— 0.23.1 : J				
		♄ Aigle..	+ 6.47.2,5 : D	55.20.38 : J				
21	15.37.16,6	♄ Aigle..	+ 6.47.2,5 : D	55.20.38 : J	29.3.14	3.32.4 : B	—	18
		♄ Flèche.	+ 7.5.47,5 : D	+ 0.17.33 : J				
		♄ Capric.	— 5.37.36,5 : C	— 4.56.15 : J	220.31.10	2.39.6 : A	—	90
Sept. 4	3.31.42,1	♄ Capric.	— 5.37.36,5 : C	— 4.56.15 : J				
		♄ Sagit..	— 0.43.40,0 : C	— 0.47.39 : J				
8	6.57.11,6	♄ Sagit..	— 0.43.40,0 : C	— 0.47.39 : J	272.10.0	1.44.28 : B	—	31
		♄ Capric.	+ 1.20.29,5 : C	+ 2.8.29 : J				
		♄ Verseau	— 1.14.21,0 : C	— 2.20.31 : J	321.8.59	4.41.12 : B	—	31
12	10.1.10,8	♄ Capric.	+ 1.20.29,5 : C	+ 2.8.29 : J				
		♄ Verseau	— 1.14.21,0 : C	— 2.20.31 : J				
13	10.44.7,0	♄ Verseau	+ 0.53.6,0 : C	+ 0.24.42 : J	333.33.43	4.57.10 : B	—	46
		♄ Verseau	+ 0.53.6,0 : C	+ 0.24.42 : J				
		♄ Verseau	+ 0.53.6,0 : C	+ 0.24.42 : J	358.54.10	1.45.20 : B	—	34
15	12.12.22,3	♄ Verseau	+ 0.53.6,0 : C	+ 0.24.42 : J				
		♄ Verseau	+ 0.53.6,0 : C	+ 0.24.42 : J				
		♄ Verseau	+ 0.53.6,0 : C	+ 0.24.42 : J	94.19.48	2.2.53 : A	—	63
22	18.16.34,1	♄ Pégase..	+ 9.5.52,3 : D	+ 2.14.48 : J				
		♄ Pégase..	+ 9.5.52,3 : D	+ 2.14.48 : J				
		♄ Capric.	— 1.14.24,8 : C	+ 0.50.0 : J	304.8.22	4.10.53 : B	—	71
Oct. 8	7.21.15,6	♄ Capric.	— 1.14.24,8 : C	+ 0.50.0 : J				
		♄ Capric.	— 1.14.24,8 : C	+ 0.50.0 : J				
		♄ Capric.	— 1.14.24,8 : C	+ 0.50.0 : J				

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE LA LUNE.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	N.
Oct. 9	8. 5. 57	α^2 Capric.	+ 1. 1. 53,5 : C	+ 0. 42. 4 : I	316. 22. 30	4. 43. 13 : B	— 70	+ 16
10	8. 48. 16,0	λ Verseau	— 0. 46. 7,5 : C	+ 0. 28. 28 : I	328. 42. 10	5. 1. 32 : B	— 69	— 19
11	9. 30. 57,9	γ Verseau	+ 0. 31. 1,5 : C	— 1. 10. 14 : I	341. 12. 14	5. 6. 18 : B	— 59	— 21
12	10. 14. 17,6	α Verseau	+ 1. 33. 36,7 : C	+ 2. 31. 39 : I	353. 55. 7	4. 56. 47 : B	— 45	+ 8
13	10. 58. 31,9	<i>Idem</i> ...	+ 2. 21. 44 : C	47. 42. 19 : S	6. 53. 38	4. 31. 20 : B	— 65	— 9
14	11. 44. 59,2	α Pégaſe..	+ 2. 12. 44,5 : C	52. 18. 10 : S	20. 8. 6	3. 51. 12 : B	— 88	— 4
19	16. 19. 18,2	ε Pégaſe..	+ 3. 32. 57,5 : C	+ 2. 12. 31 : S		1. 54. 34 : A	— 91	— 6
20	17. 16. 58,9	<i>Idem</i> ...	+ 8. 47. 24,5 : D	+ 1. 55. 13 : I	89. 59. 28	3. 3. 45 : A	— 59	— 17
		α Dauph.	+ 9. 48. 50 : D	— 0. 1. 58 : I	104. 31. 6	2. 18. 57 : B	— 41	— 33
Nov. 2	5. 43. 14,7	β Baleine.	+ 10. 31. 12,8 : D	60. 3. 31 : d	274. 16. 3	4. 4. 38 : B	— 42	— 22
4	5. 18. 14,5	<i>Idem</i> ...	— 6. 14. 47 : C	— 2. 33. 44 : S	299. 5. 12	5. 14. 30 : B	— 53	— 20
7	7. 27. 25,3	λ Verseau	+ 0. 11. 7,7 : C	— 3. 1. 32 : I	335. 52. 30	4. 13. 56 : B	— 35	— 30
10	9. 37. 46,0	ε Pégaſe..	— 0. 19. 38,2 : C	35. 42. 52 : I	14. 14. 40	0. 11. 27 : A	— 18	— 22
14	13. 11. 38,2	α Bélier..	+ 3. 10. 24,7 : C	— 0. 14. 54 : I	70. 12. 52	1. 32. 58 : A	— 28	— 6
15	14. 10. 57,8	α Pégaſe..	+ 2. 39. 50,5 : D	62. 13. 57 : I	84. 54. 43	5. 5. 50 : A	— 38	— 20
21	19. 34. 14,9	ζ Taureau	+ 5. 40. 24,8 : D	+ 0. 5. 57 : I	173. 19. 26	2. 53. 10 : B	— 62	— 33
Déc. 9	8. 54. 18,4	γ Verseau	+ 13. 15. 33,9 : D	— 0. 36. 40 : I	34. 41. 54			
		α Pégaſe..	+ 3. 9. 46,7 : C	+ 0. 57. 39 : I				

Nota. Dans la quatrième colonne, C désigne que la différence de passage a été prise entre l'étoile & le premier bord, ou bord occidental de la lune; D désigne que cette différence a été prise entre l'étoile & le deuxième bord, ou bord oriental de la lune. Dans la cinquième colonne, I désigne que c'est le bord inférieur de la lune dont on a pris la différence de hauteur avec l'étoile, & S désigne que c'est le bord supérieur. Voyez pour le surplus la note de l'extrait de 1787, page 136.

96 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Occultations d'Étoiles par la Lune.

ÉTOILES ÉCLIPSÉES.	JOURS.	TEMPS VRAI.	CIRCONSTANCES.
1788.		H. M. S.	
Gémeaux...	20 Janv..	10. 37. 29,3	Immersion dans le bord obscur.
Idem.....	Idem.....	11. 48. 13,9	Emersion du bord éclairé.
ζ Bélier.....	8	8. 8. 46,1	Immersion
↓ des Gémeaux.	11 } Avril.	8. 3. 40,3	Immersion
* Écrevisse....	14	8. 31. 34,1	Immersion
3. ^e Écrevisse..	10 Mai..	8. 13. 3,5	Immersion
14. ^e Sagittaire.	5 } 10a..	8. 17. 1,8	Immersion
i Taureau....	18	10. 57. 33,0	Immersion.....bord éclairé.
Idem.....	Idem.....	11. 49. 5,3	Emersion
29. ^e Sagittaire.	2	7. 26. 1,7	Immersion
61. ^e Sagittaire.	4 } Nov.	6. 31. 15,5	Immersion
a Écrevisse....	15	18. 47. 23,6	Immersion
e Lion.....	21	14. 23. 25,6	Immersion.....bord éclairé.
	Idem.....	15. 19. 48,9	Emersion.....bord obscur.

Voyez ci-dessus l'occultation de Jupiter par la Lune. (Page 88.)

TABLE du mouvement de la Pendule pour la réduction des heures en degrés.

	ANTICIP. des Fixes.		ANTICIP. des Fixes.		ANTICIP. des Fixes.
Janvier. 1	3' 56",3	Juin. 1	3' 59",5	Octobre. 15	3' 56",5
Février. 1	3. 56,0.	Juillet. 11	4. 0,6.	Novemb. 3	3. 57,0.
Mars... 20	3. 56,7.		14	6	3. 57,0.
Avril. . 13	3. 57,0.		22	Décembre 1	3. 56,0.
	21		30	9	3. 56,0.
Mai... 1	3. 57,5.	Août.. 14	3. 58,5.		
	10	Sept... 11	3. 58,0.		
	21		21		
	25	Octob. 11	3. 56,0.		
	31		15		

L'on voit par le présent Tableau que la Pendule étoit un peu trop susceptible des variations de la température, ce qui nous a fait rejeter toutes les observations qui n'ont pu être accompagnées d'une vérification prochaine de l'horloge.

L'on voit par le présent Tableau que la Pendule étoit un peu trop susceptible des variations de la température, ce qui nous a fait rejeter toutes les observations qui n'ont pu être accompagnées d'une vérification prochaine de l'horloge.

Éclipses des Satellites de Jupiter.

PREMIER SATELLITE.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.				CIRCONSTANCES.
	H.	M.	S.		
1788.					
Janvier 4	7.	44.	5	Émerſion.....	beaucoup de vapeurs.
27	7.	49.	40	Émerſion.....	légères vapeurs.
Février. 19	8.	3.	17	Émerſion.....	temps aſſez favorable.
Mars. 6	6.	26.	19	Émerſion.....	temps peu favorable.
13	8.	22.	39	Émerſion.....	quelques vapeurs.
20	10.	21.	8	Émerſion.....	temps peu favorable.
29	6.	47.	49	Émerſion.....	temps favorable.
Avril. 5	8.	46.	24	Émerſion.....	temps favorable.
Août. 3	15.	2.	51 ^d	Immérſion....	temps peu favorable.
Octob. 4	13.	57.	31	Immérſion....	temps peu favorable.
11	15.	53.	32	Immérſion....	temps favorable.
18	17.	48.	15	Immérſion....	temps peu favorable.
Nov. 10	17.	57.	55	Immérſion....	beaucoup de vapeurs.
28	10.	36.	57	Immérſion....	temps peu favorable.
Déc. 14	8.	45.	35	Immérſion....	temps peu favorable.

DEUXIÈME SATELLITE.

Janvier. 4	10.	32.	23	Émerſion. . . .	temps favorable.
Février. 5	10.	15.	9	Émerſion. . . .	temps aſſez favorable.
Octob. 7	13.	15.	33	Immérſion. . .	temps aſſez favorable.
14	15.	52.	17	Immérſion. . .	légères vapeurs.
Nov. 22	18.	1.	24	Immérſion....	légères vapeurs.
Déc. 3	9.	49.	42	Immérſion....	légères vapeurs.
28	6.	43.	27	Immérſion....	temps peu favorable.

TROISIÈME SATELLITE.

Mars. 7	8.	28.	40	Émerſion. . . .	temps peu favorable.
Avril. 19	8.	47.	50	Émerſion....	légères vapeurs.
Octob. 15	13.	4.	18	Émerſion....	légères vapeurs.

QUATRIÈME SATELLITE.

Nov. 25	11.	59.	37.	Émerſion.....	légères vapeurs.
---------	-----	-----	-----	---------------	------------------

C O M È T E S.

DANS la nuit du 25 au 26 Novembre de cette année, M. Messier a découvert une Comète entre les Étoiles χ & ψ de la cuisse de la grande Ourse, quoiqu'elle ne fût visible qu'avec le secours des lunettes; elle étoit assez brillante, & la queue pouvoit avoir deux ou trois degrés. Cette Comète a été observée jusqu'à la fin de l'année. Voici les élémens que M. Méchain en a déterminés d'après ses propres observations, dans un intervalle de 34 jours.

Lieu du nœud ascendant.....	5 ^f 7 ^d 10' 28".
Inclinaison de l'orbite.....	12. 28. 20.
Lieu du périhélie.....	3. 9. 8. 27.
Passage au périhélie, le 10 Nov. à.....	7 ^h 35' 0" <i>temps moy.</i>
Logarithme de la distance périhélie.....	0,0265381.
Sens du mouvement.....	Rétrograde.

Le 21 Décembre, Miss. Herchel a découvert, en Angleterre, une autre Comète proche de l'Étoile β de la Lyre; on n'en a fait à Paris que très-peu d'observations. Cette Comète étoit infiniment petite & très-difficile à apercevoir avec les meilleures lunettes.

TABLE de la Déclinaison de plusieurs Étoiles, déduite
de leur hauteur méridienne, observée au quart-de-cercle
mobile de 6 pieds, en 1788.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE des OBSERVATIONS	HAUTEUR OBSERVÉE.			DÉCLINAISON MOYENNE au 1. ^{er} Janvier 1788.		
			D.	M.	S.	D.	M.	S.
1788.								
Janvier.. 10	Alcione.	3	64.	36.	25,2	23.	26.	2.B.
Juillet.. 2	Antarès.....	3	15.	16.	11,4	25.	56.	55.A.
Juin... 15	Idem.....	2	"	"	16,0			
Mai... 23	Arcturus.....	6	61.	27.	40,0	20.	17.	32.B.
Juillet.. 15	Idem.....	3	"	"	43,2			
Mars... 16	Syrius.....	2	24.	45.	17,1	16.	26.	22.A.
Août... 14	Aigle.....	5	49.	30.	4,8	8.	19.	15.B.
Déc.... 28	α Bélier.....	4	63.	37.	49,7	22.	27.	5.B.
Septemb. 12	α ¹ Capricorne..	8	28.	2.	47,3	13.	9.	5.A.
Septemb. 11	α ² Capricorne..	7	28.	0.	27,3	13.	11.	26.A.
Octobre. 26	Idem.....	7	"	"	30,5			
Avril... 20	α Corbeau.....	3	17.	39.	35,0	23.	32.	50.A.
Octobre. 15	α Dauphin.....	3	56.	21.	10,2	15.	10.	17.B.
Août... 3	α Flèche.....	5	58.	42.	54,7	17.	32.	18.B.
Juillet.. 16	α Hercule.....	3	55.	49.	5,2	14.	38.	36.B.
Septemb. 22	α Lyre.....	3	79.	46.	3,7	38.	35.	44.B.
Juillet... 31	α Ophiucus.....	12	53.	54.	6,0	12.	43.	30.B.
Nov.... 14	α Pégase.....	3	55.	14.	56,4	14.	3.	57.B.
Nov.... 28	Idem.....	4	"	15.	0,9			
Octobre. 15	α Verseau.....	2	39.	50.	50,6	1.	20.	33.A.
Avril... 29	α Vierge.....	5	31.	8.	1,4	10.	3.	1.A.
Mai... 25	Idem.....	2	"	"	2,2			

Suite de la Table de la Déclinaison, &c.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	OBSERVATIONS NOMBRE des	HAUTEUR OBSERVÉE.			DÉCLINAISON MOYENNE au 1. ^{er} Janvier 1788.		
			D.	M.	S.	D.	M.	S.
1788.								
Septemb. 7	β Aigle.....	9	47.	4.	18,5	5. 53. 18.B.		
Nov.... 1	<i>Idem</i>	3	"	"	21,3			
Juin.... 5	β Balance.....	2	32.	35.	37,7	8. 35.	28.A.	
Nov.... 2	β Baleine.....	3	22.	3.	24,9	19. 9.	12.A.	
Déc.... 28	β Bélier.....	2	60.	56.	46	19. 45.	57.B.	
Avril... 30	β Lion. *.....	2	56.	55.	33,3	15. 45.	24.B.	
Mai.... 26	β Hercule.....	2	63.	7.	52,5	21. 57. 46.B.		
Juillet. 14	<i>Idem</i>	6	63.	8.	5,5			
Février.. 7	β Taureau.....	3	69.	34.	46,8	28. 24.	36 B.	
Septemb. 7	β Verseau.....	3	34.	41.	48,2	6. 29.	43.A.	
Septemb. 7	γ Aigle.	8	51.	17.	21,4	10. 6.	28.B.	
Octobre. 27	γ Capricorne...	4	23.	35.	45,0	17. 36.	38.A.	
Avril... 11	γ Écrevisse.....	4	63.	23.	13,5	22. 13.	7.B.	
Août... 5	γ Ophiucus.....	4	43.	58.	58,8	2. 48.	5.B.	
Nov.... 23	γ Pégase.....	5	55.	11.	16,1	14. 0.	15.B.	
Octobre. 12	γ Verseau.....	3	38.	44.	24,9	2. 27. 5.A.		
Nov.... 22	<i>Idem</i>	3	"	"	22,5			
Mai.... 8	γ Vierge.....	6	40.	53.	26,4	0. 17.	10.A.	
Octobre. 26	η Capricorne*..	4	24.	7.	26,7	17. 4.	54.A.	
Avril... 20	η Corbeau.....	2	25.	51.	23,8	15. 20.	1.A.	
Nov.... 6	η Écrevisse.....	2	60.	5.	22,1	18. 55. 20.B.		
Nov... 21	<i>Idem</i>	3	"	"	25,6			
Août... 14	η Hercule.....	2	66.	16.	20	25. 6.	0.B.	
Mai.... 8	η Lion.....	3	62.	50.	58,5	21. 40.	54.B.	
Mai.... 25	η Scorpion....	5	19.	12.	4,5	22. 0.	17.A.	
Mai.... 20	η Vierge.....	2	45.	43.	36,8	4. 33.	10.B.	

Suite de la Table de la Déclinaison, &c.

MOIS. & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE des OBSERVATIONS	HAUTEUR OBSERVÉE.	DÉCLINAISON MOYENNE au 1. ^{er} Janvier 1788.
1788.			D. M. S.	D. M. S.
Mai. . . . 12	ε Bouvier.	3	69. 8. 27,7	27. 58. 31.B.
Janvier. . 10	ε Gémeaux.	4	66. 29. 33,0	25. 19. 23.B.
Mars . . . 26	ε Lion.	2	65. 54. 30,0	24. 44. 28.B.
Avril. . . 19	ε Vierge.	4	53. 16. 18,2	12. 6. 6.B.
Août. . . 23	ζ Aigle.*	5	54. 44. 17,4	13. 33. 34.B.
Février. . 7	ζ Gémeaux.	4	62. 2. 7,5	20. 51. 54.B.
Avril. . . 25	ζ Lion.	7	65. 37. 58,0	24. 27. 56.B.
Juillet. . 13	ζ Ophiucus.	6	31. 3. 50,5	10. 7. 28.A.
Août. . . 2	ζ Serpent.	8	37. 31. 29,3	3. 39. 38.A.
Janvier. . 9	ζ Taureau.	3	62. 10. 9,0	20. 59. 49.B.
Nov . . . 3	Idem.	2	" " 6,3	
Mai. . . . 14	η Bouvier.*	2	60. 38. 1,7	19. 27. 55.B.
Février. . 17	η Gémeaux.	6	63. 43. 15,4	22. 33. 1.B.
Juillet. . 18	η Ophiucus.	5	25. 44. 50,3	15. 26. 54.A.
Mai. . . . 25	η Gr. Ourse.	2	91. 32. 25,0	50. 22. 42.B.
Avril. . . 15	θ Lion.	2	57. 45. 10,7	16. 35. 2.B.
Avril. . . 29	θ Vierge.	3	36. 46. 32,6	4. 24. 11.A.
Juillet. . 19	λ Verseau.	3	32. 29. 23,3	8. 42. 17,5.A.
Septemb. 13	Idem.	6	" " 27,1	
Nov. . . . 28	Idem.	5	" " 33,0	
Juillet. . 22	μ Sagittaire.	5	20. 6. 31,9	21. 5. 53.A.
Août. . . 9	Idem.	5	" " 37,5	

Suite de la Table de la Déclinaison, &c.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE des OBSERVATIONS	HAUTEUR OBSERVÉE.			DÉCLINAISON MOYENNE. au 1. ^{er} Janvier 1788.		
			D.	M.	S.	D.	M.	S.
1788.								
Juin.... 15	ν Scorpion *....	2	22.	18.	7,8	18.	53.	49.A.
Juillet.. 11	Idem.....	3	"	"	6,9			
Avril... 19	ρ Lion.....	2	51.	33.	47,5	10.	23.	31.B.
Mai.... 20	σ Scorpion....	2	16.	8.	47,0	25.	4.	17.A.
Juillet.. 2	Idem.....	3	"	"	37,9			
Décemb. 20	τ Pégase.....	2	63.	45.	46,3	22.	34.	56.B.
Septemb. 23	ε Pégase.....	5	60.	5.	4,6	18.	54.	16.B.
Octobre. 13	Idem.....	13	"	"	5,6			
Nov.... 8	Idem.....	7	"	"	9,0			
Mars... 29	ι Hidre.....	2	40.	59.	9	0.	11.	28.A.

Les hauteurs d'étoiles rapportées dans la Table précédente ne sont corrigées que de l'erreur de la lunette & de la division de l'instrument; on pourra donc calculer la déclinaison moyenne avec tels élémens qu'il plaira d'employer. Quant à nous, nous avons supposé la hauteur de l'équateur de $41^{\circ} 9' 46''$. Nous nous sommes servi des Tables de Mezger pour l'aberration & la nutation, de celles du recueil de M. de la Lande, pour les réfractions moyennes, auxquelles nous avons appliqué la correction relative à la hauteur du baromètre & du thermomètre. Nous avons marqué de l'astérisque * les étoiles que nous avons pu vérifier cette année, & qui dans l'extrait de 1787, page 146, paroissent avoir besoin d'une nouvelle détermination; le résultat de différentes années n'étant pas absolument le même, ce qui n'a guère lieu, comme on peut le remarquer; que pour les étoiles dont la déclinaison est australe, & qui étant peu élevées au-dessus de l'horizon, sont plus sujettes aux inégalités des réfractions.

SUPPLÉMENT.

EXTRAIT

DES

PRINCIPALES OBSERVATIONS,

FAITES DEPUIS 1767 JUSQU'EN 1777.

J'AI rapporté dans le supplément de l'extrait de 1786, les principales observations faites à l'Observatoire royal depuis 1777 jusqu'en 1785. Voici celles qui ont eu lieu dans les dix années précédentes ; je les ai toutes recueillies & recalculées avec soin, ce qui m'a donné lieu de rectifier quelques fautes, soit de calcul, soit d'impression, qui avoient été commises dans ce qui en avoit été précédemment publié en divers ouvrages, & principalement dans les Mémoires de l'Académie. Il est bon de prévenir ici que la vétusté des cabinets de l'Observatoire royal ayant nécessité leur reconstruction, on fut obligé de démonter, le 1.^{er} Août 1776, le grand quart-de-cercle mural de 6 pieds, fait par Langlois en 1732, & placé depuis ce temps dans l'un de ces cabinets. Il fallut aussi enlever le grand quart-de-cercle mobile, ce qui a interrompu pendant un laps de temps assez considérable la suite des observations : en effet, le mural ne put être remis en place qu'au mois d'Octobre 1778 ; il a été démonté de nouveau au mois d'Août 1780, à l'occasion d'une fouille faite pour de nouveaux cabinets en avant des anciens, & n'a plus servi depuis, d'autant qu'au mois d'Avril 1782, j'ai fait placer dans les nouveaux cabinets une très-bonne lunette méridienne dont on n'a cessé depuis de faire usage, & qui certainement a procuré des observations infiniment plus précises que celles que

l'on pouvoit faire au mural qui avoit le désavantage d'être soutenu & suspendu à l'extrémité de trois branches de fer susceptibles de se dilater plus ou moins, & de faire changer quelquefois le plan & les déviations de l'instrument, ce qui ne permettoit de comparer les planètes qu'à des étoiles situées absolument dans le même parallèle. Cette mauvaise disposition de l'instrument avoit été nécessitée par la situation des lieux, & le manque de secours & de moyens de tout genre, pour mettre l'Observatoire royal dans l'état convenable où il devoit être, & où depuis quelques années nous commençons à le voir.

§. I.^{er} *Éclipses de Soleil.*

UNE seule éclipse de Soleil a eu lieu, pour Paris, dans l'intervalle de dix années, compris depuis 1767 jusqu'en 1777 (1). On a observé ce qui suit :

Le 4 Juin 1769.		TEMPS VRAI.	CIRCONSTANCES.
Commencement.....		6 ^h 46' 44,"5	Cassini, lunette acromatique de Dollond,
Fin.....		8. 27. 17,2	
	Croissante.	Décroissante.	
L'Éclipse est de 1 doigt.	6 ^h 53' 7,"5	8 ^h 20' 28,"2	Maraldi, lunette de 7 pieds, garnie d'un réticule de 13 fils, a estimé le commencement de l'Éclipse 5" plus tard que M. Cassini, & la fin 7" plus tôt. Ces M ^{rs} ont aussi observé l'entrée dans l'ombre & la sortie de plusieurs taches qui étoient sur le disque du Soleil.
2.....	6. 58. 38,5	8. 14. 2	
3.....	7. 5. 57,6	8. 6. 42,9	
4.....	7. 14. 9,6	7. 57. 44,9	
5.....	7. 23. 14,7	7. 47. 49,8	
Plus gr. Phase.	5 $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ 7. 37. 9,8		

(1) Le 23 Mars 1773, il y a eu à la vérité une autre éclipse de Soleil, mais elle a fini peu de minutes après le lever du Soleil pour Paris, & dans les vapeurs de l'horizon; on a néanmoins déterminé cette fin à l'Observatoire royal, à 5^h 56' 18" temps vrai : on sent bien que cette observation ne peut être fort exacte.

§. II. *Éclipses de Lune.*

DE huit éclipses de Lune qui ont eu lieu pour Paris, dans l'intervalle de dix années, compris depuis 1767 jusqu'en 1777, on n'a pu observer que les suivantes :

Le 4 Janvier 1768.

Une brume assez considérable empêche d'observer bien exactement l'immersion & l'émergence des taches.

TEMPS VRAI.

Commencement.

Fin.

3 ^h 25' 45".	Cassini. Lunette de 7 ^p	5. 44. 9.
25. 19..	Chappe. Lunette de 9.	44. 28.

Le 30 Juin 1768.

La Lune s'est couchée vers le milieu de l'Éclipse, on n'a observé que les phases suivantes.

3 ^h 2' 0"	L'Éclipse est de 8 doigts.
3. 6. 0.	de 9 doigts.
3. 17. 0.	de 11 doigts.

Immersion totale... 3. 23. 56. (Lunette de 7 pieds, M. Maraldi).

Le 23 Décembre 1768.

Temps favorable, cette Éclipse a été observée par M. Maraldi.

Le commencement, l'immersion & le milieu avoient eu lieu avant le lever de la Lune.

TEMPS VRAI.

TACHES.

4 ^h 27' 40.	<i>Capernic</i> , hors de l'ombre.
39. 16.	<i>Manilius</i> , hors de l'ombre.
46. 27.	<i>Plinius</i> , hors de l'ombre.
47. 52.	<i>Mare serenitatis</i> , hors de l'ombre.
50. 22.	<i>Promontorium acutum</i> , hors de l'ombre.
55. 52.	<i>Proclus</i> , hors de l'ombre.
5. 0. 48.	<i>Mare crisum</i> , hors de l'ombre.
3. 4.	On commence à voir le bord de la Lune.

Mém. 1788.

O

Grandeur de la partie éclairée.

4 ^h 26' 26.	Neuf doigts environ.	4 ^h 49' 27'	Trois doigts.
32. 16.	Sept doigts environ.	53. 52.	Deux doigts.
35. 36.	Six doigts environ.	58. 3.	Un doigt.
42. 56.	Cinq doigts environ.		

Fin de l'Éclipse..... } 5^h 4' 48". douteuse.
5. 28. certaine.

Le 28 Avril 1771.

Les nuages permettant à peine de distinguer les taches de la Lune, on n'a observé que ce qui suit :

TEMPS VRAI.

12^h 52' 5 On juge le commencement de la pénombre.
13. 10. 35 L'Éclipse paroît commencée.

Le 23 Octobre 1771.

Le temps a été peu favorable pour cette observation ; on n'a pu bien observer que la fin de l'Éclipse..... 6^h 2' 33".

Le 11 Octobre 1772.

Le commencement & l'immersion ont eu lieu avant le lever de la Lune.

TEMPS VRAI.

ÉMERSION DES TACHES.

6^h 30' 2" Émerison.
6. 31. 26. *Grimaldus*, sort de l'ombre.
38. 27. *Aristarchus*.
51. 59. *Copernic*.
56. 1. *Tycho*.
7. 7. 20. *Manilius*.
11. 2. *Menelaüs*.
11. 51. *Dionysius*.
20. 52. *Promontorium acutum*.
25. 11. *Proclus*.
31. 42. *Langrenus*.

Fin de l'Éclipse..... } 7^h 35' 14" M. Duvaucel.
35. M. du Séjour.
52. M. Cassini.

Le 30 Septembre 1773.

Le commencement a eu lieu avant le lever de la Lune, & les vapeurs de l'horizon n'ont permis de distinguer les taches & de commencer les observations que vers le milieu de l'Éclipse; le bord de la Lune étoit alors très-rouge & dentelé:

TEMPS VRAI.	ÉMERSION DES TACHES,
6 ^h 6' 20"	le centre de <i>Tycho</i> , hors de l'ombre (Cassini, lun. simp. de 10 ^p)
25. 10.	de <i>Gassendus</i> .
28. 30.	de <i>Grimaldi</i> .
35. 35.	de <i>Lansberge</i> .
44. 25.	de <i>Kepler</i> , hors de l'ombre.
55. 23.	de <i>Copernic</i> .
7. 6. 30.	de <i>Dionysius</i> .
19. 5.	de <i>Tymochares</i> .
12. 29.	de <i>Manilius</i> .
15. 15.	de <i>Menelaüs</i> .
23. 5.	de <i>Platon</i> .
Fin très-douteuse à cause des vapeurs.	
{ 7 ^h 42' 9" M. Duvauzel.	
22. M. du Sejour.	
38. M. l'Ab. de Rochon.	

Le 30 Juillet 1776.

Cette éclipse a été totale ; le ciel fut très-favorable au commencement & à la fin ; mais pendant l'immersion totale & au milieu de l'éclipse , un nuage qui occupoit toute la partie australe du ciel , a empêché d'observer la Lune au méridien. L'ombre pendant cette éclipse a été bien terminée , mais si claire qu'on voyoit distinctement les taches au travers. Pendant toute la durée de l'immersion , le bord récemment immergé de la Lune paroissoit à travers l'ombre de couleur rougeâtre , & le bord oriental de couleur argentine , de sorte qu'à la vue on croyoit toujours voir un filet de lumière autour de la Lune.

		TEMPS VRAI.	
		CASSINI.	JE Aurat.
Commencement de la pénombre...		10 ^h 14' 6"	10 ^h 13' 28"
Commencement certain de l'éclipse.		10. 19. 3.	10. 19. 20.
Immersion totale.....		11. 17. 48.	11. 17. 40.
Émerison.....		12. 53. 3.	12. 50. 40.
Fin.....		13. 52. 48.	13. 52. 25.
Immersion d'une étoile.....		11. 29. 55.	
Lunette simple de 10 pieds.			Lunette achrom. de 3 ^{pi} grossissant 60 fois.

		TEMPS VRAI.	
		IMMERSION.	ÉMERSON.
Observations des taches. Lunette 10. ^p	Grimaldi.....	10 ^h 21' 48"	12 ^h 56' 48"
	Kepler.....	29. 18.	13. 7. 33.
	Copernic.....	40. 8.	16. 58.
	Platon.....	47. 23.	23. 53.
	Tycho.....	50. 3.	11. 53.
	Manilius.....	53. 13.	30. 23.
	Menelaüs.....	56. 48.	33. 33.
	Plinius.....	59. 53.	38. 48.

S. III. *Équinoxes.*

ANNÉES.	HAUTEUR OBSERVÉE du bord supérieur du Soleil.	DÉCLINAISON du centre du Soleil.	HEURE de L'ÉQUINOXE.	INTERVALLE d'un Équinoxe à l'autre.	ANNÉE.
1767.	21 Mars: 41° 42' 35"	0° 15' 44" 3: B	20 Mars: 8h 3' 4"	j ^o . h. '. "	365 6h 2' 17"
1768.	19 Mars: 41. 12. 58.	0. 13. 54, 2: A	19 Mars: 14. 5. 21.	186. 11. 15. 28.	365. 5. 32. 22.
1768.	22 Sept.: 41. 28. 5.	0. 1. 18, 9: B	22 Sept.: 1. 20. 49.	178. 18. 16. 54.	365. 6. 12. 39.
1769.	21 Mars: 41. 54. 50.	0. 28. 0. 1: B	19 Mars: 19. 37. 43.	" " " "	365. 5. 37. 2.
1770.	20 Mars: 41. 25. 24.	0. 1. 48, 9: A	20 Mars: 1. 50. 22.	" " " "	" " " "
1771.	20 Mars: 41. 19. 30.	0. 7. 21, 5: A	20 Mars: 7. 27. 24.	" " " "	" " " "
1772.*	23 Sept.: 41. 4. 10, 8	0. 22. 36, 5: A	22 Sept.: 0. 50. 42.	" " " "	" " " "
1773.*	19 Mars: 41. 8. 7, 9.	0. 18. 44, 4: A	19 Mars: 18. 59. 26.	178. 18. 8. 44.	" " " "

Toutes ces hauteurs du bord supérieur du Soleil (excepté en 1772 & 1773) ont été observées au quart-de-cercle mural, lequel étoit divisé par transversales de minute en minute, dont on estimoit ensuite facilement le quart, le tiers, la moitié ou les trois quarts, ce qui pouvoit laisser toujours une incertitude de 6 à 8" sur les hauteurs, & étoit bien moins précis que lorsqu'on prenoit ces hauteurs au grand quart-de-cercle mobile de 6 pieds avec un micromètre qui donnoit jusqu'à la précision de la demi-seconde; ce qui a eu lieu en 1772 & 1773, & dans toutes les autres années suivantes rapportées dans le supplément de l'extrait de 1786, p. 78. Voyez-y en même temps la note qui suit le pareil Tableau.

S. IV. *Solstices.*

ANNÉES.	HAUTEUR solst. du bord supérieur du Soleil.	OBLIQUITÉ DE L'ECLIPTIQUE.		DISTANCE SOLSTICIALE du bord supérieur du Soleil.		CIRCONSTANCES.
		Apparente.	Vraie.	A <i>Arcturus</i> .	A β Baleine.	
1767.	64° 54' 14"	23° 28' 15" 2	23° 28' 10" 4	3° 19' 49" 9		Par 5 observ. diff. de 6", 5.
	18. 0. 46, 6	6, 1	23. 28. 1, 3	" " "	3° 55' 26"	Par 5 observ. diff. de 10", 8
1768.	18. 0. 49, 4	23. 28. 3, 3	23. 28. 2, 6	" " "		Par 1 seule observation.
1770.	64. 53. 59	23. 28. 0, 2	23. 28. 4, 1	3. 20. 27, 8		Par 3 observ. diff. de 4".
	18. 0. 49, 8	23. 28. 2, 9	23. 28. 8, 1	" " "		Par 1 seule observation.
1771.	64. 54. 3, 2	23. 28. 4, 4	23. 28. 10, 7	3. 20. 46, 0		Par 3 observ. diff. de 5".
1772.	64. 53. 46, 7	23. 27. 47, 9	23. 27. 56, 0	3. 20. 56, 5		Par 4 observ. diff. de 4", 1.
	18. 0. 50, 7	23. 28. 2, 0	23. 28. 10, 6	" " "	3. 56. 52.	Par 4 observ. diff. de 8".
1773.	64. 53. 46, 9	23. 27. 48, 1	23. 27. 57, 0	3. 20. 58, 8		Par 3 observ. diff. de 2", 5.
	18. 0. 46, 4	23. 28. 6, 3	23. 28. 15, 2	" " "		Par 3 observ. diff. de 4", 5.
1774.	64. 53. 46, 5	23. 27. 47, 7	23. 27. 56, 4	3. 21. 36, 0		Par 7 observ. diff. de 7", 4.
	18. 0. 48	23. 28. 4, 7	23. 28. 11, 0	" " "	3. 57. 28.	Par 6 observ. diff. de 12".
1775.	64. 53. 40, 8	23. 27. 42, 0	23. 27. 49, 7	3. 21. 40, 0		Par 5 observ. diff. de 9", 4.
1776.	64. 53. 51, 1	23. 27. 52, 3	23. 27. 57, 9	3. 22. 7, 8		Par 5 observ. diff. de 3", 4.

Nous avons supposé la réfraction de $27''$ à 65^d ; & $2' 53'',5$ à 18^d . La parallaxe $3'',7$ au solstice d'été, & $8'',4$ au solstice d'hiver. Le demi-diamètre du Soleil $15' 47''$ au solstice d'été, $16' 19'',5$ au solstice d'hiver. La hauteur de l'équateur $41^d 9' 48''$.

Toutes ces hauteurs ont été prises avec le grand quart-de-cercle mobile de six pieds. Nous ne rapportons point ici celles qui ont été observées au mural, n'étant point susceptibles de la précision qu'exige une recherche aussi importante que celle de l'obliquité véritable de l'écliptique, sur laquelle il ne reste plus qu'une incertitude de 10 à 12 secondes. Or, comme nous l'avons dit dans l'article précédent, on ne peut compter qu'à 8 secondes près sur les hauteurs prises au mural.

S. V. *Opposition des Planètes.*

ANNÉES.	TEMPS			LIEU			ERREUR			CIRCONSTANCES		
	de			de			des					
	L'OPPOSITION.			l'Opposition vraie,			TABLES.					
	Heure moyenne.			comptée de l'Équinoxe vrai.								
			Longitude.			Latitude.			En longit.		En latit.	
H. M. S.			D. M. S.			D. M. S.			M. S.		M. S.	
S A T U R N E.												
1767.	22 Déc. :	0. 39. 19	90. 32. 21	1. 0. 44 :	A	— 0. 47	— 0. 7	Par 6 observations.				
1769.	4 Janv. :	4. 17. 43	104. 42. 59	0. 20. 27 :	A	— 1. 21	0.	Par 3 observ.				
1770.	18 Janv. :	5. 57. 17	118. 48. 18	0. 20. 24 :	B	— 1. 50	— 0. 33	Par 3 observ.				
1771.	1 Fév. :	4. 4. 35	132. 41. 47	1. 0. 20 :	B	— 3. 30	— 0. 12	Par 3 observ.				
1772.	14 Fév. :	21. 57. 38	146. 21. 0	1. 35. 42 :	B	— 5. 5	— 0. 16	Par 2 observ.				
1773.	27 Fév. :	10. 53. 22	159. 43. 30	2. 4. 36 :	B	— 6. 7	— 0. 40	Par 4 observ.				
1774.	13 Mars :	18. 12. 9	172. 46. 9	2. 26. 46 :	B	— 8. 22	— 0. 44	Par 4 observ.				
1775.	25 Mars :	20. 41. 27	185. 31. 5	2. 40. 43 :	B	— 9. 11	— 0. 38	Par 4 observ.				
1776.	6 Avril :	17. 34. 7	197. 57. 5	2. 46. 38 :	B	— 10. 8	— 0. 44	Par 2 observ.				
1779.	14 Mai :	5. 36. 6	233. 41. 5	2. 21. 1 :	B	— 11. 20	— 0. 46	Par 5 observ.				
1780.	25 Mai :	11. 7. 32	245. 12. 7	2. 1. 2 :	B	— 11. 19	— 0. 8	Par 8 observ.				
1782.	18 Juin :	17. 18. 4	267. 55. 58	1. 7. 24 :	B	— 10. 57	+ 0. 10	Par 6 observ.				
1783.	30 Juin :	20. 1. 39	279. 14. 50	0. 36. 7 :	B	— 10. 31	+ 0. 11	Par 6 observ.				
1785.	24 Juill. :	5. 40. 35	302. 3. 59	0. 29. 50.		— 8. 58	— 0. 22	Par 6 observ.				
1786.	5 Août :	14. 22. 37	313. 40. 15	1. 1. 59.		— 7. 47	— 0. 40	Par 6 observ.				

ANNÉES.	TEMPS de L'OPPOSITION.			LIEU de l'Opposition vraie, comptée de l'Équinoxe vrai.			ERREUR des TABLES.			CIRCONSTANCES.		
	Heure moyenne.											
				Longitude.	Latitude.	En longit.	En Latit.					
	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.		M.	S.

J U P I T E R.

1767.	8 Mars: 6.31.7	167.59.46	1.30.34:B	-2.23	-0.10	Par 4 observations.
1768.	6 Avril: 17.55.40	197.55.7	1.35.41:B	-2.9	-0.35	Par 4 observ.
1769.	8 Mai: 0.46.6	228.6.40	1.14.50:B	-1.1	-0.20	Par 3 observ.
1770.	9 Juin: 21.45.36	259.24.59	0.31.26:B	-1.20	-0.47	Par 4 observ.
1771.	14 Juill: 20.39.48	292.31.58	0.24.44:A	-1.33	+0.59	Par 3 observ.
1772.	19 Août: 18.31.22	327.39.53	1.15.27:A	-3.16	+0.30	Par 4 observ.
1778.	9 Fév.: 22.52.3	141.53.44	1.6.45:B	-5.27	+0.17	Par 2 observ. dout.
1779.	12 Mars: 12.11.12	172.18.25	1.32.47:B	-4.6	-0.10	Par 6 observ.
1780.	11 Avril: 1.33.19	202.14.10	1.33.51:B	-3.12	-0.31	Par 4 observ.
1781.	12 Mai: 13.9.0	232.33.44	1.9.16:B	-3.8	-1.0	Par 3 observ. dout
1782.	14 Juin: 17.13.27	264.6.40	0.23.44:B	-4.14	-1.0	Par 6 observ.
1783.	19 Juill: 23.47.50	297.31.4	0.32.57:A	-5.0	+1.5	Par 4 observ.
1785.	1 Oct.: 21.47.14	9.34.13	1.38.39:A	-6.40	-0.35	Par 6 observ.
1786.	7 Nov: 21.50.3	46.12.8	1.17.21:A	-7.0	-1.3	Par 6 observ.

M A R S.

1768.	25 Oct.: 19.30.17	33.25.33	1.27.16:A	-5.30	-0.14	Par 3 observations.
1770.	14 Déc.: 11.19.56	83.7.10	2.53.9:B	-4.27	+0.10	Par 4 observ.
1779.	11 Mai: 22.3.42	231.27.18	0.20.39:A	+0.30	+0.45	Par 3 observ.
1783.	1 Oct.: 0.0.39	8.10.6	4.6.5:A	-2.52	-0.24	Par 7 observ.

L'on retrouve ici plusieurs oppositions que nous avons déjà rapportées dans l'extrait de 1786 ; mais alors nous avons calculé l'opposition *apparente* comptée de l'Équinoxe *apparent* ; au lieu qu'ici, c'est l'opposition *vraie* comptée de l'Équinoxe *vrai* ou *moyen* que nous avons déterminée, & que nous avons cru devoir rapporter de préférence, comme étant la plus intéressante à offrir aux Astronomes qui veulent s'occuper de la perfection & de la rectification des Tables. Les passages & les hauteurs des Planètes & des Étoiles auxquelles on les a comparées, ont été pris depuis 1767 jusqu'en 1782, au mural de 6 pieds mais comme cet instrument étoit suspendu à l'extrémité de

barres de fer qui, par leur dilatation, pouvoient rendre la déviation variable ; on n'a jamais comparé aux Planètes que des Étoiles qui ne différoient de leur parallèle que de quelques minutes ou un demi-degré au plus. Depuis 1782, on a toujours observé les passages à une lunette méridienne, & les hauteurs au grand quart-de-cercle mobile de 6 pieds.

§. VI. *Occultations par la Lune.*

ASTRES ÉCLIPSÉS.	ÉPOQUES.	TEMPS VRAI.	CIRCONSTANCES.
α de l'Écrevisse.	1773. le 6 Févr.	6 ^h 45' 49",6.	Immersion.
		7. 40. 15,3.	Émerision un peu tard.
Aldebaran...	1774. le 14 Avril.	6. 26. 2,1.	Immersion douteuse de 1".
		7. 35. 57,8.	Émerision.
Saturne.	1775. le 18 Févr.	9. 11. 5,8.	Contact extér. de l'anse.
		12. 16,8.	intérieur de l'anse... }
			Contact extérieur } à l'Immersion.
		9. 11. 26,8.	du globe de Saturne...
		11. 52,8.	Intér. du globe de Sat.. }
			Contact intérieur } à l'Émerision.
		10. 10. 5,8.	du globe de Saturne.. }
		10. 37,8.	Extérieur..... }
			Contact extérieur de la dernière anse. }
		10. 11. 9,8.	

§. VII. *Passage de Vénus sur le Soleil, le 3 Juin 1769.*

Les nuages ne se sont dissipés qu'à 7^h 38'; Vénus étoit déjà en partie entrée sur le Soleil, on n'a pu observer que le second contact de l'entrée.

TEMPS VRAI.

Contact intérieur... 7^h 38' 53" M. Cassini de Thury... Lunette achrom... de 3^p $\frac{1}{2}$.

38. 50. M. Maraldi... Lunette achrom... de 3^p.

38. 58. M. le Duc de Chaulnes. Lunette achrom... de 3^p $\frac{1}{2}$.

Diamètre de Vénus, 61" $\frac{1}{4}$ environ.

*Disparition & réapparition de l'anneau de Saturne en 1773
& 1774.*

Le 26 septembre 1773, vers 5 heures du matin, les anses paroissent comme deux lignes de lumière, l'orientale plus continue que l'occidentale, qui paroissoit comme séparée du corps de Saturne.

Le 29 septembre, l'anse occidentale interrompue auprès du disque de Saturne; on y remarque deux points brillans, l'un à son extrémité, l'autre un peu plus proche de Saturne. Un pareil point brillant paroît à l'extrémité de l'autre anse orientale.

Le 30 septembre, l'anse orientale paroît raccourcie; elle a; ainsi que l'anse occidentale, un point brillant à son extrémité, mais il est moins apparent.

Le 1 octobre, les anses très-foibles, l'orientale raccourcie.

Mauvais temps jusqu'au 6.

Le 6 octobre, les anses très-foibles & comme un filet de lumière; petits points lumineux à l'orient du disque.

Le 7, le 8 & le 9, mauvais temps.

Le 10 octobre, Saturne parfaitement rond (lun. achrom. à trois verres, de 3 pieds $\frac{1}{2}$ de foyer & 42 lignes d'ouverture).

La première réapparition qui eut lieu en janvier 1774, ne fut observée que le 16, mais elle avoit déjà eu lieu & été aperçue dès le 11 par M. Messier.

La seconde disparition a été observée ainsi en 1774.

Le 2 avril 1774, à 10^h $\frac{1}{4}$ du soir, les anses de Saturne sont très-foibles & comme un trait de lumière.

Le 3 avril, on distinguoit encore les anses, mais très-difficilement; il est vrai qu'un vent affreux agitoit beaucoup la lunette.

Le 5 avril, à 10^h du soir, très-beau temps; il n'y avoit plus d'apparence d'anse à Saturne (même lunette que ci-dessus).

La seconde réapparition a été observée au mois de juillet.

Le 1.^{er} juillet, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir, Saturne, au premier coup-d'œil, paroît sans anses; mais en regardant attentivement, on aperçoit à l'orient un filet de lumière très-foible, & à l'occident un encore plus foible, & interrompu proche du corps de Saturne.

Le 2 juillet, les deux traits de lumière vus hier, s'aperçoivent au premier coup-d'œil, sur-tout l'anse orientale.

Mém. 1788.

114 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
§. VIII. Comparaison du Soleil à diverses Étoiles.

É P O Q U E S.	ÉTOILES.	DIFFÉRENCE de déclinaison du bord sup. du Soleil & de l'Étoile.	PASSAGE DU CENTRE du Soleil par le parallèle de l'Étoile.
			TEMPS VRAI.
1770.—19 Mai. . .	<i>Arcturus.</i>	+ 0 ^d 17' 23"	
1771.—23 Février.	α Vierge.	+ 0. 5. 33.	Le 23 Févr.: 23 ^h 31' 50"
1772.—20 Juillet.	<i>Arcturus.</i>	— 0. 26. 30.	Le 20 Juill.: 22. 8. 15.
14 Août. . .	α Pégase.	— 0. 25. 51.	Le 14 Août: 12. 52. 44.
	γ Pégase.	— 0. 29. 57.	Le 14 Août: 18. 5. 52.
31 Août. . .	α Aigle. .	— 0. 21. 49.	Le 31 Août: 6. 35. 12.
1773.—24 Avril. .	<i>Regulus.</i>	— 0. 15. 5.	Le 24 Août: 0. 57. 6.
21 Mai. . .	<i>Arcturus.</i>	— 0. 11. 33.	Le 21 Mai: 8. 33. 44.
1774.—22 Juillet.	<i>Arcturus.</i>	— 0. 8. 58.	Le 21 Juill.: 10. 0. 20.
1775.—22 Juillet.	<i>Arcturus.</i>	— 0. 12. 29.	Le 21 Juill.: 17. 23. 29.

Les hauteurs du Soleil & des étoiles ont été observées au grand quart-de-cercle mobile de six pieds. Quant aux passages au méridien, ils n'ont point été observés, ce qui ne nous a pas permis de donner les différences d'ascension droite. Le signe + désigne que l'étoile étoit plus haute que le bord supérieur du Soleil.



R E C H E R C H E S

S U R L E S P R I N C I P E S

D E L A D I F F É R E N C I A T I O N ,

*Et sur les Intégrales connues jusqu'ici sous le nom
d'Intégrales particulières.*

Par M. C H A R L E S .

J'AI observé dans le volume de nos Mémoires publié en 1786, que certaines équations en différences finies avoient deux intégrales distinctes, contenant chacune une constante arbitraire; mais je me propose aujourd'hui de considérer cet objet sous un point de vue nouveau.

Soit l'équation $y = \frac{x \Delta y}{g} + \frac{\Delta y^2}{4 n^2 g^2}$, où g exprime la différence constante de la variable principale x . J'ai fait voir que cette équation avoit pour intégrales $y = 2 n a x + a^2$, a étant l'arbitraire; & $y = - n^2 x^2 + (b \cos. \frac{\pi x}{g} + \frac{g n}{2})^2$, b étant l'arbitraire. Maintenant je me propose de trouver ces intégrales d'une manière nouvelle, qui répandra, je pense, quelque jour sur la théorie du calcul aux différences finies, & sur celle de ces espèces d'intégrales qui ont été connues jusqu'ici sous le nom d'*intégrales particulières*.

Pour remplir cet objet, je remarque que puisque $y = 2 n a x + a^2$ est une des intégrales de la proposée; si j'en tire la valeur de l'arbitraire a , ce qui me donne $a = - n x + \sqrt{(y + n^2 x^2)}$, & si je différencie, ce qui fait évanouir a , j'aurai une équation qui reviendra nécessairement à la proposée en faisant évanouir les radicaux:

or cette équation différenciée devient $0 = -ng + \sqrt{(y' + n^2 x'^2)} - \sqrt{(y + n^2 x^2)}$, & $0 = -ng + \sqrt{(y' + n^2 x'^2)} + \sqrt{(y + n^2 x^2)}$; car si on fait évanouir les radicaux dans ces deux équations différencielles, on trouvera également la proposée; or la première de ces équations étant intégrée, reproduit celle qui a été différenciée, ce qui est tout simple; mais si je multiplie la seconde par $-\cos.(\frac{\pi x}{g})$, elle deviendra

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y' + n^2 x'^2)} \cos. \left[\pi \left(\frac{x}{g} + 1 \right) \right] \\ & - \sqrt{(y + n^2 x^2)} \cos. \left(\frac{\pi x}{g} \right) = -ng \cos. \left(\frac{\pi x}{g} \right), \\ & \text{dont l'intégrale est } \sqrt{(y + n^2 x^2)} \cos. \left(\frac{\pi x}{g} \right) = b \\ & + \frac{ng}{2} \cos. \left(\frac{\pi x}{g} \right), \text{ ou élevant au carré, } y + n^2 x^2 \\ & = \left[\frac{ng}{2} + b \cos. \left(\frac{\pi x}{g} \right) \right]^2 \text{ Soit (fig. 1.) la} \end{aligned}$$

courbe ${}_0M$, DM le lieu de cette équation; imaginons l'abscisse x divisée en un nombre indéterminé de parties égales, chacune à la différence finie g , comme AB , BC , &c. à compter du point fixe A , origine des coordonnées; ainsi AB sera la première division, BC la seconde, ainsi de suite.

Cela posé, si on considère une abscisse quelconque $AP = x$, il est clair, quel que soit le numéro de la division KR , où est logée l'extrémité de cette abscisse, & quel que soit le lieu de ce point P dans la division, qu'on pourra toujours trouver une abscisse ${}_0P$, contenue dans la première division que j'appelle X , & un nombre entier μ , tel qu'on ait $x = X + g\mu$; car si l'on prend $KP = {}_0P$, il est clair que ${}_0P$ sera égal à AK , c'est-à-dire, multiple de g . Maintenant, si on passe de l'abscisse x à l'abscisse $x + g$, il est clair qu'on aura X constant & μ changé en $\mu + 1$, c'est-à-dire, qu'on aura, $x + g$

$= X + g (\mu + 1)$; donc si on met pour x la valeur $X + g \mu$ dans l'équation, on pourra regarder X comme une quantité constante, en différenciant aux différences finies, suivant le système de différenciation

dont il est ici question; donc comme on a $\text{cof. } \frac{\pi x}{g}$

$$= \text{cof. } \pi \left(\frac{X}{g} + \mu \right) = \text{cof. } \frac{\pi X}{g} \text{ cof. } \pi \mu \text{ à cause}$$

de $\text{fin. } \pi \mu = 0$. au lieu de $b \text{ cof. } \frac{\pi x}{g}$ on pourra

écrire $b \text{ cof. } \pi \mu$, en comprenant dans la constante b la

quantité $\text{cof. } \left(\frac{\pi X}{g} \right)$: ainsi notre équation sera $y + n^2 x^2$

$$= \left(\frac{n g}{2} + b \text{ cof. } \pi \mu \right)^2, b \text{ étant une autre quantité.}$$

Pour déterminer cette arbitraire b , on peut se donner à volonté la courbe ${}_0D, D$ étendue le long de la première division, & alors pour l'abscisse X , l'ordonnée Y sera déterminée par hypothèse; on aura donc, en représentant par o le numéro de la première division,

$$\sqrt{(Y + n^2 X^2)} - \frac{n g}{2} = b, \text{ \& } y + n^2 x^2$$

$$= \left[\frac{n g}{2} + \left[\sqrt{(Y + n^2 X^2)} - \frac{n g}{2} \right] \text{ cof. } \pi \mu \right]^2.$$

On voit donc que quand la courbe ${}_0D, D$ sera sans cosinus, l'équation n'en contiendra d'autres que $\text{cof. } \pi \mu$, qui sera toujours 1 ou -1 . Je retiendrai la lettre b pour abrégé, dans la suite de ce Mémoire; il suffit d'avoir démontré qu'elle est toujours une fonction algébrique des coordonnées de la courbe ${}_0D, D$. Pour mon objet, je considérerai cette

$$\text{équation } y = b^2 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 - n b g \text{ cof. } \pi \mu,$$

comme celle d'un polygone rectiligne. Je m'explique: soit d'abord construite la parabole CEG (*fig. 2*), dont l'équation

$$\text{est } z = b^2 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2, \text{ c'est-à-dire, la partie}$$

de y , qui est sans cosinus; menons les ordonnées de cette parabole par les points de division de l'abscisse déterminés comme ci-dessus; il est clair que si on augmente & si on diminue ces ordonnées alternativement de la quantité ngb , on aura les valeurs de y correspondantes aux abscisses $X + g\mu$, $X + g(\mu + 1)$, &c. & si on joint les extrémités de ces nouvelles ordonnées par les droites HL , LN , NO , &c. on aura un polygone rectiligne qui pourra être considéré comme le lieu de l'équation, en ne s'arrêtant pas aux ordonnées intermédiaires entre deux angles consécutifs. Or je dis que si on prend l'équation de l'un des côtés de ce polygone, on trouvera qu'elle est de la forme $y = 2nax + a^2$, & par conséquent que chaque côté de ce polygone appartient à quelques-unes des droites de la première intégrale; il est donc facile de concevoir, comme M. de la Grange l'a démontré pour les équations en différences infiniment petites, que l'équation de ce polygone rectiligne doit vérifier la proposée.

Maintenant, si la différence g , d'abord finie, diminue successivement jusqu'à devenir zéro, le polygone se confondra avec la courbe CEG , & sera la seconde intégrale de la proposée dans le cas des différences infiniment petites. Cette seconde intégrale contient une constante arbitraire comme la première; ce qui est tout simple, puisque la seconde équation, d'abord en différences finies, devient

$$\partial \left[\cos. \left(\frac{\pi x}{\partial x} \right) \sqrt{y + n^2 x^2} \right] = n \partial x \cos. \left(\frac{\pi x}{\partial x} \right),$$

$$\text{ou en divisant par } \cos. \left(\frac{\pi x}{\partial x} \right), \partial \left[\cos. (\pi \mu) \sqrt{y + n^2 x^2} \right]$$

$$= n \partial x \cos. \pi \mu, \text{ ce qui donne } y = b^2 - n^2 x^2 + n b \partial x \cos. (\pi \mu).$$

Les intégrales connues jusqu'ici sous le nom d'intégrales particulières, ne sont donc que des intégrales incomplètes, tirées d'une intégrale complète, à laquelle on n'avoit pas encore pensé.

Pour avoir dans cet exemple l'intégrale particulière

connue, il faut faire $b = 0$; le nombre μ exprime, comme dans le cas des différences finies, le rang de la division, à compter d'un point fixe, où est logée l'extrémité de l'abscisse indéterminée x ; ce nombre d'abord fini, augmente successivement, & devient infini dans le cas des différences évanouissantes, pour toute abscisse finie; dès-lors nous n'en avons plus d'idée, mais nous n'en savons pas moins que $\cos. \pi \mu$ est toujours 1 ou -1 , & que $\cos. \pi (\mu + 1) = -\cos. \pi \mu$.

Je retiens le terme $n b \partial x \cos. \pi \mu$, parce que ce terme différencié devient $-2 n b \partial x \cos. \pi \mu$, & donne $-2 n (n x + b \cos. \pi \mu)$ pour la vraie valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$ qu'on n'obtiendrait pas si on le négligeoit.

Remarques sur les principes de la différenciation.

LA nécessité de retenir ce terme différentiel, donne lieu à une remarque importante; c'est que la détermination des tangentes est une pure hypothèse, & dépend du polygone rectiligne qu'on emploie dans cette détermination. Je m'explique: on ne détermine pas les tangentes des courbes, quoique l'usage ait consacré cette expression; on compare les courbes à des polygones rectilignes qui ne sont pas ces courbes par conséquent, mais qui s'en rapprochent successivement par la diminution d'un paramètre, & finalement se confondent avec elle par l'évanouissement de ce même paramètre. On détermine la direction d'un côté de ce polygone correspondant d'abord à une partie finie de la courbe; cette direction est une fonction de deux abscisses dont la différence est d'abord finie, & du paramètre dont l'évanouissement procure la coïncidence avec la courbe. Quand le paramètre s'évanouit, la différence des abscisses s'évanouit, & la direction du côté, à cet instant, est regardée comme la tangente de la courbe. Prenons en exemple notre seconde intégrale pour l'équation en différences infiniment petites, qui est: $y = b^2 - n^2 x^2$. Déterminons la

valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$ à quoi se réduit le problème des tangentes; pour cela, soit cette parabole représentée par la fig. *CEG*. Imaginons l'axe des abscisses divisé en parties égales, à compter du point *T*, par les points de division; menons les ordonnées *TT'*, *VV'*, *RR'*, & par les extrémités menons les cordes *TV'*, *V'R'*, *R'S'*, &c. par ce moyen on aura pour la valeur de $\frac{\Delta y}{g}$, — $2 n^2 x$ — $n^2 g$; [Δy exprimant la différence de deux ordonnées consécutives, & g une division de l'abscisse] & quand g devient zéro, on a $\frac{\partial y}{\partial x} = - 2 n^2 x$. Cependant si on emploie cette valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$, on trouvera que l'équation différentielle n'est pas vérifiée; cela vient de ce que ce polygone n'est pas celui qu'il faut employer dans cette occasion; il y en a beaucoup d'autres qui se confondent aussi avec la parabole par l'évanouissement de la différence finie g . Qui nous guidera dans le choix? la réponse est simple; l'équation en différences infiniment petites est limite d'une équation en différences finies, nous connoissons le polygone qui vérifie cette équation, & qui par conséquent la vérifiera encore quand elle tombera dans l'infiniment petit; c'est ce polygone qu'il faut choisir, ou quelqu'autre donnant le même résultat.

L'équation de ce polygone qui vérifie la proposée en différences finies est $y = - n^2 x^2 + \frac{n^2 g^2}{4} + n b g \cos. \pi \mu + b^2$; donc $\frac{\Delta y}{g} = - n^2 g - 2 n (n x + b \cos. \pi \mu)$. Si on suppose $g = 0$, on a pour la vraie valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$, — $2 n (n x + b \cos. \pi \mu)$ qui est double au même point; à savoir, — $2 n (n x + b)$ & — $2 n (n x - b)$; j'expliquerai dans la suite ce que

que cela signifie. On auroit obtenu le même résultat si on avoit $y = -n^2 x^2 + nb g \cos. \pi \mu + b^2 + g X$, X étant une fonction de x sans cosinus. Donc, comme je l'ai observé dans une autre occasion, pour former ou vérifier une équation en différences infiniment petites, il faut considérer soigneusement l'équation en différences finies dont elle est dérivée, autrement on court risque d'être induit en erreur dans plusieurs cas.

Pour mieux éclaircir encore la théorie précédente, je donnerai quelques exemples, & d'abord le suivant que M. le marquis de L'Hospital se propose dans son Analyse des infiniment petits, *section 10.^e problème 7.^e* Présenté le 4 mars 1790.

Soit une droite AO (fig. 3.) qui ait un commencement fixe au point A ; soit une infinité de paraboles BFD , CDG , qui aient pour axe commun la droite AO & pour paramètre les droites AB , AC , interceptées entre le point fixe A & leurs sommets BC : on demande la nature de la ligne AFG qui touche toutes ces paraboles. Je supposerai que la tangente de la parabole est double de l'abscisse comptée du sommet d'après l'hypothèse du polygone inscrit que suivoit M. de L'Hospital. Je dois chercher la solution dans le cas des différences finies, afin de la trouver d'une manière plus claire dans le cas des différences évanouissantes, & pour cela je poserai le problème d'une manière un peu différente. Les paraboles étant décrites, je suppose qu'on divise l'abscisse en parties égales chacune à g , que par ces points de division on élève des ordonnées, & que par l'extrémité de chaque deux ordonnées consécutives on mène des cordes; il faut imaginer cette opération faite pour chaque parabole; cela posé, nous avons une infinité de polygones rectilignes que j'appelle des individus, & je demande de trouver, s'il en existe, un nouveau polygone qui soit tel que chacun de ses côtés soit un côté des individus, & que deux côtés consécutifs ne puissent pas appartenir au même individu. En nommant a la distance indéterminée du point fixe au

sommet de l'une des paraboles, x l'abscisse comptée du même point fixe, & y l'ordonnée correspondante,

on a $y^2 = ax - a^2$: cette équation donne $a = \frac{x}{2}$

+ $\sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)}$; différenciant pour faire évanouir

la constante, on a $-\frac{g}{2} = \sqrt{(\frac{x'^2}{4} - y'^2)}$

— $\sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)}$, & $-\frac{g}{2} = \sqrt{(\frac{x'^2}{4} - y'^2)}$

+ $\sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)}$. Or comme la relation entre deux

ordonnées consécutives doit être la même pour tous nos polygones individus & pour le polygone cherché, comme cette relation est exprimée par les équations ci-dessus, puisqu'elles viennent également de l'élimination de la constante, il s'en suit que l'une d'elles exprime les polygones individus, & l'autre le polygone cherché; multipliant donc la dernière par — $\cos. \pi \mu$, & intégrant, on aura :

$$\cos. (\pi \mu) \sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)} = -b - \frac{g}{4} \cos. \pi \mu;$$

donc élevant au carré on aura $y^2 = \frac{x^2}{4} - (b \cos. \pi \mu$

$$+ \frac{g}{4})^2$$
 & $y^2 = \frac{x^2}{4} - b^2 - \frac{b \partial x}{2} \cos. \pi \mu;$

si $g = \partial x$.

EXEMPLE I I.^e

SOIT l'équation $\frac{\pi^2 \partial x^2}{p^2} = \frac{\partial y^2}{q^2 - y^2}$, dont la

première intégrale est $\pi (\frac{x}{p} + a) = \text{arc sin. } \frac{y}{q}$,

a est l'arbitraire; différenciant aux différences finies, &

faisant $\Delta x =$ la constante g , on a $\frac{\pi g}{p} = \text{arc sin. } \frac{y'}{q}$

— $\text{arc sin. } \frac{y}{q}$; y' désignant l'y consécutif. Maintenant,

au lieu de arc sin. $\frac{y}{q}$, on peut écrire $(2k + 1)\pi$ — arc sin. $\frac{y}{q}$, k étant un nombre entier, parce que cet arc a aussi pour sinus $\frac{y}{q}$; ainsi $\pi(2k + 1 + \frac{g}{p})$ — arc sin. $\frac{y}{q}$ + arc sin. $\frac{y}{q}$; multipliant par — cos. $(\pi\mu)$, & intégrant, on a

$$\text{cos.}(\pi\mu) \text{ arc sin.} \frac{y}{q} = \pi \left(b + \frac{2k + 1 + \frac{g}{p}}{2} \text{cos.} \pi\mu; \right)$$

multipliant par cos. $(\pi\mu)$, arc sin. $\frac{y}{q} = \pi \left(b \text{cos.} \pi\mu + \frac{2k + 1 + \frac{g}{p}}{2} \right)$, ou enfin $\frac{y}{q} = \text{sin.} \pi \left(k + \frac{1}{2} \right.$

$\left. + \frac{g}{2p} + b \text{cos.} \pi\mu \right)$, faisant $g = dx$, on a

$$\frac{y}{q} = \text{cos.} \pi k \cdot \text{cos.} \left(\pi b + \frac{\pi dx \text{cos.} \pi\mu}{2p} \right),$$

& finalement $\frac{y}{q} = \text{cos.} \pi k \cdot \text{cos.} \pi b - \frac{\pi dx}{2p}$

sin. $\pi b \cdot \text{cos.} \pi k \cdot \text{cos.} \pi\mu$. k exprime une double valeur, comme si au lieu de cos. πk , il y avoit $\sqrt{(1)}$ qui est évidemment 1 ou — 1.

On auroit l'intégrale connue jusqu'ici sous le nom d'intégrale particulière, en faisant πb un multiple par de la demi-circonférence.

EXEMPLE III.

Soit l'équation $\partial x^2 = \frac{\partial y^2}{1 + y^2}$, dont la première intégrale est $a + x = L[y + \sqrt{(1 + y^2)}]$; différenciant aux différences finies, & faisant $\Delta x =$ la constante g , on a $g = L[y' + \sqrt{(1 + y'^2)}]$

$-L[y + \sqrt{(1+y^2)}] \& g = L[y' + \sqrt{(1+y'^2)}]$
 $+ L\left(\frac{1}{y - \sqrt{(1+y^2)}}\right) = L[y' + \sqrt{(1+y'^2)}]$
 $+ L(-1) + L[y + \sqrt{(1+y^2)}]$, donc
 $g - L(-1) = L[y' + \sqrt{(1+y'^2)}]$
 $+ L[y + \sqrt{(1+y^2)}]$; multipliant donc par
 $-\text{cof. } \pi \mu$, & intégrant, on a :

$$\text{cof. } \pi \mu L[y + \sqrt{(1+y^2)}] = \frac{[g - L(-1)] \text{cof. } \pi \mu}{1}$$

$+ Lb$, b étant une nouvelle arbitraire; multipliant
 par $\text{cof. } \pi \mu$, on aura $L[y + \sqrt{(1+y^2)}]$
 $= \text{cof. } \pi \mu Lb - L\sqrt{(-1)} + Lh^{\frac{e}{2}}$;
 h est la base du système des logarithmes : donc passant
 des logarithmes aux nombres, & chassant le radical, on aura

$$2y\sqrt{(-1)} = b \text{cof. } \pi \mu h^{\frac{e}{2}} + b - \text{cof. } \pi \mu h^{\frac{e}{2}}.$$

Soit maintenant $g = \partial x$, on aura, en ne retenant de ∂x
 que la première puissance, $2y\sqrt{(-1)} = b \text{cof. } \pi \mu$
 $(1 + \frac{\partial x}{2}) + b - \text{cof. } \pi \mu (1 - \frac{\partial x}{2})$, ou

$$2y\sqrt{(-1)} = b + \frac{1}{b} + (b - \frac{1}{b}) \text{cof. } \pi \mu \frac{\partial x}{2};$$

car par la vérification, on trouvera que cette dernière
 expression revient à la précédente.

Supposons maintenant $b = f\sqrt{(-1)}$, on aura
 $2y = f - \frac{1}{f} + (f + \frac{1}{f}) \text{cof. } (\pi \mu) \frac{\partial x}{2}$,
 équation dans laquelle il ne reste plus d'imaginaire, & qui
 vérifie la proposée.

Par la comparaison de l'équation en différences finies
 avec celle en différences infiniment petites qui en est
 dérivée, j'ai aperçu que les intégrales connues jusqu'ici
 sous le nom d'*intégrales particulières*, n'étoient que des
 intégrales incomplètes tirées d'une intégrale complète

qui n'étoit pas encore connue; mais par des considérations géométriques fort simples, on pouvoit s'assurer de l'existence de cette seconde intégrale, & même d'une infinité d'autres qui dépendent du système de différenciation. Rendons ceci sensible par un exemple. Soit A (fig. 2) l'origine des coordonnées perpendiculaires entre elles, AZ l'axe des x , & AV l'axe des y ; soient entendues une infinité de droites Pg , Pg' , Rh , Rh' , Ti , Ti' , &c. toutes comprises dans l'équation $y = 2nax + a^2$, & résultantes des diverses valeurs qu'on peut donner à la constante a , par conséquent vérifiant toutes également l'équation différentielle, $y = \frac{x^2 dy}{dx}$

+ $\frac{dy^2}{4n^2 dx^2}$ qu'on obtiendrait en différenciant & éli-

minant la constante introduite dans l'intégration. On sait que cette équation différentielle est vérifiée non-seulement par ces droites, mais par la parabole $ghAg'h'$ qui les touche toutes, comme l'a démontré M. de la Grange, & dont l'équation est $y = -n^2 x^2$. Maintenant si on propose ce problème: *Quelle doit être la route d'un point décrivant, pour que dans sa marche il soit toujours sur quelques-unes des tangentes?* je dis que la parabole ci-dessus mentionnée n'est pas à beaucoup près la seule courbe qui résolve le problème. Effectivement, si on imagine une courbe quelconque $PKTYO$, & de chacun des points P , R , T , &c. les deux tangentes Pg , Pg' ; Rh , Rh' ; Ti , Ti' , &c. on peut concevoir le point décrivant placé d'abord en G , infiniment près de notre courbe PTO . Cela posé, il est clair qu'il peut décrire, 1.^o l'élément infiniment petit GP ; 2.^o l'élément PQ , en s'écartant infiniment peu de la courbe, & faisant un angle fini avec sa première direction; 3.^o l'élément QR , différant infiniment peu en position du premier élément GP , en rentrant sur la courbe PTO ; 4.^o l'élément RS , en s'écartant de la courbe infiniment peu, qui diffère infiniment peu en

position de l'élément PQ , & ainsi de suite. Le problème peut donc se résoudre en tenant le point décrivant infiniment près d'une courbe donnée; mais la direction sera double au même point, & fera des angles finis avec cette courbe considérée comme limite du polygone inscrit.

Quand la courbe, dont le point décrivant doit se tenir infiniment près, sera donnée, il n'y aura d'autre problème à résoudre qu'à déterminer les deux tangentes à chaque point, ce qui se fera sans difficulté par un calcul ordinaire, mais non pas toujours sans quelque longueur. En général il est plus simple de chercher le terme différentiel qu'il faut ajouter à la valeur de y pour obtenir la détermination désirée.

E X E M P L E.

Le point décrivant doit se tenir infiniment près de la directrice de la parabole. L'équation de la courbe donnée se change en celle d'une droite parallèle à l'axe des x , éloignée de cet axe d'une quantité égale au quart du paramètre; ainsi son équation est $y = \frac{1}{4n^2}$, mais pour qu'elle vérifie la proposée différentielle, qui est

$$y = \frac{x \partial y}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{4n^2 \partial x^2}, \text{ il faut écrire } y = \frac{1}{4n^2} + \cos.(\pi\mu)(a \partial x + b \partial y),$$

$a \partial x + b \partial y$ étant multiple d'une différentielle constante, ou du moins telle que la différentielle s'élève au second ordre. On aura donc

$$\frac{\partial y}{\partial x} (1 + 2b \cos. \pi\mu) = -2a \cos.(\pi\mu);$$

donc on doit avoir

$$\frac{1}{4n^2} (1 + 2b \cos. \pi\mu)^2 = -2ax \cos. \pi\mu (1 + 2b \cos. \pi\mu) + \frac{a^2}{n^2};$$

Les quantités sans cosinus doivent être égales entr'elles; il en est de même des quantités qui le contiennent, autrement on auroit des cosinus dans les expressions de a &

de b . On aura donc $\frac{1}{4n^2} (1 + 4b^2) = -4abx$
 $+ \frac{a^2}{n^2}$ & $\frac{b}{2n^2} = -ax$. En comparant ces deux
 équations, on trouvera $a = \frac{1}{2\sqrt{(1 + 4n^2x^2)}}$ &
 $a \partial x + b \partial y = \frac{h^2 n^2 y}{2\sqrt{(1 + 4n^2x^2)}} \partial \left(\frac{x}{h^2 n^2 y} \right)$,
 quantité qu'il faut faire multiple d'une différentielle con-
 stante, ou du moins qui ne doit pas rester du même ordre
 dans la différenciation. Cette condition sera souvent difficile
 à vérifier utilement.

Autre Méthode pour trouver le terme différentiel.

COMMENÇONS par l'équation différentielle $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$
 $+ 2P \frac{\partial y}{\partial x} = Q$, P & Q sont des fonctions de x
 & de y , sans radicaux, qui donnent $P + \frac{\partial y}{\partial x}$
 $= \sqrt{(P^2 + Q)}$. Or ce radical indique deux branches:
 on obtient l'une en formant les ∂y consécutifs par l'ad-
 dition continue des termes $\partial x \sqrt{(P^2 + Q)}$,
 $\partial x' \sqrt{(P'^2 + Q')}$, &c. on obtient l'autre par la
 soustraction continue des mêmes termes; mais on peut
 former un ∂y par l'addition du radical, & le ∂y consécutif
 par la soustraction du même radical, & ainsi de suite alter-
 nativement. Cette condition est exprimée par l'équation
 $P + \frac{\partial y}{\partial x} = \cos. (\pi \mu) \sqrt{(P^2 + Q)}$, μ exprime
 comme ci-dessus, le nombre infini d'éléments comptés d'un
 point fixe; or si ϕ est le facteur qui rend $\partial y + P \partial x$
 différentielle complète, on a $\phi (\partial y + P \partial x)$
 $= - \frac{\phi \partial x \cos. \pi \mu}{2} \sqrt{(P^2 + Q)}$. On peut aussi
 écrire en renversant $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{-P + \cos. (\pi \mu) \sqrt{(P^2 + Q)}}$.

$= \frac{P}{Q} + \frac{\text{cof. } \pi \mu \sqrt{(P^2 + Q)}}{Q}$; donc en nommant
 \downarrow le multiplicateur qui rend $Q \partial x - P \partial y$ diffé-
 rencielle complete, on a $S. \downarrow (Q \partial x - P \partial y)$
 $= \frac{- \downarrow \partial y \text{ cof. } \pi \mu \sqrt{(P^2 + Q)}}{2}$. Si les équations
 $P^2 + Q = 0$, & $S. \phi (P \partial x + \partial y) = 0$ ou
 $S. \downarrow (Q \partial x - P \partial y) = 0$ peuvent subsister en
 même temps, on aura l'équation de forme ordinaire, que
 M. de la Grange a appris à déterminer.

E X E M P L E.

ON propose de trouver une courbe, telle que menant
 d'un point donné des perpendiculaires sur les tangentes,
 ou pour mieux dire, sur les élémens de cette courbe,
 prolongés s'il le faut, ces perpendiculaires soient égales
 à une constante b . Pour résoudre ce problème, M. de

la Grange trouve l'équation différentielle $y - x \frac{\partial y}{\partial x}$
 $= b \sqrt{(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2})}$; tirant la valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$, on
 a $\partial y + \frac{x y \partial x}{b^2 - x^2} = \frac{b \partial x \text{ cof. } (\pi \mu) \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}}{b^2 - x^2}$;

divisant par $\sqrt{(b^2 - x^2)}$ & intégrant, on a

$$\frac{y}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = m - \frac{b \partial x \text{ cof. } \pi \mu}{2 (b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}.$$

Les deux parties $\frac{y}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = m$ & $\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}$
 supposées chacune zéro, donneront la même courbe, en
 faisant $m = 1$; c'est celle de M. de la Grange.

On peut mettre l'équation différentielle sous une autre
 forme, & écrire :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-x y}{b^2 - x^2} + \frac{b \text{ cof. } \pi \mu}{b^2 - x^2} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)},$$

ou $\frac{\partial x}{\partial y} = \left[\frac{xy}{b^2 - x^2} + \frac{b \cos. \pi \mu}{b^2 - x^2} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)} \right]$
 $\frac{b^2 - x^2}{y^2 - b^2}$. Donc $\partial x = \frac{xy \partial y}{y^2 - b^2} = \frac{b \partial y \cos. \pi \mu}{y^2 - b^2}$
 $\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}$, divisant par $\sqrt{(y^2 - b^2)}$ &
 intégrant, on aura $\frac{x}{\sqrt{(y^2 - b^2)}} = \pi - \frac{b \partial y \cos. \pi \mu}{2 (y^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}$
 $\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}$.

Cette théorie s'étend facilement aux équations plus élevées du premier ordre : par exemple, soit l'équation

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^3} - P \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + Q \frac{\partial y}{\partial x} = R, \text{ \& } a, b, c,$$

les trois valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$; on pourra faire $\frac{\partial y}{\partial x}$
 $= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos. \pi \mu$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a+c}{2}$
 $+ \frac{a-c}{2} \cos. \pi \mu$, & $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b+c}{2}$
 $+ \frac{b-c}{2} \cos. \pi \mu$. Soient ϕ , ψ , λ , trois facteurs
 convenables; on aura

$$S. \phi \left(\partial y - \frac{a+b}{2} \partial x \right) = - \frac{\phi \partial x (a-b) \cos. \pi \mu}{4}$$

$$S. \psi \left(\partial y - \frac{a+c}{2} \partial x \right) = - \frac{\psi \partial x (a-c) \cos. \pi \mu}{4}$$

$$S. \lambda \left(\partial y - \frac{b+c}{2} \partial x \right) = - \frac{\lambda \partial x (b-c) \cos. \pi \mu}{4}$$

Si les équations $a - b = 0$ & $S. \phi \left(\partial y - \frac{a+b}{2} \partial x \right)$,
 $= 0$ donnent la même courbe, cette courbe sera une
 des intégrales déterminées par M. de la Grange; même
 chose à dire si $a - c = 0$ & $S. \psi \left(\partial y - \frac{a+c}{2} \partial x \right)$,
 $= 0$ s'accordent aussi à donner la même courbe. On
 voit donc que nous pouvons trouver la seconde intégrale

de l'équation $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + 2 P \frac{\partial y}{\partial x} = Q$, & en général des équations élevées dans beaucoup de cas où on ne pourroit pas obtenir la première intégrale; par exemple, quand l'équation élevée au second degré manquera de second terme; c'est-à-dire, quand P sera zéro, on y satisfera toujours par une parallèle à l'axe des x , car ϕ devient ici l'unité, & P étant zéro, on a évidemment $S. \partial y$, ou $y =$ une constante; on aura donc $y + C = \frac{-\partial x \cos. \pi \mu}{2} V(Q)$.

E X E M P L E.

ON demande de trouver la route d'un point décrivant pour que les espaces linéaires parcourus soient doubles de l'abscisse correspondante, & pour que les espaces superficiels compris entre deux ordonnées, l'espace linéaire & l'axe des abscisses, soient proportionnels à ces mêmes abscisses.

S O L U T I O N.

ON a évidemment $S. V(\partial x^2 + \partial y^2) = 2 x$; donc $\partial y = \partial x V(3)$, & $y = a \pm x V(3)$, a étant l'arbitraire introduite dans l'intégration. Cette intégrale indique d'abord deux droites $B M, B M'$, (*fig. 5*) faisant chacune avec la ligne $B G$, parallèle à l'axe des x , un angle dont la tangente est $V(3)$, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de cette ligne; mais si on prend les espaces superficiels, d'abord l'espace $A B M P$ & ensuite l'espace $A B M' P$, on trouvera, en nommant $A B = a$, que le premier est $a x + \frac{x^2 V(3)}{2}$; & le second, $a x - \frac{x^2 V(3)}{2}$; donc ni l'un ni l'autre ne peuvent vérifier la seconde condition du problème; mais je dis qu'on ne peut pas conclure qu'il n'a pas de solution. Effectivement, si l'on décrit d'abord l'élément

BC , appartenant à la première ligne, ensuite l'élément CD , parallèle à la seconde, puis l'élément DE , parallèle à la première, & ainsi de suite, il est clair qu'on n'en décrira pas moins des espaces proportionnels à l'abscisse; mais si ces élémens sont évanouissans, le point décrivant s'écartera infiniment peu de la parallèle BG , & l'espace superficiel $ABOP$ sera évidemment aussi proportionnel à l'abscisse, & par conséquent vérifiera la seconde condition du problème.

Il me reste une chose très-singulière à remarquer, c'est qu'Euler a rencontré une de ces secondes intégrales complètes. Il se propose d'abord d'intégrer l'équation $y \partial x - nx \partial y = a \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, page 538. du premier volume de son *Calcul intégral*. Il intègre facilement cette équation pour plusieurs valeurs de n ;

mais quand $n = 1$, il trouve, en faisant $\frac{\partial y}{\partial x} = p$,

$y = px \pm a \sqrt{1 + p^2}$, équation qui se présente

naturellement, & $x = \frac{C}{p^{\frac{1}{n-1}}} - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ où à

cause de $n = 1$, il est évident que l'exposant $\frac{1}{n-1}$

est infini. Euler remarque d'abord que si on fait $C = 0$, on a $x^2 + y^2 = a^2$, mais que si C n'est pas zéro, des changemens infiniment petits dans p opèrent dans x des changemens finis; & par conséquent on peut donc, pour une même valeur de p , ou des valeurs infiniment peu différentes, obtenir toutes les valeurs de x , & par conséquent regarder l'équation $y = px \pm a \sqrt{1 + p^2}$ comme l'intégrale, en faisant p constant, & le regardant comme l'arbitraire introduite dans l'intégration; mais il est clair qu'on peut éliminer p par le moyen des équations com-

binées $y = px \pm a \sqrt{1 + p^2}$ & $x = \frac{C}{p^{\frac{1}{n-1}}}$

— $\frac{a^p}{\sqrt{1+p^2}}$. Cette équation, il est vrai, est indéterminée & ne nous apprend rien en général, mais elle ne représente pas moins la seconde intégrale complète, puisqu'on a obtenu l'équation $x^2 + y^2 = a'$, en donnant à la constante une valeur déterminée, savoir, zéro.

*SUITE DU MÉMOIRE SUR LES PRINCIPES
DE LA DIFFÉRENCIATION, &c.*

Par M. CHARLES.

ÉTANT donnée l'équation $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + 2P \frac{\partial y}{\partial x} = Q$,

dans laquelle P & Q sont des fonctions quelconques rationnelles de x & y , j'ai fait voir qu'on avoit pour intégrale complète de cette équation :

$$S. \phi (\partial y + P \partial x) = \frac{-\phi \partial x \cos. \pi \mu}{2} \sqrt{(P^2 + Q)}$$

+ A . ϕ est le facteur qui rend la quantité $\partial y + P \partial x$ différentielle complète. Je me propose ici de montrer que des résultats analogues ont lieu pour les équations des ordres supérieurs, & sur-tout que pour cette dernière espèce, les courbes résultantes sont presque toujours sans angle fini, & quelquefois aussi pour les équations du premier ordre ; ce qui les rendra plus propres à résoudre les problèmes dont on s'est occupé jusqu'à présent, principalement dans la mécanique.

Pour m'expliquer clairement, je suis obligé de rappeler quelques-unes des choses dites déjà dans mes Mémoires précédens.

J'ai fait voir que l'équation en différences finies :

$$y = \frac{x \Delta y}{g} + \frac{\Delta y^2}{g^2} \quad (\text{où } g \text{ exprime la différence constante de } x), \text{ étoit vérifiée par l'équation } y = b^x$$

$$+ \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 + n b g \operatorname{cof.} \left(\frac{\pi x}{g} \right) . b \text{ est}$$

l'arbitraire introduite dans l'intégration.

Soit $EMGN$ (*fig. 6*) la courbe, lieu de cette intégrale étendue sur les abscisses positives & négatives, A l'origine des coordonnées perpendiculaires entre elles, AZ l'axe des x , & AV l'axe des y ; on peut imaginer les abscisses, tant positives que négatives, divisées en parties égales chacune à g , à compter du point fixe A , & on aura les cellules AB , BC , &c. Je donne pour indice à la première 0, à la seconde 1, à la troisième 2, &c. Cela posé, il est clair que, quelle que soit la grandeur de l'abscisse indéterminée x , si on en retranche la différence finie g autant de fois que possible, le reste, après toutes ces soustractions, sera nécessairement moindre que g , & je le désigne par X . Prenant $A_0P = X$, il est clair que ce point $_0P$ sera dans la première division; donc si on nomme μ le nombre des soustractions, on aura $x = X + g\mu$, & si x vient à augmenter ou diminuer de la différence finie, X reste fixe & μ devient $\mu + 1$ ou $\mu - 1$; μ indique le nombre des soustractions,

$$\mu + 1 \text{ le nombre des cellules; maintenant } \operatorname{cof.} \left(\frac{\pi x}{g} \right) \\ = \operatorname{cof.} \left[\pi \left(\frac{X}{g} + \mu \right) \right] = \operatorname{cof.} \pi \frac{X}{g} \operatorname{cof.} (\pi \mu).$$

La quantité X ne doit pas varier dans la différenciation; donc on peut comprendre dans la constante b la quantité

$$\operatorname{cof.} \left(\frac{\pi X}{g} \right), \text{ \& écrire : } y = b^2 + \frac{\pi^2 g^2}{4} - n^2 x^2 \\ + n b g \operatorname{cof.} \pi \mu.$$

Si par tous les points de division, on élève des parallèles à l'axe AV jusqu'à la rencontre de la courbe, & si on joint leurs extrémités par des cordes, on aura un polygone que cette équation pourra représenter, pourvu qu'on fasse $x = X$, $x = X + g$, $x = X + 2g$, &c.

successivement, & $\mu + 1$ exprimera le nombre des côtés du polygone correspondans à une abscisse quelconque x . Il est à propos maintenant d'examiner ce que devient notre équation dans les différentes suppositions qu'on peut faire sur la valeur de la constante b .

Soit d'abord $b = 0$; on aura $y = \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2$.

$$\frac{\Delta y}{g} = -2 n^2 x - n^2 g, \quad \frac{\Delta^2 y}{g^2} = -2 n^2, \quad \frac{\Delta^3 y}{g^3} = 0,$$

& ainsi de suite pour les différences plus élevées.

Soit $g = 0$, on aura $y = -n^2 x^2$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -2 n^2 x$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2 n^2, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0, \text{ \&c. comme dans une intégrale ordinaire.}$$

Faisons maintenant $b = c g$, c étant une nouvelle quantité finie qui ne dépend pas de g , nous aurons:

$$y = c^2 g^2 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 + n c g^2 \cos. \pi \mu,$$

$$\frac{\Delta y}{g} = -2 n^2 x - n^2 g - 2 n c g \cos. (\pi \mu),$$

$$\frac{\Delta^2 y}{g^2} = -2 n^2 + 4 n c \cos. \pi \mu, \quad \frac{\Delta^3 y}{g^3} = -\frac{8 n c \cos. \pi \mu}{g}, \text{ \&c.}$$

Soit $g = 0$, on aura $y = -n^2 x^2$ & $\frac{\partial y}{\partial x} = -2 n^2 x$ comme ci-dessus. Ainsi cette courbe n'a pas d'angles finis; mais $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2 n^2 + 4 n c \cos. \pi \mu$; elle a donc au même point deux rayons de développée qui diffèrent d'une quantité finie. $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ devient infini, ainsi de suite.

Soit encore $b = a g^2$, on aura $y = a^2 g^4 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 + n a g^3 \cos. (\pi \mu)$;

$$\frac{\Delta y}{g} = -2 n^2 x$$

$— n^2 g — 2 n a g^2 \cos. (\pi \mu); \frac{\Delta^3 y}{g^2} = — 2 n^2$
 $+ 4 n a g \cos. (\pi \mu); \frac{\Delta^3 y}{g^3} = — 8 n a. \cos. \pi \mu.$
 $\frac{\Delta^4 y}{g^4} = \frac{16 n a \cos. \pi \mu}{g}, \text{ \&c.}$ Or si l'on suppose
 $g = 0$, on aura $y = — n^2 x^2$, $\frac{\partial y}{\partial x} = — 2 n^2 x$,
 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = — 2 n^2$ comme dans la parabole ordinaire;
 mais $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = — 8 n a \cos. \pi \mu. \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, & les diffé-
 rences supérieures deviennent infinies.

Des Équations du second ordre.

SOIT $(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})^2 + 2 P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Q$, P & Q sont
 des fonctions sans radicaux de x , y & $\frac{\partial y}{\partial x}$. On a,
 en extrayant les racines, $\partial^2 y + P \partial x^2 = \partial x^2$
 $\cos. \pi \mu \sqrt{(P^2 + Q)}$. Soit ϕ le facteur qui rend
 $\partial^2 y + P \partial x^2$ différentielle complète d'une quantité finie;
 on aura $\mathcal{S}\mathcal{S}.\phi(\partial^2 y + P \partial x^2) = \phi \frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{4} \sqrt{(P^2 + Q)}$.
 Il est visible que les valeurs de y & $\frac{\partial y}{\partial x}$ ne contiendront
 pas $\cos. (\pi \mu)$, mais que la valeur de $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ le contiendra,
 & que les différences plus élevées seront infinies; la courbe
 résultante sera donc sans angle fini, mais elle aura au
 même point deux rayons de la développée différens
 d'une quantité finie. Si les équations $\sqrt{(P^2 + Q)} = 0$
 & $\mathcal{S}\mathcal{S}.\phi(\partial^2 y + P \partial x^2) = 0$, ont lieu en même temps
 pour certaines valeurs des constantes, on aura les intégrales
 particulières ordinaires.

EXEMPLE I.^{er}

$$\text{SOIT } x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{x \partial y}{\partial x} - y \right); \text{ on aura } 2 x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} = \cos. \pi \mu \sqrt{\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 8 x \left(\frac{x \partial y}{\partial x} - y \right)}.$$

Divisant par $x \sqrt{(x)}$, & intégrant, on aura, en observant que ∂x est constant :

$$\frac{\frac{x \partial y}{\partial x}}{\sqrt{(x)}} + \frac{2 x \partial x \sqrt{(x)}}{3} + c \partial x$$

$$= - \frac{\frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{2 x \sqrt{(x)}}}{\sqrt{(x)}} \sqrt{\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 8 x \left(\frac{x \partial y}{\partial x} - y \right)};$$

donc $2 \partial y + \frac{2 x^2 \partial x}{3} + c \partial x \sqrt{(x)}$

$$= - \frac{\frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{2 x}}{\sqrt{(x)}} \sqrt{\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 8 x \left(\frac{x \partial y}{\partial x} - y \right)}.$$

Intégrant de nouveau, on aura, en nommant $2 e$ la

constante, $- 2 e + 2 y + \frac{2 x^3}{9} + \frac{2 c x \sqrt{(x)}}{3}$

$$= \frac{\frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{4 x}}{\sqrt{(x)}} \sqrt{\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 8 x \left(\frac{x \partial y}{\partial x} - y \right)}.$$

Substituant dans le radical pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ la valeur qui est

$$- \frac{x^2}{3} - \frac{c \sqrt{(x)}}{2}, \text{ on trouvera :}$$

$$y = e - \frac{x^3}{9} - \frac{c x \sqrt{(x)}}{3} + \frac{\frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{\sqrt{(8 x)}}}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{3^2} - y - \frac{x^3}{9} - \frac{c x \sqrt{(x)}}{3} \right)}};$$

donc si on fait $e = \frac{c^2}{3^2}$, on aura $y = \frac{c^2}{3^2} - \frac{x^3}{9} - \frac{c x \sqrt{(x)}}{3}$;

intégrale ordinaire, parce que le terme différentiel s'évanouit.

Il est clair que l'intégrale complétée par la constante e , représente une courbe sans angles finis, mais le rayon de la développée est double au même point, parce que

la différence positive ou négative de $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ pour le

même

même point, est $\sqrt{\frac{c^2}{3^2} - e}$ & s'évanouit quand

$$\frac{c^2}{3^2} = e.$$

La première intégrale de la proposée est $y = ax^2 + bx + ab$, a & b étant les arbitraires introduites dans l'intégration. On s'en assurera en chassant les arbitraires par le moyen des équations $\frac{\partial y}{\partial x} = 2ax + b$, &

$$\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = 2a. \text{ Si on veut tirer de-là l'équation parti-}$$

culière ordinaire qui a été déterminée ci-dessus, il faut faire varier les arbitraires a & b , de manière qu'on ait toujours

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2ax + b, \text{ \& } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2a, \text{ comme si}$$

ces arbitraires n'avoient pas varié.

Il faut donc supposer $(x^2 + b) \partial a + (x + a) \partial b = 0$, & $2x \partial a + \partial b = 0$; de cette supposition on tire facilement $b = 2ax + x^2$; différenciant & mettant pour ∂b sa valeur $-2x \partial a$, on aura, $-x \partial a = a \partial x + x \partial a + x \partial x$. Cette équation facile à intégrer, fera connoître la valeur de a , & par conséquent celle de b ; mais il vaut mieux suivre la première méthode, & cette première méthode est même la seule qui puisse réussir quand on ne peut pas obtenir l'intégrale ordinaire, tel est l'exemple suivant :

EXEMPLE II.

ON a l'équation, $2x \partial^2 y - \partial y \partial x + x^2 \partial x^2 = (x^2 + y^2) \partial x^2 \cos. \pi \mu \sqrt{(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x})^2 + 8x(\frac{x \partial y}{\partial x} - y)}$. Le résultat est évidemment le même que ci-dessus, & cependant si on ôtoit $\cos. \pi \mu$, on ne pourroit en aucune manière intégrer l'équation.

Mém. 1788,

S

E X E M P L E. I I I.

SOIT l'équation $x \partial^2 y - \partial y \partial x = \partial x \cos. \pi \mu$
 $\sqrt{(4 y^2 \partial x^2 - x^2 \partial y^2)}$, on a; $y = e + c x^2$
 $+ \frac{\partial x \cos. \pi \mu}{4 x} \sqrt{(4 y^2 \partial x^2 - x^2 \partial y^2)}$, e & c sont
 les arbitraires introduites. Si on fait $e = 0$, le terme
 différentiel s'évanouit, & on a une intégrale particulière
 ordinaire.

On a généralement $y = e + c x^2 + \frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{4 x}$
 $\sqrt{(4 e^2 + 8 e c x^2)}$, ou $y = e + c x^2 + \frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{2 x}$
 $\sqrt{[(e + 2 c x^2)]}$; si on fait $e = f \partial x^2$, on aura
 $y = c x^2 + \frac{\partial x^2 \cos. \pi \mu}{2} \sqrt{(2 f c)}$. Il est clair
 que la courbe représentée par cette équation, non-seulement
 est sans angles finis, mais n'a pour chaque point qu'un rayon
 de la développée; mais la valeur de $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ est double
 pour chaque point, & les différences d'un ordre plus élevé
 sont infinies.

E X E M P L E I V.

$$\begin{aligned} \text{SOIT l'équation, } \partial^2 y - & \left(\frac{4 m^2 x \partial y \partial x + m^2 x^2 \partial x^2}{1 + 4 m^2 x^2} \right) \\ = 2 m \partial x^2 \cos. \pi \mu & \sqrt{y - \frac{x \partial y}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial x^2}} \\ & \frac{1 + 4 m^2 x^2}{1 + 4 m^2 x^2} \\ + 4 m^2 \left(\frac{x \partial y}{\partial x} + \frac{x^2}{4} \right) & \left. \right] \text{. On a pour l'intégrale,} \\ y = e + \frac{c x \sqrt{(1 + 4 m^2 x^2)}}{2} + \frac{c L}{4 m} + \frac{L^2}{64 m^2} \\ + \frac{L x \sqrt{(1 + 4 m^2 x^2)}}{16 m} - \frac{3 x^2}{16} + \frac{m \partial x^2 \cos. \pi \mu}{2} \end{aligned}$$

Fig. 1.

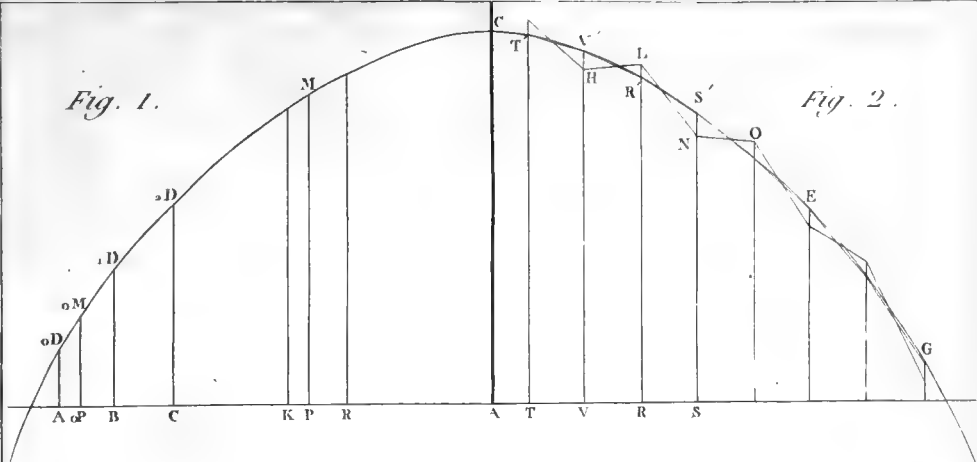


Fig. 2.

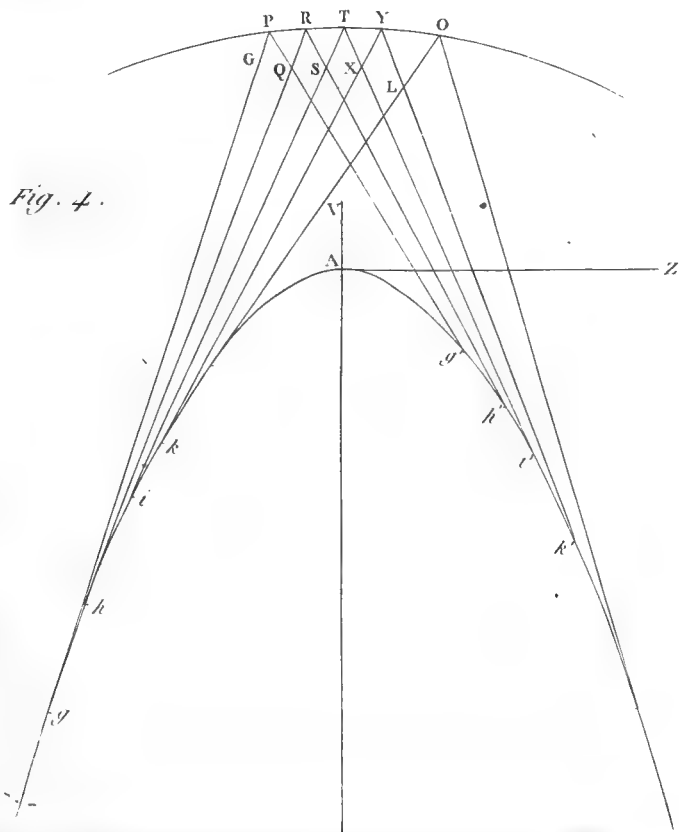




Fig. 5.

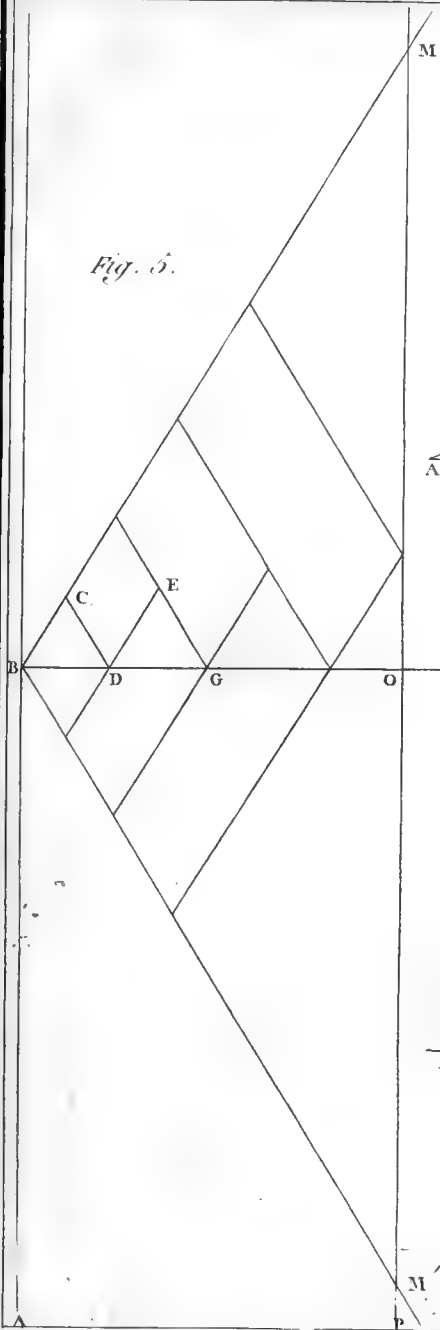


Fig. 5

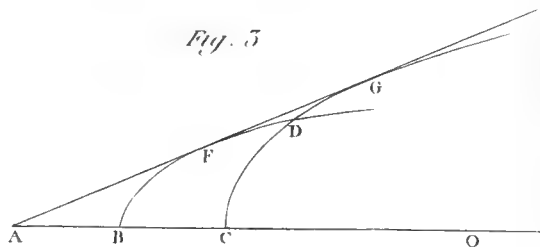
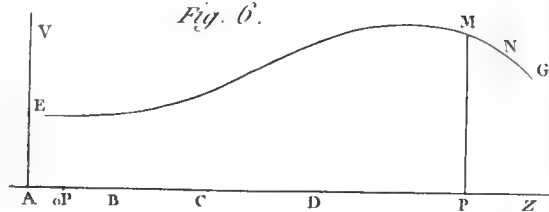


Fig. 6.





$\sqrt{y - \&c.}$, e & c sont les arbitraires introduites dans l'intégration, & L est mis à la place de $\log. [2mx + \sqrt{(1 + 4m^2x^2)}]$; le terme différentiel disparaîtra si on fait $e = c^2$. L'intégrale complete ordinaire de cette équation est, $y = max^2 + bx + a^2 + b^2$, d'où l'on auroit pu tirer l'intégrale particulière ordinaire, en faisant varier a & b comme ci-dessus.

Si on avoit l'équation du second ordre non-élevée $x^3 (x \partial^2 y - \partial y \partial x = 2y \partial x (x \partial y - 2y \partial x))$, où ∂x est constant, il seroit facile de voir que l'équation $y = cx^2$ la vérifie, c étant quelconque; mais on n'a alors qu'une intégrale incomplète ordinaire, car la proposée revient à celle-ci, $\partial (\frac{\partial y}{x}) = \frac{2y \partial x}{x^2} \partial (\frac{y}{x^2})$.

Intégrant, on a, $\partial y = \frac{y^2 \partial x}{x^3} + ax \partial x$, où a est la constante. Maintenant il faut faire $x^2 = 2z$ pour rendre l'équation homogène, & $y = uz$ pour séparer les indéterminées. Ces suppositions mèneront à des fractions rationnelles; intégrant donc, & remettant pour u & z leurs valeurs, on aura

$$\left(\frac{bx^2}{2}\right)^{\sqrt{1-a}} = \frac{y - x^2 [1 + \sqrt{1-a}]}{y - x^2 [1 - \sqrt{1-a}]},$$

b est la deuxième constante introduite; or si on la fait égale à 0, ou infinie, on a évidemment:

$$y = x^2 [1 + \sqrt{1-a}] = cx^2, \text{ en faisant } 2c - c^2 = a.$$

Je terminerai ce Mémoire en observant qu'Euler, qui a rencontré le premier une seconde intégrale complete, comme je l'ai dit plus haut, a remarqué le premier aussi que les intégrales particulières résolvoient les problèmes. *Voyez la page 536 du premier volume de son Calcul intégral.*



A N A L Y S E

DE LA PRASE ET DE LA CHRYSOPRASE,

*Ou Calcédoine verte, de Cosémitz en Silésie, dans le
Comté de Glatz.*

Par M. S A G E.

L'AGATE, à laquelle on a donné le nom de *prase*, à cause de sa couleur qui est semblable à celle du poireau, que les Grecs désignoient par le mot *prasos*, est d'un vert tendre, & quelquefois demi-transparente; cette agate, plus ou moins argileuse, a beaucoup de rapport avec le *pechstein*.

La *prase* prend le nom de *chrysoprase*, *prasius viridis flavesceus*, *smaragdoprasius*, *smaragdites*, Wall. lorsqu'il s'y trouve des taches jaunes produites par de l'ocre martial.

Les minéralogistes ont été long-temps incertains sur le genre de pierre auquel ils devoient rapporter la *prase*; les uns l'ont nommée *prime d'émeraude*; Cronstedt a cru que c'étoit un *schorl en roche*, & l'a désigné par la phrase, *basaltes spathosus colore viridi eminentiori*.

Wallerius a mieux connu la *prase* qu'il a rangée dans la classe des agates: *achates pellucidus nebulosus viridescens*.

Lehman a considéré la *chrysoprase* comme une espèce particulière de pierre, & l'a désignée sous le nom de *chrysoberille*.

Une suite de *prase* & de *chrysoprase* que j'ai reçue de Cosémitz en Silésie, fait voir comment s'est formée cette agate en roche; elle est précédée & accompagnée dans sa mine par du quartz cellulaire martial & jaunâtre. Le même morceau de *prase* offre quelquefois de la *gyrassole* & du *pechstein*, du *jaspé brun* & de la *calcédoine encroûtée* &

pénétrée d'argile blanche, ce qui la constitue alors *hydrophane*.

La prase est de la calcédoine colorée en même temps en vert par le cobalt et le nickel ; la calcédoine se trouve en plus grande quantité dans la mine de prase, que la prase. On la rencontre entre deux lits d'amiant blanc, entremêlée d'asbeste grisâtre & de terre argileuse verte arénacée. Lehman regarde cette espèce d'asbeste comme la matrice de la chrysoprase.

La prase de Silésie est colorée par du cobalt & du nickel, ainsi que la chrysoprase qui contient en outre de la terre martiale jaune.

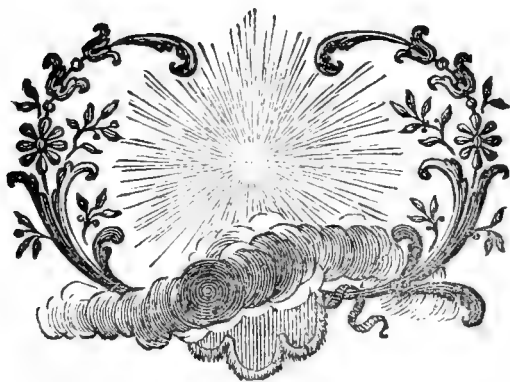
Pour extraire le nickel qui colore en partie ces agates, il ne suffit pas de les réduire en poudre fine, & de les mettre en digestion avec des acides ou de l'alkali volatil, il faut d'abord désunir ce demi-métal d'avec le quartz & la terre argileuse : on y parvient par l'intermède du sel ammoniac ; pour cet effet on distille ensemble une partie de prase pulvérisée & six parties de sel ammoniac, dont il ne se décompose que fort peu, le reste se sublime dans le cou de la cornue, & n'est point coloré. La prase qui reste au fond de la cornue, est d'un vert foncé ; elle attire un peu l'humidité de l'air, parce que le sel de nickel est déliquescent.

L'alkali volatil mis en digestion sur ce résidu, prend une couleur bleue, produite par le nickel ; l'alkali évaporé, il reste une véritable chaux de nickel d'un vert clair.

Un morceau de prase encroutée d'une efflorescence de cobalt (a), me fit d'abord croire que cette agate devoit uniquement sa couleur verte à ce demi-métal. L'émail bleu que produit la prase qui a été fondue avec quatre parties d'alkali fixe, fortifioit encore mon assertion ; mais cette couleur ne se produit plus quand on fond de la prase avec

(a) Ce morceau est dans le Cabinet de l'École royale des Mines. Voyez la page 123 de la Description méthodique de ce Cabinet.

du borax; l'espèce d'émail qu'on obtient est d'un brun rougeâtre, parce que les chaux métalliques que la prase contient, ne se vitrifient point alors aussi complètement. Dans la fusion de la prase avec l'alkali fixe, la petite portion de nickel que cette pierre contient, n'empêche pas la chaux de cobalt de colorer en bleu.



ANALYSE

Du Spath pesant aéré, transparent & strié, d'Alstonmoor.

Par M. S A G E.

BERGMAN a parlé de la terre pesante aérée (a) ; celle-ci est au spath pesant aéré, ce que la craie est au spath calcaire ; le spath pesant aéré est au spath pesant vitriolé, ce que le spath calcaire est à la sélénite.

M.^{rs} Claproth & Kirvan ont parlé du spath pesant aéré blanc transparent & strié, sous le nom de *terre pesante aérée* ; mais comme on doit réserver le nom de terre aux matières pulvérulentes & opaques, j'ai cru devoir désigner sous le nom de *spath pesant aéré*, le sel - pierre strié transparent dont je vais donner l'analyse.

Le spath pesant aéré, sur lequel M. Claproth a travaillé, venoit des mines de charbon de Lancashire, où il a été trouvé en masses arrondies de la grosseur de la tête d'un homme : c'est de ces mêmes morceaux qu'ont eus M.^{rs} Withering, Priestley & Walt. M. Black a reçu d'Alstonmoor le spath pesant aéré dont il a parlé ; celui-ci avoit été trouvé dans une mine de plomb.

M. Claproth dit que M. Bergman n'a pu présenter que quelques-unes des propriétés de la terre pesante aérée, parce que celle qu'il a analysée, & qui venoit de Schottland, étoit mêlée de beaucoup de terre calcaire, puisque le chimiste Suédois n'y a trouvé que huit parties de terre pesante, sur quatre-vingt-douze de terre calcaire. Bergman dit que la terre pesante aérée a plusieurs rapports avec la terre calcaire, qu'après avoir été calcinée, & après avoir été mise

(a) Carbonate de barite, natif, dans la nouvelle nomenclature.

dans l'eau, il se forme une pellicule à sa surface : il est à présumer que cette propriété étoit due à une portion de terre calcaire que contenoit la terre pesante aérée de Scotland, que ce chimiste a essayée ; car le spath pesant aéré d'Alstonmoor, après avoir été calciné & mis dans l'eau distillée, ne produit point de pellicule, cette eau ne se trouve nullement altérée.

Le spath pesant aéré blanchâtre, strié, demi-transparent ; que j'ai employé pour les expériences dont je vais rendre compte, vient d'Alstonmoor, & m'a été donné par M. le chevalier de Gréville ; ce morceau avoit environ six pouces de long, ses deux extrémités étoient recouvertes d'ocre martiale d'un jaune pâle.

La pesanteur spécifique de ce spath pesant aéré, a été reconnue par M. Briffon, de 42919 ; celle du spath pesant vitriolé est de 44400.

Le spath pesant aéré, exposé au feu, y perd sa transparence & devient friable, sans perdre sensiblement de son poids ; ce spath n'a pas été plus altéré après une calcination de quatre heures, après laquelle il n'étoit pas plus soluble dans l'eau qu'avant d'avoir été calciné.

Le spath pesant aéré ayant été pulvérisé & exposé à un feu violent, s'est aglutiné ; les portions de cette pierre, qui étoient en contact avec le creuset, avoient une couleur verdâtre ; taches que Bergman avoit aussi observées, en exposant à un feu violent la terre pesante.

J'ai fondu une partie de spath pesant aéré, avec deux parties de borax calciné ; j'ai obtenu un verre blanc transparent, tandis que le même borax fondu sans addition, a produit un verre jaunâtre.

Après avoir fondu un mélange d'une partie de spath pesant aéré, & de deux parties d'alkali fixe du tartre, je l'ai coulé dans un mortier de fer, ensuite je l'ai pulvérisé & fait dissoudre dans de l'eau distillée ; j'ai filtré cette lessive ; la terre pesante est restée sur le papier gris ; la lessive évaporée n'a produit que de l'alkali fixe, & point de tartre vitriolé

vitriolé. On fait que le spath pesant traité de la même manière, produit du tartre vitriolé.

J'ai formé des rotules avec le spath pesant aéré pulvérisé, dont j'ai réuni les molécules avec de la gomme adragante ; j'ai calciné ces rotules à travers les charbons ardens : elles ont pris une couleur verdâtre , & n'ont point décelé la présence d'un foie de soufre , comme le phosphore de Bologne , préparé de la même manière avec le spath pesant vitriolé.

L'acide vitriolique concentré (a) dissout avec effervescence & chaleur le spath pesant aéré : la dissolution est limpide , si l'on a employé douze parties d'acide vitriolique, contre une de ce spath ; si l'on n'a versé dessus que sept à huit parties d'acide , on n'obtient qu'une masse gélatineuse demi-transparente.

Si l'on verse de l'eau dans la dissolution du spath pesant aéré, faite par l'acide vitriolique concentré, elle devient aussitôt laiteuse , & il se précipite du spath pesant vitriolé ; celui-ci lavé & desséché, se trouve peser un dixième de plus que le spath pesant aéré qui a été dissous dans l'acide vitriolique.

J'ai formé des rotules avec ce spath pesant vitriolé artificiel ; je les ai calcinées à travers les charbons ardens : elles ont produit un phosphore semblable à celui de Bologne ; l'eau a dissous le foie de soufre à base de terre pesante qu'il contenoit.

L'acide nitreux à trente-deux degrés, fait d'abord une vive effervescence avec le spath pesant aéré ; le nitre qui en résulte demandant beaucoup d'eau pour sa dissolution , se précipite aussitôt qu'il se forme , comme l'a observé M. Claproth.

J'ai versé de l'eau distillée sur le nitre à base de terre pesante , qui étoit sous forme d'une poudre blanche : il faut environ soixante parties d'eau pour dissoudre une

(a) Cet acide vitriolique marque 67 degrés à l'aréomètre de M. Baumé.

partie de ce sel dont il faut aider la dissolution par la chaleur.

Ayant fait évaporer au bain de sable dans une capsule de verre évafée, la dissolution de nitre à base de terre pesante, elle a produit par le refroidissement, des cristaux blancs transparens qui représentent l'octaèdre dans différens états.

J'ai fait évaporer en trois temps la dissolution de nitre à base de terre pesante; la première cristallisation a produit,

- 1.° Des octaèdres rectangulaires.
- 2.° Des octaèdres tronqués aux sommets.
- 3.° Des octaèdres tronqués aux sommets & parallèlement à un des plans d'une pyramide.
- 4.° Des octaèdres tronqués aux quatre angles de la base commune des pyramides.
- 5.° Des octaèdres tronqués sur les bords.
- 6.° Des pyramides à quatre pans, ou moitié d'octaèdres.

La seconde évaporation a produit des cristaux octaèdres, assemblés confusément, parce que la capsule n'étoit pas assez évafée.

La troisième & dernière évaporation de la dissolution de nitre à base de terre pesante, a aussi produit des cristaux octaèdres & en pyramides à quatre pans: on remarquoit au fond & sur les bords de la capsule, des prismes octaèdres articulés & croisés, formés d'octaèdres implantés les uns dans les autres.

Le nitre à base de terre pesante ne s'altère point à l'air; mis sur les charbons ardens, il y éclate & fuse.

L'acide marin dissout avec effervescence le spath pesant aéré; le sel qui en résulte se précipite aussitôt. L'acide marin qui fume, ne tient point en dissolution de sel à base de terre pesante. Si l'on met ce sel en digestion dans de l'eau distillée, sur un bain de sable, elle devient laiteuse, & ne s'éclaircit point après avoir été filtrée à travers

plusieurs papiers ; j'ai fait évaporer cette dissolution , & je n'ai point obtenu de cristaux. Le sel à base de terre pesante étoit au fond de la capsule sous forme de poudre blanche qui n'avoit que peu de saveur , ce qui tient à l'acide vitriolique contenu dans l'acide marin du commerce , puisque l'acide marin purifié a la propriété de dissoudre le spath pesant aéré , comme l'a observé M. Fourcroy.

L'expérience suivante fait connoître que l'acide marin très-concentré a la propriété de dissoudre le spath pesant aéré , & de produire un sel soluble dans l'eau :

J'ai distillé une demi-once de spath pesant aéré , avec une once de sel ammoniac ; il s'est dégagé de l'alkali volatil concret (a) ; la portion de sel ammoniac qui n'a point été décomposée , s'est sublimée à la voûte & au commencement du col de la cornue.

Le résidu de cette opération ayant été lessivé avec de l'eau distillée , s'y est dissous en entier ; cette lessive a produit par l'évaporation , des cristaux en lames rhomboïdales taillées en biseau sur les bords , & tronquées aux angles plus ou moins profondément. Ce sel à base de terre pesante ne s'altère point à l'air , a une saveur amère un peu piquante ; mis sur des charbons ardents , il y perd l'eau de sa cristallisation , y devient blanc & opaque , & ne s'y décompose point.

La gravité spécifique du spath pesant a fait soupçonner à quelques naturalistes , qu'il contenoit du métal ; Cronstedt l'a désigné sous le nom de *marmor metallicum*.

Je ne suis point parvenu à extraire de métal du spath pesant aéré blanc & transparent ; celui qui est opaque recèle souvent de la blende , de la pyrite , de l'ocre martial jaunâtre , & quelquefois de la chaux de plomb.

(a) Le spath pesant aéré , après avoir été calciné pendant trois heures , a décomposé le sel ammoniac comme celui qui n'avoit point éprouvé l'action du feu.



M É M O I R E
S U R L E G E N R E
DU MUSCADIER, *MYRISTICA*.
Par M. DE LA MARCK.

DANS un siècle où la botanique a fait des progrès si marqués, & où les botanistes ont étendu leurs recherches jusque sur les végétaux exotiques les plus rares, & même les moins importans, on a sans doute lieu d'être étonné que la fructification d'un arbre aussi intéressant que l'est celui qui produit la muscade, soit encore inconnue aux botanistes, ou au moins ne leur soit connue que d'une manière très-incomplète, comme je vais le faire voir.

Le fruit du muscadier étant, comme épicerie, un objet intéressant de commerce, est à la vérité connu depuis long-temps; on le trouve même décrit & figuré dans un assez grand nombre d'ouvrages dont plusieurs sont déjà anciens, comme on le verra par la synonymie que je donnerai dans l'exposition des espèces de ce genre. Mais ce qu'on nous a donné sur les fleurs de cet arbre précieux, est si incomplet, & même si rempli d'erreurs, que Linné père n'a pas voulu insérer le genre que constitue le muscadier, parmi ceux que l'on trouve mentionnés dans les dernières éditions de son système des végétaux.

Quelques auteurs prétendent que Théophraste a connu le fruit du muscadier, & qu'il le nomma *comacum*. Mais ce que Théophraste dit du *comacum*, est si vague, qu'on ne peut rien assurer de positif à cet égard; il en parle comme d'un aromate qui nous vient de l'Inde, en partie directement par la mer, & en partie qu'on apporte de l'Arabie (a),

(a) *Cætera autem odorata, quorum in unguento usus, partim ex*

aromate qu'on emploie dans les parfums ; mais Théophraste n'indique aucun caractère , soit de l'aromate même , soit du végétal qui le produit.

D'ailleurs , le muscadier ne croissant pas naturellement dans l'Inde , il est plus convenable de penser avec G. Bauhin, l'Ecluse & la plupart des botanistes , que le fruit de cet arbre ne fut point connu des anciens Grecs (b). G. Bauhin n'ignoroit pas néanmoins qu'on rapportoit à la muscade le *comacum* de Théophraste , puisqu'il a cité lui-même dans son *Pinax* pour synonyme de son *nux moschata fructu rotundo*, la phrase suivante de Guilandinus : *comacum Theophrasti & cinnamum caryopon Plinii*. Guiland (c).

Les Arabes furent les premiers , à ce qu'il paroît , qui eurent connoissance de la muscade. Avicenne (liv. II, chap. 503, pag. 348.) fait mention de ce fruit , & le nomme *jiausiban* ou *jaisiband* , ce qui signifie en arabe , *noix de banda*. C'est aussi le *jeuzbave* ou le *jusbague* de Sérapion ; enfin , c'est le *moschocaryon* des Grecs modernes. Bauh. pin. 407.

Mais si , comme je viens de le dire , le fruit du muscadier est connu depuis long-temps , il n'en est pas de même des fleurs de cet arbre.

Pison , qui est un des premiers auteurs qui en ait parlé , leur attribue de la ressemblance avec celles du poirier , ou avec celles du cerisier ; ce qui a fait dire par la suite à plusieurs auteurs que ces fleurs avoient cinq pétales ; mais on va voir que c'est sans fondement , & que ces mêmes fleurs

Indiâ advehuntur , ac inde mittuntur ad mare ; partim ex Arabiâ deportantur , ut cinamomum & casia , atque etiam comacum. Theophr. hist. l. 9. p. 1004.

(b) *Nux moschata veteribus Græcis cum suâ maci incognita fuit.* Bauh. pin. 407. Clus. exot. p. 179.

(c) Selon quelques-uns , ce *comacum* de Théophraste n'est autre chose que le *piper cubeba* , ce poivre qui croît naturellement dans l'Inde , étant en effet fort aromatique.

Cubeba est un mot latin dérivé de *cubab* , nom chinois de ce poivre , lequel fut altéré & transformé en *cubabim* , *cubabum* , *cumacum* , & enfin *comacum*.

n'ont avec celles du poirier ou du cerisier , aucune ressemblance , soit par leurs caractères , soit même par leur aspect. D'autres auparavant prenoient le *macis* ou l'enveloppe membraneuse de la coque de la muscade , pour la fleur même , sans doute à cause de la vive couleur & des découpures singulières de cette enveloppe.

Valentini , dans son *Historia simplicium* , qui a paru en latin en 1716 , est le premier qui ait remarqué que les fleurs du muscadier étoient trifides , c'est-à-dire , qu'elles avoient un calice à trois découpures.

Rumphe ensuite , dans son *Herbarium Amboinense* , dont Jean Burman fut le traducteur & l'éditeur en 1750 , dit la même chose , sans nous apprendre presque rien de plus que ce qu'on trouve dans Valentini ; mais il donna des fleurs du muscadier , une figure à peu-près passable , quoique sans détails. Il paroît que Valentini & Rumphe n'ont examiné que les fleurs d'un individu fertile , & par conséquent que des fleurs femelles , comme leur description le prouve en effet. Mais ces auteurs n'ont pas pris garde que les fleurs dont ils parloient étoient constamment d'un seul sexe : ils étoient encore attachés à l'usage de leur temps où l'on nommoit mâles ou femelles certaines productions de la nature , en raison de leur importance , ou de la préférence que les unes méritoient sur les autres. Ainsi la muscade longue étoit alors nommée *mâle* , & la ronde portoit le nom de *muscade femelle* ; il en étoit de même des arbres qui les produisoient , quoique ce soit toujours des individus femelles qui produisent des muscades , quelle que soit la forme de ces fruits.

Linné père , dans l'édition de son *Genera plantarum* , publiée en 1742 , fit mention du genre du muscadier , sous le nom de *myristica* , & plaça ce genre avec quelques autres dans un *appendix* particulier , & sous le titre de *fragmens divers*.

Dans l'exposition de ce genre , Linné distingue des fleurs mâles & des fleurs femelles , mais sans expliquer si ces

fleurs unisexuelles sont, relativement à son système, dioïques ou monoïques. Il cite le calice, la corolle & les étamines de la fleur mâle, comme lui étant inconnue; ensuite il dit que la fleur femelle a un calice ovale-campanulé & à quatre dents; qu'elle est dépourvue de corolle, & que son pistil est en massue & de la longueur du calice.

On voit par cette description, que Linné père ne connut ni la fleur mâle, ni même la fleur femelle du muscadier; car le calice de la fleur femelle qu'il décrit, n'est point à quatre dents, & s'il en eût vu l'ovaire, il n'eût pas manqué de parler de son stigmate qui est assez remarquable.

M. Adanson, dans son livre intitulé *Familles des plantes*, & publié en 1763, a fait mention du genre du muscadier, sous le nom de *comacum*, & l'a placé dans sa famille des pistachiers, à la page 345. M. Adanson attribue aux plantes de ce genre des fleurs hermaphrodites (p. 334), mais stériles sur certains pieds, & fertiles sur d'autres. D'ailleurs, M. Adanson regarde comme inconnue dans les fleurs du muscadier, la corolle & le nombre des étamines; & il cite au pistil un style & un seul stigmate.

M. Sonnerat parle du muscadier dans son Voyage à la nouvelle Guinée, publié en 1776. Il dit (p. 195) que les fleurs de cet arbre naissent dans les aisselles des branches; qu'elles ont un pistil entouré d'une infinité d'étamines, & que leurs pétales sont au nombre de cinq.

En 1781, Linné fils publia dans son *Supplementum plantarum*, un caractère générique du muscadier. Selon ce caractère, les fleurs du muscadier sont hermaphrodites; elles ont un calice quinquefide, cinq pétales, & des étamines nombreuses: ces caractères sont, comme on le verra, fort différens de ceux que je vais présenter dans l'instant.

Enfin, M. Thunberg, dans les Actes de Stockholm, année 1782, traite de deux espèces de muscadiers, parmi lesquelles se trouve le muscadier aromatique. M. Thunberg rapporte ce genre de plante à la monœcie de Linné; & dit que les fleurs mâles n'ont qu'une étamine; or, ces

caractères ne sont point encore conformes à ceux que l'observation nous a fait connoître.

En effet, ayant reconnu par le moyen de quelques branches sèches de muscadier, qui me furent communiquées en 1781 par M. Sonnerat, que ce que Linné fils venoit de publier dans son supplément sur les fleurs du muscadier, présentoit quantité d'erreurs évidentes, je désirai de faire connoître, autant qu'il dépendroit de moi, les véritables caractères de ce genre de plante, & je souhaitai d'avoir assez de succès dans mes recherches, pour pouvoir faire part à l'Académie de leur résultat sur ce beau genre, l'un des plus intéressans qu'offre la botanique.

En conséquence, voulant me procurer les moyens & les éclaircissémens dont j'avois besoin, j'écrivis à M. Céré, directeur du jardin du Roi à l'Isle de France, & le priai de m'envoyer des branches de muscadier, munies de fructification en bon état. Je ne fus point trompé dans mon attente, car M. Céré me fit passer plusieurs branches de cet arbre, les unes en fleurs, & les autres garnies de fruits bien conservés; il joignit à son envoi des mémoires concernant le muscadier & les autres arbres à épicerie que l'on cultive à l'Isle de France.

On verra par les observations de M. Céré, que je rapporterai, que c'est lui qui a observé le premier que le muscadier aromatique, ainsi que les autres espèces qu'il nomme *muscadiers sauvages*, sont à sexe simple, c'est-à-dire, dioïques, comme dans le caractère générique suivant.

Caractère générique.

Les fleurs des muscadiers sont dioïques, c'est-à-dire toutes mâles sur certains pieds, & toutes femelles sur d'autres.

Fleur mâle.

1.° Un calice monophylle, urcéolé ou en grelot, & partagé à son sommet en trois découpures,

2.° Point de corolle.

3.° six

3°. Six à douze étamines non saillantes hors du calice, réunies en un faisceau (distinctes dans une espèce), à filamens très-courts insérés au réceptacle, & à anthères linéaires droites à deux loges.

Fleur femelle.

1°. Un calice monophylle, inférieur, caduc, urcéolé ou en grelot, & divisé à son sommet en trois découpures.

2°. Point de corolle.

3°. Un ovaire supérieur, ovale ou oblong, dépourvu de style, & terminé par deux stigmates.

Le fruit est un drupe arrondi ou ovale, monosperme, & dont le péricarpe est composé de trois parties distinctes, qu'on nomme le *brou*, le *macis* & la *coque*.

Le *brou* (ou l'enveloppe extérieure) est ordinairement charnu, quelquefois desséché & coriace, s'ouvre constamment par son sommet en deux valves.

Le *macis* (ou l'enveloppe intermédiaire) est membraneux, coloré, lacinié, comme réticulaire, & recouvre la coque contre laquelle il est fortement appliqué.

La *coque* (ou l'enveloppe immédiate de la semence) est mince, dure, fragile, sillonnée à l'extérieur par les impressions des ramifications du macis.

La *semence* est grosse, charnue, huileuse, quelquefois aromatique, & constamment comme marbrée à l'intérieur par des veines colorées & rameuses, répandues dans la substance.

Caractère essentiel ou distinctif du genre.

Fleurs dioïques, à calice monophylle & trifide, & à corolle nulle.

Baie drupacée, monosperme, à brou bivalve, & à coque couverte d'une membrane en réseau, ou laciniée.

Observation.

Les muscadiers sont des arbres toujours verts, à feuilles

Mém. 1788.

simples & alternes, à rameaux dépourvus de stipules, & à fleurs axillaires, petites, portées sur des pédoncules plus ou moins divisés, & plus courts que les feuilles.

Le genre que ces arbres constituent, est bien distingué de tous ceux que l'on connoît, par le caractère essentiel que je viens d'exposer. Il me paroît pouvoir se rapporter à la famille des lauriers, n.^o 65, comprise dans la quatrième classe (les fleurs incomplètes) de l'ordre méthodique que j'ai proposé.

Exposition & caractères distinctifs des espèces.

1. Muscadier aromatique; *myristica aromatica*. *Myristica foliis ovato-lanceolatis, nervis lateralibus simplicibus, bracteis orbiculatis, fructu glabro*. N.

2. Muscadier des Philippines; *myristica Philippensis*. *Myristica foliis ovato-oblongis maximis, nervis lateralibus simplicibus, fructu rotundo tomentoso*. N.

3. Muscadier de Malabar; *myristica Malabarica*. *Myristica foliis ovatis, nervis lateralibus simplicibus, fructu oblongo tomentoso*. N.

4. Muscadier globulaire; *myristica globularia*. *Myristica foliis angusto-lanceolatis, nervis lateralibus simplicibus, pedunculis subumbellatis tomentoso-ferrugineis*. N.

5. Muscadier de Madagascar; *myristica Madagascariensis*. *Myristica foliis ovatis, nervis lateralibus ramosis, pedunculis paniculatis tomentoso-ferrugineis*. N.

6. Muscadier acuminé; *myristica acuminata*. *Myristica foliis ovatis acuminatis infernè albidis, nervis lateralibus ramosis*. N.

7. Muscadier porte-suif; *myristica sebifera*. *Myristica foliis cordato-oblongis subtus tomentosis, pedunculis paniculatis, drupa cortice ex succo*. N.

8. Muscadier uviforme; *myristica uviformis*. *Myristica foliis lanceolatis margine undulatis, fructibus minimis lateralibus & uviformibus*. N.

Des huit espèces de muscadiers que je viens de déterminer, sept me sont connues, à la vérité seulement en partie, mais suffisamment pour certifier leur existence. Quant à celle que je nomme *muscadier de Malabar*, & dont je n'ai pas encore eu occasion de voir la moindre partie, la description, la figure & les détails que Rhéede en a donnés, ne permettent pas de douter de son existence, & suffisent pour l'établissement de ses caractères distinctifs.

Description & synonymie des espèces.

Première espèce. Muscadier aromatique ; *myristica aromatica*.

Nux moschata fructu rotundo. Bauh. pin. 407. *Nux aromatica femina*. J. Bauh. hist. 1, part. 1, p. 264. *Nux aromatis*. Clus. exot. p. 179. *Pala & bongo-pala*. Pif. bras. mant. aromat. p. 173. *Nux moschata*. Lob. ic. 2, p. 140. *Nux moschata fructu rotundo*. Pluk. alm. 265, t. 209, f. 1. Raj. hist. p. 1523, & suppl. Luz. p. 58. *Nux myristica*. Valent. hist. simplic. p. 452, t. 3. *Nux myristica f. pala*. Rumph. herb. amb. vol. 2, p. 14, t. 4. *Nux moschata*. Blackw. t. 353; Garf. exot. t. 71. Le muscadier. Sonner. voyage à la nouv. Guinée, p. 195.

C'est un arbre de la grandeur d'un beau poirier, & qui s'élève à environ trente pieds de hauteur : cet arbre, l'un des plus beaux & des plus distingués que l'on puisse voir, dit M. Céré, est sur-tout remarquable par le beau vert de son feuillage & par la disposition de ses branches. Quand il jouit d'une forte végétation, il s'orne alors d'une grande quantité de rameaux grêles qui lui forment une tête arrondie & si feuillée, qu'il n'est pas possible de voir au travers. Dans cet état, il ressemble beaucoup à nos plus beaux orangers, lorsqu'ils viennent de se couvrir de nouvelles feuilles.

Le tronc de cet arbre est droit, garni circulairement, selon M. Céré, de branches disposées quatre & cinq

ensemble par étages ou verticilles écartés les uns des autres de deux ou trois pieds : ces branches s'étendent beaucoup & presqu'horizontalement ; elles ont des ramifications alternes, menues & feuillées.

L'écorce du tronc est d'un brun rougeâtre, assez unie, peu épaisse, blanche, & pleine de suc intérieurement ; celle des jeunes rameaux est d'un beau vert & luisante.

Les *feuilles* sont alternes, pétiolées, lancéolées, ovales-lancéolées, très-entières, fort lissées & d'un beau vert en dessus, d'un vert blanchâtre en dessous, avec des nervures latérales obliques, simples & presque parallèles, qui partent à droite & à gauche de la côte moyenne. Ces feuilles varient sur le même arbre dans leur forme, & sur-tout leur grandeur ; elles ont en général depuis deux pouces & demi jusqu'à six ou sept pouces de longueur, sur une largeur d'un pouce & demi à trois pouces : leur pétiole est long de cinq à sept lignes, glabre, cylindrique ou convexe en dessous, un peu aplati & canaliculé en dessus.

On n'observe aucune stipule.

Les *fleurs* sont petites, jaunâtres, pédunculées, penchées ou pendantes, & disposées dans les aisselles des feuilles, le long des petits rameaux formant de petits corymbes très-peu garnis.

Dans les INDIVIDUS MÂLES (*planche I*), les pédoncules communs sont longs de trois ou quatre lignes, roides, comme ligneux & raboteux ; ils portent chacun deux à sept fleurs pendantes, & attachées à des pédoncules propres fort grêles, lissés, longs de six ou sept lignes. Chaque pédoncule propre est garni à son sommet d'une petite bractée orbiculaire, concave, amplexicaule, située presqu'à la base de la fleur.

Chaque fleur mâle (*fig. a & b*) offre,

1.^o Un calice (*fig. A*) monophylle, un peu campanulé ou en grelot, charnu, coloré, long de deux lignes & demie, & divisé à son sommet en trois découpures ovales-pointues, demi-ouvertes.

2.^o Aucune corolle.

3.^o *Douze étamines* (rarement neuf) réunies par leurs filamens & leurs anthères (*fig. C*) autour d'un axe qui naît du réceptacle, en forme de colonne, à filamens fort courts, occupant le tiers inférieur de la colonne, & ne paroissant qu'un support commun des anthères à cause de leur réunion; & à anthères linéaires, longues, deux lignes, réunies autour de l'axe auquel elles semblent adnées, un peu plus longues que cet axe, & formant un corps cylindrique, sillonné par vingt quatre lignes longitudinales, chaque anthère étant à deux loges séparées par un fillon.

Dans les INDIVIDUS FEMELLES (*planche II*), les pédoncules (dont quelques-uns se trouvent simples & uniflores) sont longs de deux ou trois lignes, assez épais, verts, glabres, chargés chacun de deux ou trois fleurs attachées à des pédoncules propres, moins grêles que ceux des fleurs mâles, & qui ont trois à cinq lignes de longueur. Ces pedoncules portent chacun une petite bractée arrondie, concave, amplexicaule, située près de la base du calice. En général, les fleurs femelles sont un peu plus courtes que les fleurs mâles.

Chaque fleur femelle (*fig. a & b*) offre,

1.^o Un calice (*fig. a*) monophylle, charnu, urcéolé ou en grelot, & divisé à son sommet, comme celui de la fleur mâle, en trois découpures ovales-pointues, un peu ouvertes.

2.^o Aucune corolle.

3.^o Un ovaire (*fig. C*) supérieur, ovale, ou ovale-oblong, marqué d'un côté d'une raie longitudinale, dépourvu de style, & couronné par deux stigmates sessiles, courts, épais, séparés par un fillon qui se prolonge un peu plus d'un côté que de l'autre.

Le fruit (*planche II*) est une baie drupacée, presque sphérique ou un peu en forme de poire, glabre, d'un vert blanchâtre dans sa maturité, & ayant environ deux pouces & demi de diamètre. Son péricarpe est composé de trois parties distinctes; savoir, d'une écorce ou enveloppe exté-

rieure qu'on nomme *brou*, d'une enveloppe moyenne qui porte le nom de *macis* ; enfin , de l'enveloppe immédiate de la semence , formant la *noix* ou la coque qui contient cette semence.

Le *brou* ou l'enveloppe extérieure du fruit (*fig. a, b, c*), s'ouvre par son sommet en deux valves charnues (*fig. b & c*), épaissies d'environ six lignes , ayant la chair blanche , filandreuse , remplie d'un suc fort astringent. En s'ouvrant , ce brou laisse apercevoir la noix (*fig. d*) revêtue de son *macis*.

Le *macis* ou l'enveloppe moyenne placée entre le brou & la noix , est une membrane laciniée (*fig. e*) , comme réticulaire , d'un rouge écarlate fort vif , & qui revêt la noix (*fig. f*) en la comprimant & la sillonnant par ses lanières. Cette enveloppe singulière a la transparence de la corne ou d'un cartilage mince , jaunit en vieillissant , & devient cassante à mesure qu'elle se dessèche.

La *noix* ou l'enveloppe immédiate de la semence , est une coque mince (*fig. g*) , n'ayant qu'une demi-ligne d'épaisseur , dure , brune ou noirâtre à l'extérieur , grisâtre en dedans , & fragile dans l'état de dessiccation.

La *semence* ou l'amande que l'on connoît vulgairement sous le nom de muscade (*fig. h & i*) , est grosse , arrondie ou ovale-oblongue , & recouverte d'une peau qui est roussâtre vers le bout inférieur , blanchâtre & piquetée de points rouges vers son sommet. La chair de cette semence est ferme , blanche , huileuse , très-odorante , parsemée & traversée de veines rameuses , irrégulières , jaunes , grasses , plus huileuses que la substance blanche , & qui font paroître cette substance comme marbrée intérieurement.

Selon l'observation de M. Céré , le germe ou l'embryon est comme caché au gros bout de l'amande , c'est-à-dire à celui qui tient au pédoncule : cet embryon est fort petit , aplati , blanc & revêtu de ses deux petites feuilles séminales.

Le muscadier aromatique croît naturellement aux Moluques , & particulièrement dans les îles de Banda , d'où

viennent toutes les muscades qui se débitent dans le monde ; & l'on fait que depuis long-temps les Hollandois sont seuls en possession de cette branche de commerce.

Mais le muscadier est maintenant cultivé aux îles de France & de Bourbon avec beaucoup de succès, & y donne depuis quelques années des fruits qui ne le cèdent en rien à ceux des muscadiers des Moluques.

« Ce riche & précieux arbre , dit M. Céré , a été intro-
 » duit dans nos îles par M. Poivre (a) en 1770 & 1772.
 » Il ne prévoyoit pas alors qu'il fût à sexe simple , & je n'en
 » ai fait la découverte que le 25 décembre 1776. En vain
 » j'ai cherché à distinguer par la feuille ou la manière d'être
 » (le port) de cet arbre , le mâle d'avec la femelle ; & avant
 » qu'il ait fleuri , je crois qu'il sera toujours impossible de le
 » faire.

» Cet arbre est continuellement en fleurs & en fruits de
 » tout âge , & n'éprouve qu'une effeuillaison si foible qu'elle
 » est comme insensible. En incisant l'écorce du muscadier ,
 » en tranchant une branche , ou en détachant une feuille , il
 » en sort un suc visqueux , assez abondant , d'un rouge pâle ,
 » & qui teint le linge d'une manière à rester long-temps. »
 Cette observation se trouve aussi consignée dans les écrits
 de Valentini & de Rumphe.

Le bois du muscadier est blanc , poreux , filandreux ,
 d'une extrême légèreté. On peut en faire de petits meubles ;
 il n'a aucune odeur.

Les feuilles vertes répandent une légère odeur de muscade lorsqu'on les froisse ; mais sèches & écrasées dans le creux de la main , elles ont l'odeur de celles du *ravensara* à s'y tromper.

(a) M. Céré veut dire sous l'administration de M. Poivre , qui , alors Intendant des îles de France & de Bourbon , & voulant procurer à ces deux colonies Françaises un genre de culture qui pouvoit devenir très-avantageux , envoya aux Moluques en 1769 & 1771 , MM. de Tremignon & de Coëtivi , pour se procurer des plants des arbres à épicerie qu'on y cultive.

Le fruit, comme l'observent Valentini, Rumphe & M. Céré, ne parvient à l'état de maturité qu'environ neuf mois après l'épanouissement de la fleur qui le produit. Il ressemble alors à une gouave blanche, ou à une pêche brignon de grosseur moyenne. Son brou a la chair d'une saveur si âcre & si astringente, qu'on ne sauroit le manger cru & sans apprêt. On le confit, on en fait des compotes & de la marmelade.

« Il y a des muscadiers, dit M. Céré, qui donnent des » noix rondes & longues, & d'autres qui les donnent toutes » rondes.

« Les six premières noix muscades aromatiques venues » au jardin du Roi de l'Isle de France, mûrirent en décembre » 1778 & en janvier 1779. Il ne provint de ces premiers » fruits qu'un seul plant, qui leva vers mars 1779. J'avois » nommé cet individu femelle qui nous montra les premières » muscades, *muscadier royal*. Dans les premiers rapports de » cet arbre, ses noix paroissoient être mêlées relativement à » leur forme; ensuite il en a montré plus de rondes que de » longues, & dans le temps de l'année où la végétation est » moins forte, il en produisoit d'une forme plus décidément » longue. Il en donne donc, suivant mes observations, de » longues & de rondes, tandis qu'il existe au jardin du Roi » d'autres femelles les donnant constamment rondes & » petites.

« Le muscadier commence à rapporter à l'âge de sept ou » huit ans. « Il s'en trouve un ici qui, montrant ses pre- » mières fleurs à six ans, donnera vraisemblablement ses » premiers fruits avant la septième année révolue, ou plutôt » les nouera, puisqu'il faut neuf mois à ce fruit pour être » dans sa maturité.

« Il est plus avantageux, continue M. Céré, de planter » la noix muscade nue ou dépouillée de sa coque, qu'avec » elle, parce qu'elle germe beaucoup plus vite, comme en » trente ou quarante jours, & que les vers n'ont pas le temps » de s'y mettre & de la dévorer,

» Lorsque

» Lorsque cette noix germe, il sort du bout le plus gros,
 » qui est celui où tenoit le pédoncule qui l'attachoit à l'arbre,
 » la radicule ou le pivot à la manière de celui du gland, &
 » qui pointe en terre. Quand cet individu naissant a sept ou
 » huit pouces d'accroissement & de longueur, la tige alors
 » sort immédiatement au-dessus de la radicule; elle se montre
 » d'abord sous la forme de deux petites feuilles séminales, &
 » son sommet est d'un rouge de sang. Bientôt cette tige a
 » atteint cinq à six pouces de hauteur, & alors elle a l'air
 » d'une asperge naissante, excepté qu'elle est d'un brun foncé
 » & luisant: la noix reste à nourrir l'une & l'autre (la radi-
 » cule & la jeune tige), quelquefois une année entière. »
Céré, manuscrit.

Je ne dirai rien sur l'emploi & sur les qualités de la muscade, ces objets étant suffisamment connus.

Deuxième espèce. Muscadier des Philippines; *myristica Philippensis*.

An nux myristica fœmina f. Indorum camanza. Camell. ic. manus. n°. 172, & nux moschata f. camanza altera. Raj. suppl. luz. p. 58, n°. 3 : an nux myristica mas f. pala lacki-lacki. Rumph. amb. 2, p. 24, t. V.

J'ai vu dans l'herbier de M. de Jussieu, un rameau de ce muscadier avec un fruit desséché qui n'y étoit plus adhérent. Ce rameau fait partie d'un herbier des Philippines, donné à Commerçon par M. Sonnerat, & paroît appartenir à un muscadier bien distingué de la première espèce, par ses fruits veloutés ou cotonneux à l'extérieur, & de l'espèce qui suit par la grandeur de ses feuilles. Le rameau que j'ai examiné est épais, roide, cylindrique, légèrement velouté à son sommet; ses feuilles sont alternes, grandes, ovales-oblongues, munies d'une pointe courte, entières, glabres, lisses en dessus, & très-nerveuses en dessous: leurs nervures latérales sont simples, parallèles, & au nombre de dix-huit ou environ de chaque côté. Ces feuilles ont près d'un pied de longueur, sur une largeur de quatre à cinq pouces, & sont portées chacune sur un pétiole épais,

un peu court , canaliculé en dessus , & convexe en dessous. Le fruit paroît arrondi ou ovoïde , & a son brou roussâtre , tomenteux ou velouté , & ridé par l'effet de la dessiccation. Il est attaché latéralement au rameau par un pédoncule simple , épais , long d'un pouce ou un peu plus.

Troisième espèce. Muscadier de Malabar , *myristica Malabarica*.

Panam-palca. Rheed. mal. 4 , p. 9 , t. V : *nux Indica oblonga intrefecus similis nuci moschatae*. J. B. hist. 1 , p. 399 : *nux myristica major spuria Malabarica*. Raj. hist. 1524 : *nux myristica spuria*. Pluk alm. 265.

Il se pourroit que ce muscadier ne soit que médiocrement distingué de celui des Philippines dont je viens de faire mention. Néanmoins , si la figure & les détails qu'en donne Rheede , sont bien exacts , il n'y a point de doute qu'il n'en soit très-différent. Ses feuilles paroissent moins grandes , & de forme plutôt ovale qu'oblongue ; les pédoncules sont paniculés ; enfin , ses fruits sont oblongs , tomenteux , & ne sont point du tout aromatiques. Au reste , ne le connoissant pas directement , comme les autres , j'ai trouvé plus convenable d'en faire mention séparément , que de le citer comme une variété du muscadier des Philippines , avec lequel il semble avoir des rapports , pouvant en être malgré cela constamment distinct.

Quatrième espèce. Muscadier globulaire , *myristica globularia*. Pl. V.

An palala quinta s. globularia. Rumph. amb. 2 , p. 28 ; t. IX. Petit muscadier sauvage ou muscadier globulaire. *Sonnerat, herb.*

J'ai reçu de M. Sonnerat divers exemplaires de ce muscadier , tous en fleurs seulement , & contenus dans un herbier fait dans l'île de Java ; c'est peut-être le *palala minima* , ou muscadier sauvage du catalogue manuscrit de M. Céré , & dans ce cas , ce muscadier seroit maintenant cultivé au jardin du Roi à l'Isle de France. Il constitue une espèce qui me semble bien distinguée des autres par son

feuillage, & qui est sur-tout remarquable par le caractère de ses fleurs mâles, leurs étamines ayant leurs anthères libres, & seulement au nombre de neuf.

Ce muscadier paroît ne former qu'un arbrisseau peu élevé, mais fort rameux. Ses rameaux sont cylindriques, divisés, abondamment feuillés & veloutés, ou légèrement cotonneux dans leur partie supérieure. Ses feuilles sont alternes, pétiolées, étroites-lancéolées, presque semblables à celles du saule, pointues, entières, lisses, vertes & luisantes en dessus, un peu glauques en dessous, sur-tout dans leur jeunesse; elles ont trois pouces ou trois pouces & demi de longueur, sur une largeur de six à huit lignes.

Les pédoncules sont axillaires, fort courts, épais, ridés, ou comme écailleux, cotonneux & roussâtres, & portent chacun trois à sept fleurs disposées comme en ombelle. Ces fleurs (*fig. a*) sont fort petites, pédicellées, globuleuses, cotonneuses & roussâtres en dehors, & à calice triûde, comme dans les autres espèces.

Les mâles consistent, 1.^o en un calice monophylle, globuleux, divisé en trois découpures un peu plus larges que longues, légèrement pointues & peu ouvertes; 2.^o en neuf étamines non saillantes hors du calice, & réunies par leurs filamens autour d'un axe assez épais, trigone, qui s'élève du réceptacle au centre de la fleur. Les anthères sont ovales, didymes, libres, & font une légère saillie au-dessus de l'axe qu'elles paroissent couronner. Il y a apparence que le fruit de ce muscadier est fort petit, & sphérique ou globuleux, l'ovaire dans les fleurs femelles ayant cette forme, selon un dessin communiqué par M. Sonnerat.

Cinquième espèce. Muscadier de Madagascar; *myristica Madagascariensis*. Pl. IV.

Rara-hourak ou grand muscadier sauvage de Madagascar. *Sonner. herb. & Céré, cat. manus.*

C'est principalement dans la forme des nervures des feuilles, qu'on trouve la distinction la plus remarquable de cette espèce. En outre, les ramifications alternes & simples

des pédoncules de ses fleurs, paroissent lui être particulières, & la font aisément reconnoître.

Il paroît, d'après le nom qu'on donne à ce muscadier, qu'il constitue un arbre, ou au moins un arbrisseau plus grand que celui qui précède; aussi ses feuilles sont-elles plus grandes & sur-tout beaucoup plus larges. Ses rameaux sont cylindriques, glabres & d'un brun roussâtre; les feuilles sont alternes, pétiolées, ovales, un peu pointues, entières, glabres des deux côtés dans leur entier développement, & remarquables par leurs nervures latérales fort rameuses. Ces feuilles sont lisses & d'un vert foncé en dessus, un peu roussâtres en dessous, & ont quatre à cinq pouces de longueur, sur une largeur de deux pouces ou un peu plus: leurs pétioles sont canaliculés en dessus, & longs d'environ six lignes; les pédoncules sont axillaires, veloutés, roussâtres, & divisés en ramifications alternes & distiques, sur lesquelles naissent de petites fleurs sessiles, cotonneuses & roussâtres comme les pédoncules. Le fruit est ovale, & couvert d'un duvet ferrugineux.

Ce muscadier croît naturellement dans l'île de Madagascar, & est cultivé au jardin du Roi à l'Isle de France. J'en ai reçu de M. Sonnerat, des rameaux garnis de fleurs naissantes; & j'en ai vu chez M. de Jussieu, des rameaux munis de jeunes fruits, qui lui ont été communiqués par M. Poivre.

Sixième espèce. Muscadier acuminé; *myrsica acuminata*.

Malao-manguit, espèce de *rara*. Poivre, *herb. de Madagascar*.

Ses feuilles ont leurs nervures latérales rameuses comme celles du muscadier précédent, mais elles sont plus petites, & acuminées d'une manière remarquable; elles sont vertes & un peu luisantes en dessus, blanchâtres en dessous, sans être cotonneuses, & ressemblent assez à des feuilles de poirier; leur côte moyenne est saillante en dessous, & forme en dessus un canal assez profond: les rameaux sont glabres.

Ce muscadier croît, comme le précédent, dans l'île de

Madagascar : j'en ai vu chez M. de Jussieu deux petits rameaux communiqués par M. Poivre. Ces rameaux sont dépourvus de fructification ; mais on voit dans les aisselles de leurs feuilles des pédoncules naissans fort courts, veloutés & ferrugineux.

Septième espèce. Muscadier porte-suif ; *myrsifica sebifera*. *Virola sebifera*. Aubl. Guian. p. 904, t. CCCXLV, le *voirouchi* des Caraïbes, & le *jejemadou* des Créoles.

Il n'y a point de doute que l'arbre dont il s'agit ici, ne soit une véritable espèce de muscadier, comme l'a pensé Aublet, qui cependant lui a donné un nom générique particulier. Il en a en effet tous les caractères essentiels, soit dans la fleur, soit dans le fruit ; mais les fleurs mâles moins monadelphiques que dans les autres espèces, n'ont que six étamines ; différence numérique qui n'est point essentielle, puisque dans le muscadier globulaire, n.º 4, les fleurs mâles n'ont que neuf étamines qui ne sont réunies que par leurs filamens, tandis que dans le muscadier aromatique elles en ont jusqu'à douze, lesquelles sont réunies & par leurs filamens & par leurs anthères. La production en forme de colonne, qui naît du disque de ces mêmes fleurs mâles, & autour de laquelle les étamines sont rapprochées ou réunies dans les autres espèces, se retrouve encore dans celle-ci, quoique fort petite, comme on le voit dans la figure citée ; mais Aublet ne l'indique pas clairement dans sa description.

Les muscadiers des Indes orientales & des Moluques ont, comme il a été dit, leurs parties pleines d'un suc propre fort âcre & de couleur rouge ; c'est aussi ce qu'on observe dans l'espèce dont il est maintenant question. Enfin, le duvet court & ferrugineux qu'on trouve sur les jeunes parties des autres muscadiers, se remarque encore dans celui-ci, & même en plus grande abondance que dans les autres ; car les rameaux, le dessous des feuilles, les pédoncules & les fruits en sont couverts d'une manière remarquable dans les individus de mon herbier.

Je possède les fruits de cet arbre, que M. de Jussieu a bien voulu me communiquer ; & depuis j'ai reçu du même arbre une branche garnie de feuilles & de plusieurs fruits qui y sont encore attachés : elle a été recueillie dans l'île de Cayenne par M. Stoupy, récemment arrivé de cette contrée de l'Amérique, d'où il a rapporté un assez grand nombre de plantes, la plupart fort rares.

Je ne rapporterai point ici la description qu'Aublet a donnée de ce muscadier ; elle me paroît exacte, sur-tout d'après l'examen que j'ai fait des parties de cet arbre que je possède, & qui m'ont présenté les mêmes caractères que ceux dont Aublet a fait mention.

Au reste, il paroît qu'il existe quatre variétés de cette espèce, lesquelles sont peut-être quatre espèces distinctes ; savoir , 1.^o une variété à fruits couverts d'un duvet roussâtre (c'est celle que je possède & dont j'ai traité) ; 2.^o une variété à gros fruits glabres. (*Aubl. t. CCCXLV. n.^{os} 6 & 7*) ; 3.^o une variété à petits fruits glabres (c'est celle qu'Aublet a figurée , & dont les fruits sont représentés aux *n.^{os} 4 & 5*) ; 4.^o enfin , une variété fort remarquable par le prolongement latéral de chaque valve du brou , prolongement qui donne aux fruits une forme allongée transversalement. (*Aubl. t. CCCXLV, fig. 8 & 9*). Si la forme singulière de ces fruits est constante, le muscadier qui les produit devra être regardé comme une véritable espèce.

On tire des semences de cet arbre une résine d'un blanc jaunâtre, grasse, en quelque sorte semblable à du suif, & avec laquelle on fait des chandelles dans le pays. J'ai vu une de ces chandelles, que M. Stoupy a rapportée de Cayenne.

Huitième espèce. Muscadier uniforme ; *myrsica uviformis*.

Je ne connois de cette plante que quelques rameaux chargés de fruits , que M. Sonnerat m'a communiqués sans aucun nom , qu'il a rapportés des Moluques, & que j'ai cru pouvoir rapporter à ce genre, d'après les caractères que m'ont présentés ses fruits ; mais la petitesse de ces mêmes

fruits qui égalent à peine en grosseur les grains du raisin ordinaire , & en même temps leur grand nombre & leur rapprochement , rendent cette espèce fort remarquable , & peut-être douteuse. Je soupçonne néanmoins que c'est une de celles que Rumphe a mentionnées sous le chapitre intitulé : *palala reliquæ minores*. (Herb. amb. 2 , p. 27) : peut-être même est-ce son *palala tertia* qu'il appelle encore *palala minima* & *palala tingens* , & qu'il a figuré (*loc. cit. tab. 7*) ; mais les fruits étant un peu en pointe aux deux bouts , comme il le dit aussi dans sa description , sont représentés trop obtus dans la figure dont il s'agit.

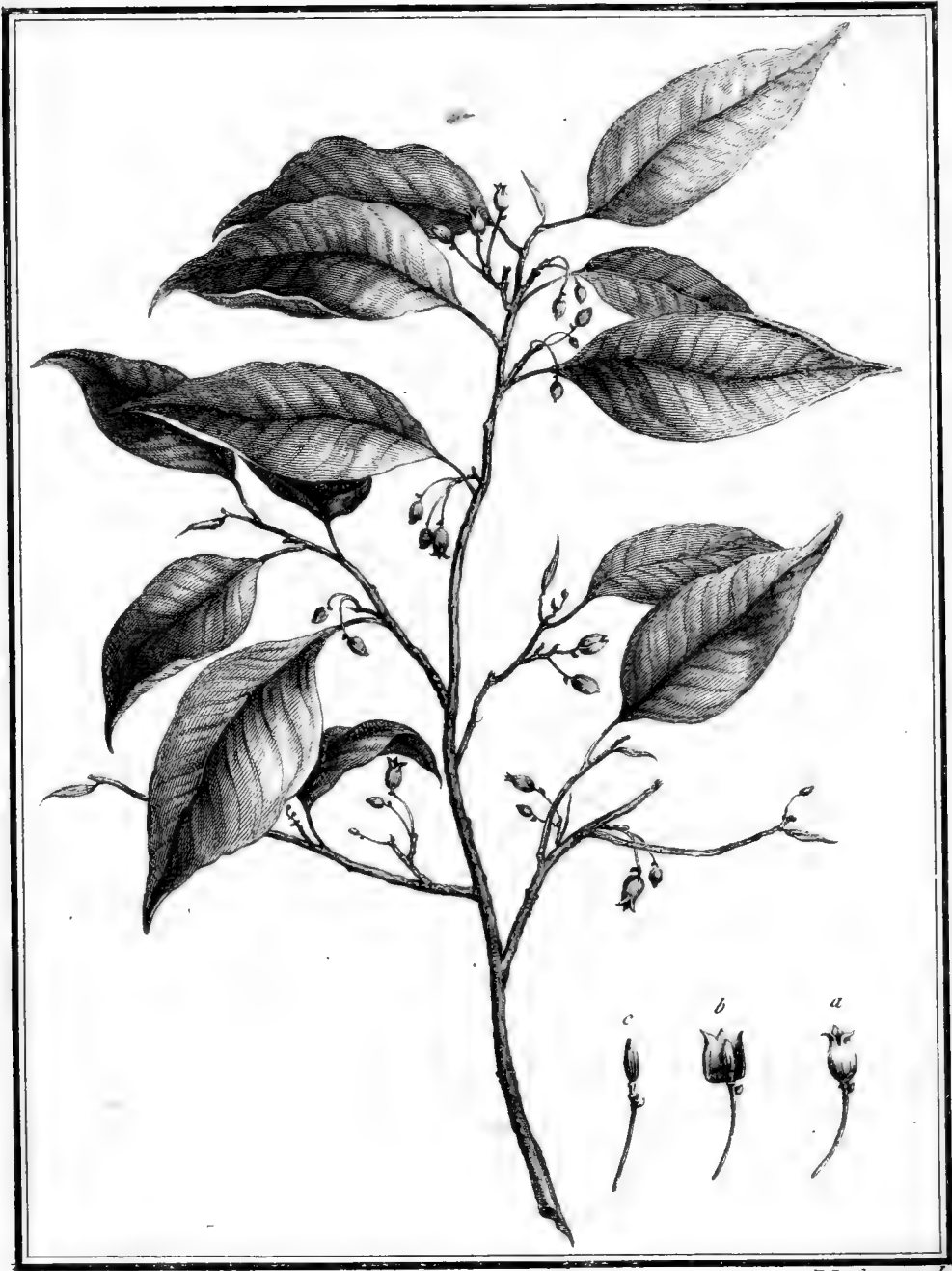
Les rameaux que je possède sont ligneux , cylindriques ; nus dans leur partie inférieure , feuillés & un peu velus vers leur sommet. Les feuilles sont alternes , pétiolées , lancéolées , pointues , onduées sur les bords , glabres en dessus , & un peu velues en dessous , principalement sur leurs nervures ; elles sont longues de trois pouces ou trois pouces & demi , sur une largeur d'un pouce & demi ou davantage : leurs pétioles sont légèrement canaliculés en dessus , & ont deux petites callosités près de leur sommet.

Les fruits naissent en assez grand nombre sur des grappes latérales fort courtes , quelquefois axillaires , & plus souvent situées en abondance sur la partie nue des rameaux. Ces fruits sont petits comme des grains de raisin , nombreux & serrés sur les grappes qui les portent ; ils sont ovales , un peu en pointe aux deux bouts , sessiles sur les pédoncules communs , glabres , de couleur brune , & conservent à leur sommet le stigmate. Ce stigmate paroît quadrifide , lorsque leur brou , qui est sec & coriace , s'est partagé en deux : ces fruits n'ont que cinq lignes de longueur ; sous leur brou est une coque mince , fragile , monosperme , & sur laquelle j'ai cru apercevoir des traces d'un macis desséché , d'un rouge-brun , & comme adhérent à la coque.

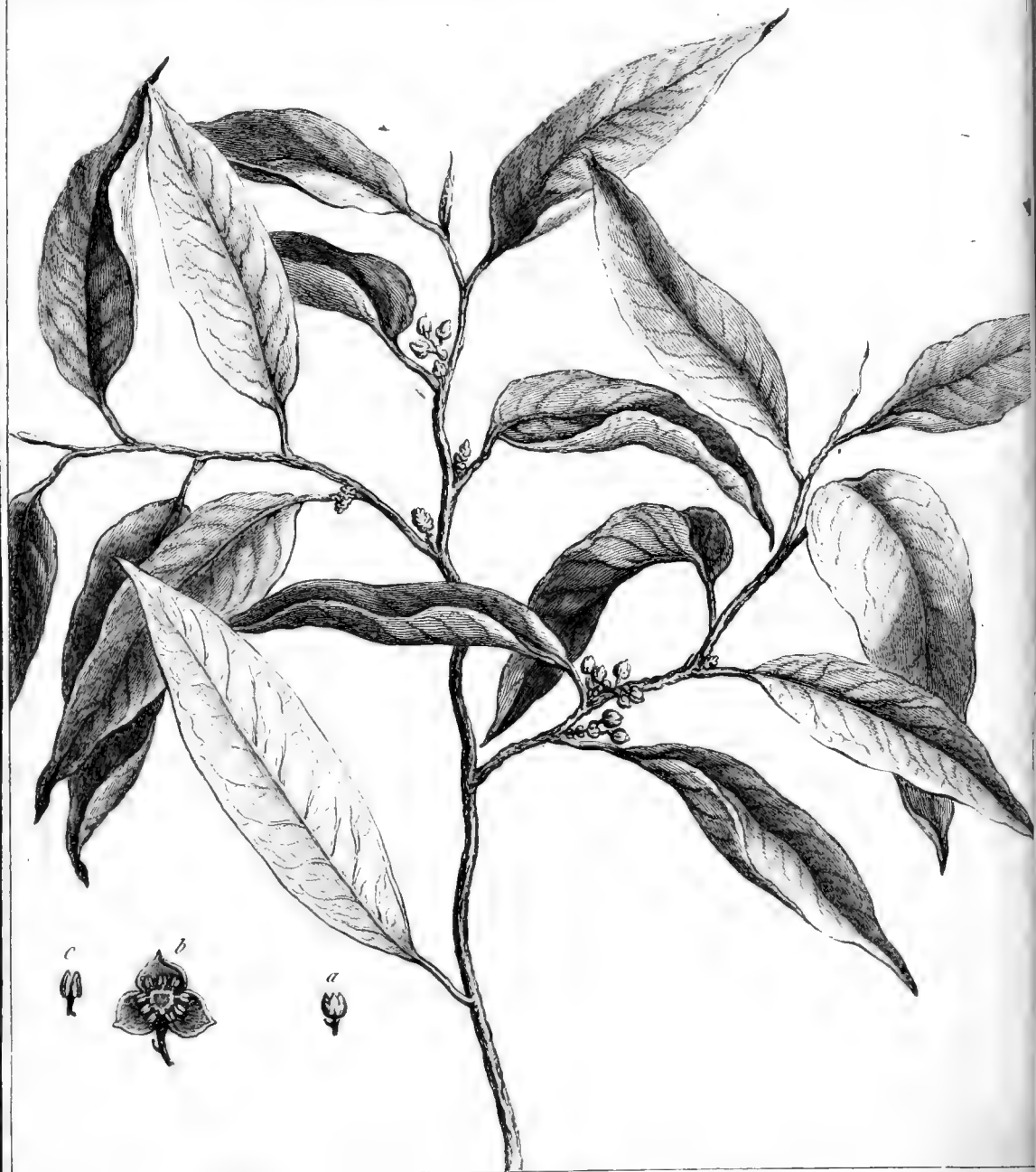
Il existe vraisemblablement encore d'autres espèces de ce

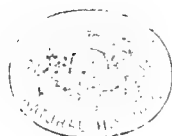
beau genre de plante , comme l'indiquent l'ouvrage de Rumphe , & le catalogue du jardin du Roi à l'Isle de France, par M. Céré; mais ne les connoissant point, je ne puis en donner les caractères distinctifs.

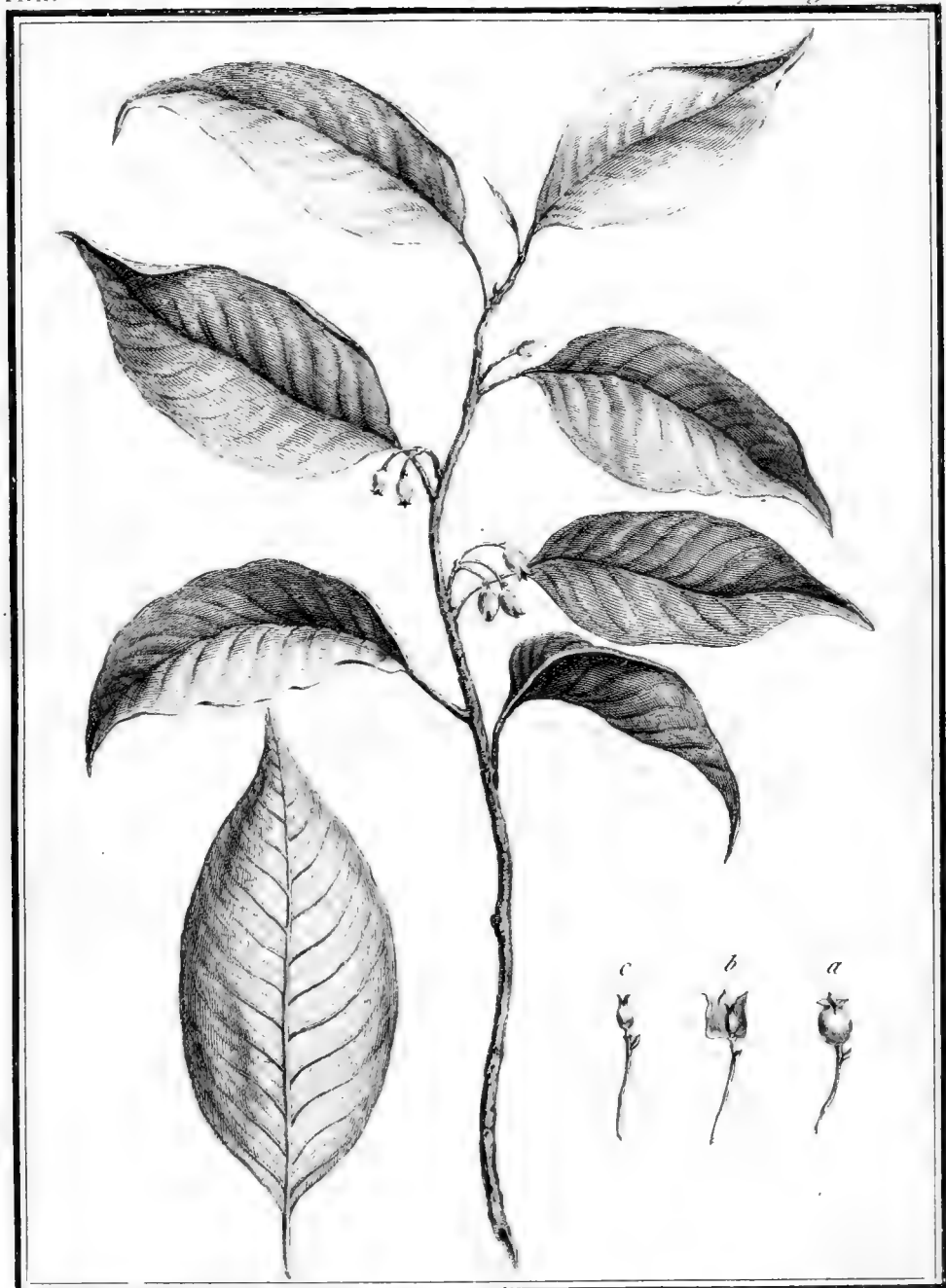








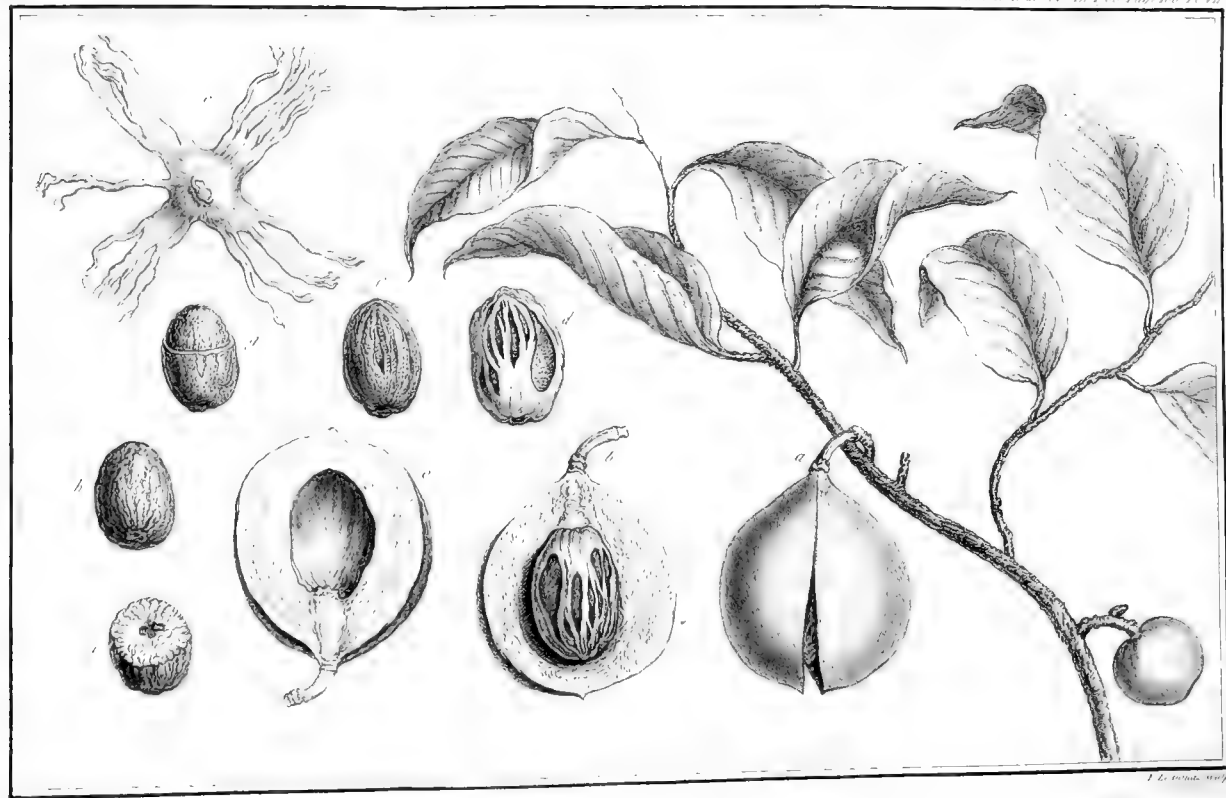




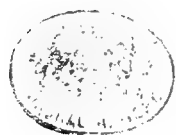




V. Le Gouaz sculp.







RECHERCHES

Sur l'espèce d'Acier la plus propre à recevoir la vertu magnétique.

Par M. BRISSON.

LES physiciens se sont donné bien des soins, & ont fait beaucoup de recherches pour parvenir à connoître la meilleur méthode de toucher les barreaux d'acier, pour en faire des aimans artificiels; mais je ne sache pas qu'on ait cherché à connoître, comparativement les unes aux autres, l'espèce d'acier la plus propre à cet effet, l'espèce susceptible de recevoir la plus grande vertu magnétique: c'est de cette recherche dont je me suis occupé, & dont je vais rendre compte à l'Académie.

J'ai fait faire par un excellent artiste (a), & qui sait très-bien travailler & tremper l'acier, cinq paires de barreaux de différentes espèces d'acier; tous parfaitement égaux en longueur, en largeur, en épaisseur, & même en poids à quelques grains près; tous également bien dressés & polis autant qu'il a été possible, tous trempés de tout leur dur. Chacun de ces barreaux a 6 pouces $\frac{1}{4}$ de ligne de long, 6 lignes de large & 2 lignes d'épaisseur. Je les ai placés deux à deux à la manière de M. Knight, en les séparant par une règle de bois, & les faisant communiquer, à chacune de leurs extrémités, par un contact de fer doux de 9 lignes de largeur.

Pour ne pas les confondre, je les ai tous fait marquer d'un numéro.

Les barreaux, n.^o 1, sont d'acier fondu d'Angleterre, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 51 grains.

(a) Le sieur Feuillet, arquebusier,

Mém. 1788.

Les barreaux, n.^o 2, sont d'acier fondu d'Amboise, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 57 $\frac{1}{2}$ grains.

Les barreaux, n.^o 3, sont d'acier moyen d'Amboise, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 46 $\frac{1}{2}$ grains.

Les barreaux, n.^o 4, sont d'acier d'Allemagne, connu sous le nom d'*écroffe de Pons*, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 53 grains.

Les barreaux, n.^o 5, sont d'acier d'Angleterre, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 40 grains.

J'ai deux paires de barreaux de 17 pouces 6 lignes de long, 1 pouce de large & 6 lignes d'épaisseur, très-forts, & dans lesquels je ranime encore la vertu magnétique, en les touchant alternativement les uns par les autres. C'est avec une paire de ces barreaux que j'ai touché les cinq paires ci-dessus. Je me suis toujours servi de la même paire, également bien préparée; c'est-à-dire, retouchée à chaque fois par l'autre grande paire, afin d'avoir, le plus qu'il seroit possible, égalité en tout, & de ne craindre d'autre variation que la différence de disposition, dans les différentes espèces d'acier, à recevoir la vertu magnétique.

J'ai touché tous ces barreaux à la manière de M. *Anthcaume*. Je les ai donc placés, paire à paire, réunis par leurs contacts & séparés longitudinalement par une règle de bois, dans la direction du méridien magnétique; & pour les toucher, j'ai mis, bout à bout l'un de l'autre, mes deux grands barreaux, se présentant l'un à l'autre par leurs poles de différens noms, & séparés seulement par une carte pliée en trois; & je les ai fait glisser doucement cinq fois, d'allée & de venue, d'un bout à l'autre de chacun des barreaux, & sur chacune des faces larges, sans sortir au-delà de leurs extrémités, en commençant & finissant par le milieu.

Ces barreaux ayant été ainsi touchés, j'ai cherché à connoître leur force attractive; pour cela, je les ai attachés ensemble par le moyen de deux liens de cuivre, garnis chacun d'une vis de pression, & dont l'un porte une belière

destinée à les accrocher à un support. A la partie supérieure, les deux barreaux étoient réunis par leur contact de fer doux; & à la partie inférieure, au lieu du contact, j'ai placé un portant de fer doux, arrondi de manière à ne toucher les barreaux que par une ligne étroite. A ce portant est adapté un crochet destiné à recevoir la belière d'un seau de fer-blanc qui porte les poids. Tout cela ainsi disposé, j'ai chargé successivement & peu-à-peu chaque paire de barreaux avec des grains de plomb, jusqu'à ce que le portant s'en détachât. J'ai eu soin de ne les charger ainsi qu'après les avoir laissé mordre leur portant pendant 24 heures.

Voici maintenant les résultats de ces expériences.

Les barreaux, n.^o 1, d'acier fondu d'Angleterre, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 51 grains, ont porté, y compris le poids du portant, 2 livres 13 onces 5 gros; ce qui est un peu plus de 8 fois leur poids.

Les barreaux, n.^o 2, d'acier fondu d'Amboise, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 57 $\frac{1}{2}$ grains, ont porté, y compris le poids du portant, 1 livre 12 onces 2 gros 36 grains; ce qui est un peu plus de 5 fois leur poids.

Les barreaux, n.^o 3, d'acier moyen d'Amboise, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 46 $\frac{1}{2}$ grains, ont porté, y compris le poids du portant, 5 onces 7 gros 57 grains; ce qui n'est, comme l'on voit, qu'un peu plus de une fois leur poids.

Les barreaux, n.^o 4, d'acier d'Allemagne, connu sous le nom d'*étouffe de Pons*, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 53 grains, ont porté, y compris le poids du portant, 4 livres 3 onces 3 gros 3 grains; ce qui est un peu plus de 12 fois leur poids.

Les barreaux, n.^o 5, d'acier d'Angleterre, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 40 grains, ont porté, y compris le poids du portant, 4 livres 15 onces 1 gros 36 grains; ce qui est plus de quatorze fois leur poids.

Il suit de-là, 1.^o que l'acier d'Angleterre est le plus propre

à recevoir la vertu magnétique, & qu'il doit être préféré à toutes les autres espèces.

2.^o Que l'acier d'Allemagne, connu sous le nom *d'étoffe de Pons*, est le meilleur après l'acier d'Angleterre, puisque sa vertu attractive ne diffère que de $\frac{1}{7}$ de celle de ce dernier.

3.^o Que les aciers fondus ne doivent point être employés à faire des aimans artificiels; car ils ne reçoivent que peu de vertu magnétique.



CONJONCTION INFÉRIEURE DE VÉNUS,

Le 7 Août 1788;

*Avec une nouvelle détermination de l'aphélie de
Vénus & de son moyen mouvement.*

Par M. DE LA LANDE.

CETTE conjonction est une des plus importantes de toutes celles de Vénus, parce qu'elle arrive près de l'aphélie, & cependant elle n'avoit jamais été bien observée qu'une fois; savoir, en 1780 (*Mémoires de l'Académie, 1785, page 259*). J'étois donc très-impatient d'avoir celle de 1788, pour vérifier mes nouvelles Tables de Vénus, qui sont dans la Connoissance des Temps de 1789. Ce sont les seules qui représentent bien les conjonctions inférieures observées jusqu'ici avec le plus de soin; & comme ces observations sont les plus concluantes, & les plus propres à faire juger de l'exactitude des Tables, j'ai lieu de croire les miennes aussi exactes qu'il est possible de les avoir jusqu'à présent.

Cette conjonction de 1788 est arrivée dans le temps que je visitois les grands observatoires d'Angleterre; j'ai eu la satisfaction de l'observer le 3 Août, avec Milord Duc de Marlborough, le plus illustre amateur de l'astronomie, dans le bel observatoire qu'il a consacré à l'astronomie, dans son superbe château de Blenheim. Le lendemain 4, j'observai Vénus avec M. Hornsby, qui possède les plus grands & les plus beaux instrumens, dans le nouvel observatoire d'Oxford, bâti avec autant de magnificence que de commodité. Le 8, j'allai à l'observatoire royal de

Greenwich, pour observer Vénus avec M. Maskelyne, astronome royal d'Angleterre, mais le ciel fut couvert. Au reste, ils ont bien voulu m'envoyer tous les trois les observations des jours qui ont précédé ou suivi la conjonction; & je les rapporterai ci-après.

J'ai reçu aussi des observations de M. Cagnoli, faites à Vérone, de M. de Cesaris à Milan, de M. Mateucci à Bologne, de M. Chiminello à Padoue. Je les avois priés tous de s'y rendre attentifs, de peur que le mauvais temps ne nous privât en France & en Angleterre de cette importante observation; mais elle a réussi par-tout, & ce sera pour l'avenir une base de la théorie de Vénus, & de toutes les recherches qu'on pourra faire pour l'orbite de cette planète.

Je me suis servi des nouvelles Tables du Soleil que M. de Lambre vient de calculer avec un soin & une exactitude inconnus jusqu'à présent, les observations même que je rapporte en prouvent l'exactitude.

Voici l'erreur de ces Tables par le moyen des passages du Soleil & de plusieurs étoiles observés à Greenwich & à Oxford. Les longitudes observées sont pour le midi vrai du lieu où l'observation a été faite.

1788.	LONGITUDE observée à midi.				EXCÈS du calcul.		
	S.	D.	M.	S.			
3 Août.	4	11	41	2,2	— 0,2	Greenwich.	Procyon, Pollux, l'Épi.
4	4	12	38	38,4	+ 6,9	Oxford.	Arcturus.
12	4	20	19	15,0	+ 2,4	Greenwich.	Procyon, Pollux.
12	4	20	19	28,5	+ 0,8	Oxford.	β Taureau, α Orion, Procyon.

Au reste, l'erreur de ces Tables, vérifiée sur plus de trois cents observations de M. Maskelyne, ne va jamais à 10".

*Observations faites au château de Blenheim, par Milord
Duc de Marlborough.*

		PASSAGE au méridien en temps de la pendule.	DISTANCE au zénith du bord supérieur de Vénus.	Baromèt.	Therm. intér.	Therm. extér.
1. ^{er} Août.	α d'Orion....	5 ^h 44' 2",5				
2	Vénus, 1. ^{er} bord.	9. 18. 46,98	43 ^d 9' 14",9	30 ^P 15	65 ^d $\frac{2}{3}$	66 ^d $\frac{1}{3}$
	α de la Couronne.	15. 26. 3,50				
	α du Serpent. . .	15. 34. 11,22				
	La Chèvre....	5. 1. 23,90				
	Rigel.....	5. 4. 40,76				
	β du Taureau...	5. 13. 14,40				
	α d'Orion.....	5. 44. 1,60				
	Pollux.....	7. 32. 38,60				
3 Août.	Vénus, 1. ^{er} bord.	9. 16. 23,04	43. 8. 50,7	30. 14	69 $\frac{1}{2}$	73.
	α de la Cour. B.	15. 26. 2,54				
	La Chèvre....	5. 1. 23,10				
	Rigel.....	5. 4. 39,90				
	β du Taureau...	5. 13. 13,50				
	Castor.....	7. 21. 21,50				
	Pollux.....	7. 32. 37,80				
4 Août.	η premier bord.	9. 13. 55,65	43. 7. 52,4	30. 10	72.	78.
	α de la Cour. B.	15. 26. 1,60				
6	Vénus, 1. ^{er} bord.	9. 8. 55,00	43. 3. 19,3	29. 89	62.	61 $\frac{1}{2}$
	α de la Cour. B.	15. 26. 00,40				

La différence des méridiens entre Paris & Blenheim est de 14' 45" qu'il faut ajouter au temps de Blenheim pour avoir celui de Paris.

L'erreur du mural est de 8",2 qu'il faut ôter des distances au zénith.

La latitude de Blenheim est de 51^d 50' 26",0 nord.

Nous parlerons ci-après du baromètre & du thermomètre.

176 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Observations faites à Oxford, par M. Hornsby.

	TEMPS de la pendule.		DISTANCES au zénith.	Baromèt.	Therm.	Therm.
1. ^{er} Août	4 ^h 23' 53".55	Aldebaran.....	35 ^d 41' 7".8	30 ^p 32.	57 ^d	64 ^d
	5. 4. 27,64	Rigel.....				
	5. 13. 1,11	β du Taureau...				
	5. 43. 48,47	α d'Orion.....	44 23. 52	30. 32. 60.		64 $\frac{1}{2}$
			Bord inférieur.			
2 Août	8. 52. 49,32	Centre du Soleil.	34. 27. 24,4	30. 33. 65 $\frac{1}{4}$		67
			Bord supérieur.			
	9. 18. 33,33	Vénus, 1. ^{er} bord.	43. 4. 43,1	30. 33. 65 $\frac{3}{4}$		67 $\frac{1}{2}$
	13. 14. 9,49	L'Épi.....				
	14. 6. 6,29	Arcturus.....				
	4. 23. 52,58	Aldebaran.....	35. 41. 9,9	30. 29. 58.		64
	5. 4. 26,77	Rigel.....				
	5. 43. 47,42	α d'Orion.....				

La pendule retarde de 0",92 par jour.

3 Août	14 ^h 6' 5".65	Arcturus.....				
	4. 23. 50,90	Aldebaran.....	35 ^d 41' 10".9	30. 27. 61.		65 $\frac{3}{4}$
	5. 4. 25,13	Rigel.....				
	5. 12. 58,43	β du Taureau...				
	5. 43. 45,64	α d'Orion.....	44. 23. 55.	30. 27. 65.		67 $\frac{1}{2}$
4	9. 0. 29,42	Centre du Sol.				
			Bord supérieur.			
	9. 13. 40,89	Vénus, 1. ^{er} bord.	43. 3. 26,9	30. 25 $\frac{1}{2}$	75 $\frac{1}{4}$	71.
	14. 6. 3,43	Arcturus.....				

La pendule retarde de 1",62 par jour; on l'a changée après cette observation.

11 Août	5 ^h 12' 42".21	β du Taureau...				
	5. 43. 29,30	α d'Orion.....				
	7. 27. 58,70	Procyon.....				
	8. 53. 44,42	Vénus, 2. ^d bord.	42 ^d 29' 11".2	29. 72.	68.	64 $\frac{3}{4}$
12 Août	9. 30. 41,25	Centre du Sol.				
	4. 23. 36,30	Aldebaran. ...	35. 41. 7,0	29. 41.	59	63 $\frac{1}{2}$

12 Août.

	TEMPS de la pendule.		DISTANCES au zénith.			
12 Août	5 ^h 4' 10",39	Rigel.....				
	5. 12. 44,12	β du Taureau...				
	5. 43. 31,43	α d'Orion.....	44 ^d 23' 52",0	29 ^b 40.	61 ^d $\frac{1}{4}$	64 ^d
	7. 28. 0,60	Procyon.....				
	8. 51. 30,42	Vénus, 2. ^d bord.	42. 22. 19,1 b. sup.	29. 38.	66 $\frac{3}{4}$	66 $\frac{1}{8}$
13	8. 49. 21,48	Vénus, 2. ^d bord.	42. 15. 8,3	29. 19.	61 $\frac{1}{4}$	62 $\frac{1}{4}$
La pendule avance de 1",98 par jour.						
14 Août.	14. 5. 51,40	Arcturus.....				
	4. 23. 38,84	Aldebaran.....	35. 41. 6,8	29. 43.	54 $\frac{3}{4}$	59 $\frac{1}{2}$
	5. 12. 46,74	β du Taureau...				
	5. 43. 33,53	α d'Orion.....	44. 23. 53,1	29. 48.	57 $\frac{3}{4}$	60 $\frac{1}{2}$
		Eord super. e. r.				
	8. 47. 16,99	Vénus, 2. ^d bord.	42. 7. 35,9	29. 44.	62.	62 $\frac{3}{4}$
		Bord inférieur.				
15	9. 42. 1,34	Centre du Soleil.	38. 13. 19,0	29. 44 $\frac{1}{2}$	62 $\frac{3}{4}$	64.
	14. 5. 51,17	Arcturus.....				
	4. 23. 38,28	Aldebaran.....	35. 41. 5,8	29. 56.	54 $\frac{3}{4}$	59 $\frac{1}{2}$
	5. 4. 12,52	Rigel.....				
	5. 12. 46,05	β du Taureau...				
La pendule retarde de 0",60 par jour. Les observations suivantes ont été faites avec une autre pendule.						
18 Août.	5. 4. 10,34	Rigel.....				
	5. 12. 43,86	β du Taureau...				
		α d'Orion.....	44. 23. 51,2.	29. 52.	57.	61.
	6. 35. 36,67	Sirius.....				
	7. 28. 0,15	Procyon.....				
19	9. 56. 52,34	Centre du Soleil.	39. 30. 51,0 b. inf.	29. 50.	65 $\frac{3}{4}$	64 $\frac{3}{4}$
	5. 43. 31,31	α d'Orion.....				
	6. 35. 35,98	Sirius.....				
	8. 38. 43,13	Vénus, 2. ^d bord.	41. 26. 44,1 b. sup.	29. 69.	61 $\frac{3}{4}$	64 $\frac{1}{2}$
20	10. 0. 34,01	Centre du Soleil.	39. 19. 0,3 b. sup.	29. 69.	69	65
La pendule retarde de 0",75 par jour.						

178 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Les centièmes de secondes que l'on voit dans les temps des passages, sont donnés par le milieu, que M. Hornsby prend toujours entre cinq fils, dont les deux qui précèdent le méridien & les deux qui le suivent sont réduits au milieu. Les distances au zénith sont affectées de l'erreur du mural; mais les distances des étoiles au zénith suffisent pour la trouver. La hauteur du baromètre est en pouces Anglois & centièmes de pouces; 29 pouces font 27 p. 2 lignes 56 de France, & les 30 pouces font 28 p. 1 li. 79. Les degrés du thermomètre Anglois sont tels, que 60 répondent à $12\frac{1}{2}$ du thermomètre François, & 75 à 19 du nôtre. La latitude d'Oxford est $51^d 45' 40''$; & il est $0^h 14' 22''$ à l'occident du méridien de Paris.

Observations faites à Greenwich, par M. Maskelyne, Astronome Royal d'Angleterre.

	PASSAGE en temps de la pendule.			DISTANCES au zénith, observées.		
	H.	M.	S.		D.	M. S.
Le 2 Août.	7.	28.	19,24	Procyon.		
	7.	32.	27,10	Pollux.		
3	8.	56.	41,97	Centre du Soleil.		
	9.	16.	12,60	Vénus, 1. ^{er} bord.	42.	46. 53.2. b. supér.
	13.	14.	11,18	L'Épi de la V. . .	Réfract.	51,9.
	14.	6.	8,20	Arcturus.		
	La pendule avance de $0''$,32 par jour.					
Le 10 Août.	8.	56.	29,98	Vénus, 2. ^d bord	42.	17. 55,9 b. supér.
11	9.	27.	18,16	Centre du Soleil	Réfract.	51,1.
	17.	25.	19,00	α d'Ophiucus. . .		
	4.	23.	58,99	Aldebaran. . . .		
	6.	36.	59,48	Sirius.		
	7.	21.	14,82	Castor.		
	7.	28.	23,32	Procyon.		
	7.	37.	31,16	Pollux.		
	8.	54.	9,16	Vénus, 2. ^d bord.	42.	11. 45. b. supér.
Le 12	9.	31.	4,98	Centre du Soleil.	Réfract.	50,3.
	La pendule avance de $0''$,37 par jour.					

Il faut ajouter $4''{,}2$ à toutes les distances au zénith que donne le mural.

La latitude est de $51^{\text{d}} 28' 40''$, la différence des méridiens, $9' 21''$ par le résultat des triangles que M. le général Roy venoit de terminer, & qu'il m'a communiqué en Angleterre.

J'ai calculé une partie des observations précédentes, & je les ai comparées avec le calcul fait sur mes Tables; on en voit ici l'erreur, c'est-à-dire, ce qu'il faut ôter du calcul ou y ajouter pour avoir le lieu observé.

1788.	TEMPS MOYEN, à Paris.	LONGITUDE GÉOCENTRIQUE, observée.	LATITUDE GÉOCENTR. observée.	ERREURS DES TABLES,		LIEUX des Observations.
				en long.	en lat.	
	H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	S.	S.	
2 Août.	0. 46. 11	4. 19. 18. $57\frac{1}{2}$	6. 42. 05 $\frac{1}{2}$ A	- 14	- 22	à Blenheim.
3	0. 34. 30	4. 18. 45. $6\frac{1}{2}$	6. 52. 21	14	+ $9\frac{1}{2}$	à Greenwich.
4	0. 33. 8	4. 18. 9. 52	7. 2. 34	19	+ 31	à Oxford.
6	0. 20. 43	4. 16. 57. $18\frac{1}{2}$	7. 20. 5	23	+ 25	à Blenheim.
10	23. 43. 20	4. 13. 53. $7\frac{1}{2}$	7. 50. $17\frac{1}{2}$	35	+ 16	à Greenwich.
11	23. 42. 3	4. 13. 17. $34\frac{1}{2}$	7. 54. 7	$3\frac{1}{2}$	+ $25\frac{1}{2}$	à Oxford.
12	23. 35. 52	4. 12. 43. $6\frac{1}{2}$	7. 56. $43\frac{1}{2}$	24	+ 31	à Oxford.
14	23. 23. 45	4. 11. 37. $51\frac{1}{2}$	7. 59. 46	31	+ 29	à Oxford.

Pour déduire de ces observations le temps de la conjonction, j'ai supposé l'erreur moyenne $24''$ en longitude, que j'ai ôtées des lieux calculés les 6 & 10 sans aberration, & comptés de l'équinoxe moyen; je les ai comparés aux lieux du Soleil corrigés par l'aberration, & comptés aussi de l'équinoxe moyen, & j'ai trouvé la conjonction vraie le 7, à $12^{\text{h}} 34' 4''$ temps moyen à Paris, la longitude: $10^{\text{d}} 16^{\text{d}} 0' 51''$.

M. de Cefaris, dans les Éphémérides de Milan pour 1790, rapporte les observations de cette conjonction avec le calcul qu'il en a fait, & il trouve la conjonction, le 7 à $13^{\text{h}} 3' 42''$.

temps moyen à Milan ; la longitude héliocentrique vraie étant $10^{\circ} 16' 0'' 51''$ (page 80). Il a eu égard à l'aberration & à la nutation pour le Soleil & pour Vénus.

La latitude de Vénus calculée par les Tables, suppose l'inclinaison, $3^{\circ} 23' 20''$ comme elle étoit dans mes Tables de 1771 ; mais elle m'a paru de $3^{\circ} 23' 35''$ par plusieurs observations (*Mémoires* 1785, p. 266) ; ainsi il y auroit $14''$ de plus pour la latitude héliocentrique, $36''$ de plus pour la latitude géocentrique. En calculant cette latitude par les Tables, je trouve pour l'heure de la conjonction, $7^{\circ} 31' 2''$; & supposant l'erreur de $21''$, j'ai pour la latitude observée, $7^{\circ} 31' 23''$. Suivant cette observation, il y auroit $5''$ à ôter de l'inclinaison $3^{\circ} 23' 35''$ que j'avois trouvée par les observations des dernières conjonctions de Vénus, & l'inclinaison seroit de $3^{\circ} 23' 30''$. M. Bugge trouve l'inclinaison par les observations, de 1781, $3^{\circ} 23' 39''$; par celles de 1783, $41''$; par celles de 1786, $36''$; par le milieu de trente observations faites en différentes années, $3^{\circ} 23' 39''$. Elle est dans mes Tables, $3^{\circ} 23' 35''$.

Le mouvement de Vénus n'étant pas uniforme dans un intervalle de cinq jours, il ne suffisoit pas d'une simple proportion pour trouver la conjonction ; & lorsque je l'ai eu trouvée de cette manière j'ai recalculé le lieu du Soleil & de Vénus, pour tenir compte de l'inégalité du mouvement de Vénus d'un jour à l'autre aux environs de la conjonction.

Pour la bien connoître j'ai pris les passages au méridien observés à Greenwich le 3 & le 10, j'en ai conclu les intermédiaires par les observations de M. Cagnoli, & j'ai calculé par les Tables le lieu de Vénus pour chaque jour à l'heure du passage au méridien de Greenwich, & la latitude géocentrique aussi par les Tables, qui supposent l'inclinaison de $3^{\circ} 23' 20''$. Ces latitudes devroient être augmentées d'environ $30''$, ou l'inclinaison de $15''$.

TEMPS MOYEN, à Paris.			DIFF. M. S.	LONGITUDE géoc. observée.			Mouvem. M. S.	II. ^{4c} différ. S.	LATITUDE géocentrique.			Mouvem latit. M. S.
H.	M.	S.		S.	D.	M. S.			D.	M.	S.	
3 Août,	0.	34.	34	6. 21	4. 18.	45. 20	35. 2		6. 52.	12		
4	0.	28.	13	6. 24	4. 18.	10. 18	35. 56	54	7. 2.	3	9. 51	
5	0.	21.	49	6. 26	4. 17.	34. 22	36. 33	47	7. 11.	10	9. 7	
6	0.	15.	23	6. 26	4. 16.	57. 49	36. 57	14	7. 19.	40	8. 30	
7	0.	8.	57	6. 26	4. 16.	20. 52	37. 10	14	7. 27.	19	7. 39	
8	0.	2.	31	6. 25	4. 15.	43. 42	36. 59	11	7. 34.	18	6. 59	
8	23.	56.	6	6. 24	4. 15.	6. 43	36. 40	19	7. 40.	20	6. 2	
9	23.	49.	42	6. 22	4. 14.	30. 3	36. 14	36	7. 45.	38	5. 18	
10	23.	43.	20	6. 17	4. 13.	53. 49	35. 36	38	7. 50.	2	4. 24	
11	23.	37.	3	6. 11	4. 13.	18. 13	34. 30	66	7. 53.	35	3. 33	
12	23.	30.	52		4. 12.	43. 43			7. 56.	18	2. 43	

Cette Table suffit pour faire voir qu'on ne peut déduire exactement une conjonction de Vénus par des observations éloignées de plusieurs jours, sans avoir égard à l'inégalité du mouvement; elle servira aussi dans d'autres conjonctions semblables.

L'erreur des Tables étant — 24" en longitude, elle est + 9" sur le lieu vu du Soleil aux environs de l'aphélie; elle étoit + 22" en 1787 aux environs du périhélie, ou — 8" sur la longitude héliocentrique; cela sembleroit indiquer une augmentation de 11' à 12' à faire dans le lieu de l'aphélie de Vénus, que j'avois employé dans mes Tables (*Connoissance des Temps 1789*), où j'ai supposé pour 1788, 10^h 24^d 26' 47". En effet, en diminuant l'excentricité & l'époque, on produiroit le même effet dans les deux conjonctions, tandis que l'erreur s'est trouvée en sens contraire. Ainsi la correction me paroît devoir tomber uniquement sur le lieu de l'aphélie; & comme ces deux conjonctions ont été observées & calculées avec un soin qu'on n'y avoit jamais mis, je crois qu'elles suffisoient pour établir très-bien le lieu de l'aphélie de Vénus.

Mais voyant que ces observations s'accordoient aussi-bien; j'ai voulu y mettre un dernier degré de précision, en employant les perturbations que Jupiter a produites sur Vénus, dont j'avois donné le calcul (*Mém. de l'Académie 1760*). J'ai trouvé qu'il falloit appliquer au calcul $-1''{,}6$ dans la première, & $+3''{,}1$ dans la seconde. Par-là les erreurs se réduisent à $6''$, qui font $8'$ sur le lieu de l'aphélie, & il devient pour 1788, $10^{\circ} 8^d 26' \frac{1}{2}$; c'est ainsi que je l'emploie dans les Tables de la troisième édition de mon *Astronomie*.

Je finirai en rapportant quelques observations qui m'ont été envoyées par M. Bugge, habile astronome de Copenhague, & qui servent à constater l'exactitude de mes Tables, même avant les dernières corrections.

TEMPS MOYEN, à Copenhague.		LONGITUDE observée.		LATITUDE observée.		ERREURS des Tables. Long. Latit.	
	H. M. S.	S. D. M. S.		D. M. S.		S.	S.
1788. 5 Mai	3. 0. 31	3. 29. 18. 36		2. 42. 0		+ 31	+ 25
6	3. 1. 24	3. 0. 23. 39		2. 43. 15		20	22
7	3. 2. 17	3. 1. 28. 43		2. 42. 22		27	17
9	3. 4. 4	3. 3. 38. 2		2. 46. 26		33	14



SUR LA PARALLAXE DE LA LUNE.

QUATRIÈME MÉMOIRE *.

Par M. DE LA LANDE.

LES observations de la Lune faites par M. de la Caille au cap de Bonne-Espérance, & par moi à Berlin, en 1751 & 1752, me servirent alors à déterminer la parallaxe de la Lune, & ce fut la première détermination exacte que l'on eût de cet élément astronomique; j'en conclus la constante pour Paris, $57' 3''{,}3$ (*Mémoires de l'Académie* 1756, page 378); mais la figure de la terre influe un peu sur ces résultats, & il est nécessaire d'y revenir, actuellement que l'on connoît mieux les dimensions du sphéroïde terrestre.

Je supposois en 1756, avec M. Bouguer, que l'aplatissement de la terre étoit $\frac{1}{179}$, & que la courbe du méridien étoit déterminée par les trois degrés mesurés au Pérou, en France & au cercle polaire, avec des accroissemens proportionnels aux quatrièmes puissances des sinus des latitudes. J'avois parcouru aussi d'autres hypothèses sur les dimensions du sphéroïde; mais la constante $57' 3''{,}0$ étoit fondée sur cette hypothèse, & c'est celle dont Mayer, Clairaut & la Caille firent usage.

Un plus grand nombre de degrés mesurés depuis ce temps-là, des expériences sur la pesanteur ou sur le pendule simple, faites en divers climats, des recherches sur la théorie hydrostatique de la figure de la terre, nous ont appris que l'aplatissement de la terre étoit beaucoup moindre; & j'ai trouvé moi-même qu'on devoit tout au plus le supposer de $\frac{1}{300}$ (*Mémoires de l'Académie* 1785).

* Les trois premiers sont dans les volumes de 1752, 1753 & 1756.

Or, les mêmes observations qui me donnoient $57' 3'' .3$. pour la parallaxe moyenne, ne me donnent plus que $56' 57''$ quand je les calcule dans cette nouvelle hypothèse. C'est ce que je vais prouver par un exemple tiré de mes anciens calculs, & réfait avec les nouveaux élémens.

Le degré de l'équateur & celui de Paris s'accordant assez bien avec cet aplatissement de $\frac{1}{300}$, je me servirai de ces degrés pour en déduire les dimensions du nouveau sphéroïde; il suffit de les changer de 7 toises, & de supposer 56746 vers l'équateur, & 57076 toises à $49^d 23'$ de latitude. Supposant que les accroissemens des degrés sont comme les carrés des sinus des latitudes, on aura le dernier degré 57319 . Les rayons de ces deux degrés étant 3251307 toises, & 3284136 , le tiers de la différence 10943 , sera la différence des rayons, & l'on aura pour le rayon de l'équateur 3273193 , & pour le demi-axe 3262250 toises.

Les latitudes de Berlin & du cap de Bonne-Espérance; $52^d 31' 13''$, & $33^d 55' 12''$, donnent pour les rayons des sphéroïdes 3266302 & 3269785 ; les angles des verticales étant comme les sinus des latitudes doubles seront $11' 4''$ & $10' 37''$. Tout ceci n'est qu'une approximation, mais elle est facile & suffisante dans cette matière; il n'y a que 5 toises d'erreur sur le dernier degré & 15 sur le rayon, & il faudroit environ 955 toises pour faire $1''$ de parallaxe.

Cependant j'ai voulu voir ce que donneroit un calcul rigoureux de l'ellipse qui a $\frac{1}{300}$ pour aplatissement, en partant du $1.^{er}$ degré qui est coupé par l'équateur, & de celui de $49^d 23'$; il faut, pour avoir l'excès d'un autre degré, employer l'expression $3 a d \sin.^2 L + \frac{15}{2} a^2 d \sin.^4 L$, dans laquelle a est l'aplatissement, d le degré de l'équateur, L la latitude du lieu pour lequel on cherche le degré (*M. Cagnoli, Trigonom. p. 408*). Le dernier terme que l'on néglige dans la première approximation, n'est que 5 toises pour le pôle.

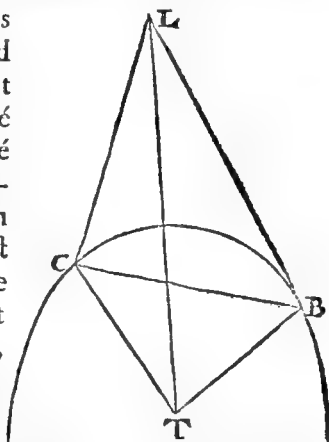
Si l'on

Si l'on nomme D la longueur du degré de Paris, on a

$$a \left(1 - \frac{1}{2} a \right) = \frac{1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2}{2 \sin^2 L}; \text{ j'en ai conclu qu'en}$$

supposant les degrés 56747,0 & 57075,1, c'est-à-dire avec un changement de 6 toises, on avoit l'aplatissement de $\frac{1}{300}$, tel que je le suppose en nombres ronds.

Le rayon de courbure dans une ellipse au sommet du grand axe, est égal au carré du petit axe, quand on prend pour unité le demi-grand axe; or, le carré du petit axe est donné par l'aplatissement de la terre en fraction du grand axe; & puisqu'il est connu en toises par la mesure du premier degré, on aura le petit demi-axe en toises 3262237, l'aplatissement 10911, le rayon de l'équateur 3273148.



Pour avoir les rayons de la terre au Cap, à Berlin & à Paris, b étant le demi-petit axe, & e l'excentricité de l'ellipse, en sorte que $b^2 = 1 - e^2$, on a le rayon $1 - \frac{1}{2} e^2 b^2 \sin^2 L - \frac{5}{8} e^4 \sin^4 L$ (*M. Cagnoli, page 412*). Ainsi le rayon au Cap sera 3269770, à Berlin 3266298, & à Paris, 3266986; les angles de la verticale 10' 37", & 11' 5", 7.

Soit T le centre de la Terre, L la Lune, C le Cap; B la place de Berlin, l'angle $BC T$ sera de $46^d 55' 41''$, 5, l'angle $CB T$ $46^d 59' 36''$, 1, la distance BC a pour logarithme 66494177.

Supposons la distance du centre de la Lune au zénith du Cap, le 24 Août 1752, $28^d 9' 6''$, corrigée de la réfraction, & l'angle $BL C$ déduit de l'observation du Cap comparée à celle de Berlin $1^d 13' 28''$, 5 (*Mém. de l'Acad. 1753, Mém. 1788.* A a

page 104); cela suffit pour en conclure la distance TL de la Lune; & le rayon de la Terre pour Paris étant de 3266986, il s'ensuit que la parallaxe horizontale est de $55' 16'',2$ pour ce jour-là.

Dans l'hypothèse de Bouguer, nous avons le rayon de l'équateur 3281013 toises, le demi-axe 3262688, TC 3276130, BT 3270385, la distance BC 4458025, les angles des verticales $19' 33'',5$ & $16' 27'',5$; l'angle C $47^d. 1'. 33''.\frac{1}{3}$, & l'angle B $47^d 8' 2''\frac{2}{3}$. Le rayon pour Paris étant de 3271581 (*Mém. de l'Acad. 1752, page 106*), je trouve la parallaxe $55' 22'',4$ plus grande de $6'',2$ que dans ma nouvelle hypothèse.

J'ai calculé de même l'observation du 3 Décembre 1751 (*Mémoires de l'Académie 1752, page 91*), où la distance de la Lune au zénith du Cap fut observée de $31^d 44' 35'',7$, & l'angle L de $1^d 22' 43'',2$; cela donne pour Paris $61' 19'',1$ & $61' 12'',1$: la différence des deux hypothèses est $7'',0$.

Ces deux différences donnent pour la parallaxe moyenne $6'',4$ & $6'',5$, ainsi la moyenne est $56' 56''$ & 8 ou 9 dixièmes. On peut donc supposer la constante pour Paris, $56' 57''$ pour l'équateur, $57' 3'',7$; & pour le pôle, $56' 51'',9$.

Cela suppose le résultat moyen que j'avois tiré de toutes mes comparaisons d'observations, & qui étoit de $57' 3'',3$ dans l'hypothèse de Bouguer: il est d'accord, à une $\frac{1}{2}$ seconde près, avec celui que la Caille avoit tiré des comparaisons semblables (*Mémoires de l'Académie 1761*); car son résultat revient à $56' 57'',4$, en le réduisant à la même hypothèse. M. du Séjour trouve $57' 0''$, c'est-à-dire, $3''$. de plus (*Mémoires de l'Académie 1782, p. 343, Traité analytique, page 547*); & c'est à cela que revient aussi la Table de Mayer. Telle est l'incertitude que laissent des observations qui n'étoient pas faites avec d'aussi bons instrumens que

ceux qu'on pourroit y employer aujourd'hui ; mais comme l'on n'a point fait depuis 1752 d'observations qui puissent tenir lieu de celles que je viens de rapporter, nous ne pouvons que faire usage de celles que nous avons, & il me paroît que la constante $56' 57''$, pour Paris, est celle qui les représente le mieux.

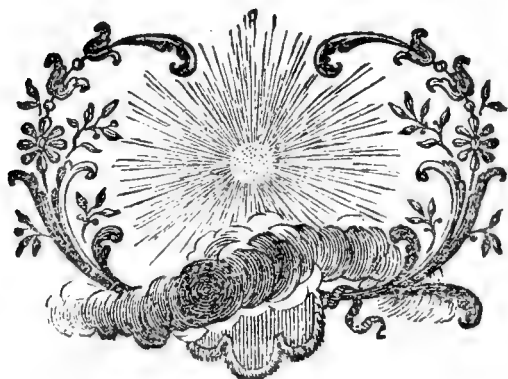
Cependant pour prendre un milieu entre les résultats de la Caille, ceux de M. du Séjour & les miens, j'ajouterai $1'',3$, & je supposerai $56' 58'',3$ pour Paris, $56' 53'',2$ sous le pôle, & $57' 5'',0$ pour l'équateur.

La parallaxe qui répond au rayon moyen de la terre est plus grande de $2'',6$ que celle de Paris ; elle est de $57'. 0''9$, je l'emploierai de $57'. 1''$.

M. de la Place est persuadé qu'on pourroit diminuer encore cet aplatissement de la terre, & le réduire à $\frac{1}{321}$; cela produiroit encore une diminution de $\frac{1}{10}$ de seconde dans la parallaxe (*Mémoires de l'Académie 1783, page 23*), mais je m'en tiens au résultat que j'ai trouvé par les dernières expériences du pendule, & la comparaison de tous les degrés faite par M. Boscovich. D'ailleurs, nous supposons toujours ici que la figure de la terre est elliptique & régulière, supposition qui ne sauroit être bien rigoureuse, & qui laissera toujours une petite incertitude dans la parallaxe.

Mais la diminution de $6''$ que je viens de faire à la parallaxe, étoit assez importante pour mériter d'être expliquée ici, & pour entrer dans les Tables de Mayer, que je fais réimprimer dans la troisième édition de mon *Astronomie*. La Table de Mayer a été aussi calculée par M. de Lambre, parce qu'elle n'étoit pas tout-à-fait conforme à l'excentricité qui résulte de l'équation de la Lune employée dans les mêmes Tables, & qui est de $6^d 18' 31'',6$. Cette équation suppose l'excentricité $0,05503568$, & il paroît que Mayer avoit supposé $0,05454$, en calculant la Table des parallaxes, ce qui donne pour l'apogée $54' 13'',5$ au lieu de $54' 13'',0$ que l'on trouve dans la Table. Au reste,

il est possible qu'il ait calculé sa Table par une méthode peu exacte, & se soit trompé d'une demi-seconde sur la parallaxe apogée; mais la nouvelle Table sera plus conforme & à l'excentricité que l'on admet actuellement, & à la parallaxe dont j'ai donné la valeur dans ce Mémoire.



M É M O I R E

SUR LE DIAMÈTRE DE LA LUNE.

Par M. DE LA LANDE.

QUOIQUE tous les élémens de la Lune aient été discutés plusieurs fois, on n'a point encore publié d'observations calculées & de résultats détaillés sur la quantité du diamètre apparent de la Lune, & sur ses variations observées avec de grandes lunettes. Cette matière m'a paru digne d'être examinée en détail, & je vais rapporter ici plusieurs observations avec les conséquences qui en résultent.

Lorsque j'eus déterminé, en 1752, la parallaxe de la Lune, par la comparaison de mes observations avec celles que M. de la Caille avoit faites au cap de Bonne-Espérance, je donnai le rapport entre la parallaxe & le diamètre de la Lune, & j'annonçai en 1762 dans la Connoissance des Temps pour l'année 1764, *page 201*, & dans la première édition de mon Astronomie, *page 663*, que j'avois reconnu en même temps que le diamètre horizontal de la Lune étoit à sa parallaxe pour Paris, comme 30' est à 54' 56", en comparant avec ces parallaxes les diamètres de la Lune que j'avois observés avec un héliomètre de 18 pieds.

Depuis que j'ai diminué l'aplatissement de la terre, & par conséquent les parallaxes qui résultoient de nos observations, il a fallu changer le rapport dont il s'agit; cela m'a fait voir qu'il falloit pour le diamètre de la Lune des quantités absolues & des valeurs observées que chacun pût appliquer aux parallaxes qu'il croiroit devoir adopter: j'ai donc recherché mes anciennes observations des diamètres de la Lune, je les ai recalculées de nouveau, & comparées

avec les parallaxes des Tables de Mayer, & l'on en trouvera le résultat ci-après.

L'héliomètre de 18 pieds dont je me suis servi pour ces observations, fut le premier instrument que M. le Monnier demanda pour moi à l'Académie, peu de temps après ma réception en 1753; & c'est par ce célèbre astronome que je fus dirigé vers l'objet dont je vais rendre compte. L'instrument fut construit avec soin sous sa direction. Nous mesurâmes ensemble, le 19 Juillet 1753, la distance de 804 toises, depuis le dernier arbre de la terrasse des Tuileries, jusqu'aux piliers de la porte de la Conférence, au bas de Chaillot (qui ont été démolis en 1789). Je trouvai que quand les verres étoient à la distance marquée zéro, l'angle étoit $39^{\circ} 37' 5''$, & à trente, plus petit de $11^{\circ} 9' 4''$ ou $28^{\circ} 28' 1''$. En 1757, je changeai l'oculaire, & je trouvai pour zéro, $40^{\circ} 3''$, & pour 30, $28^{\circ} 46' 4''$; les 30 tours valoient $11^{\circ} 16' 6''$, tous les angles étoient augmentés proportionnellement. Je fis alors une Table très-étendue dont je me sers encore, en y faisant la correction nécessaire, comme je le dirai ci-après.

Je m'aperçus ensuite qu'une aussi grande machine transportée du lieu de la base jusqu'à l'Observatoire, pouvoit être sujette à quelques variations; & lorsque M. de la Condamine m'eut cédé son observatoire au Luxembourg, au-dessus de la porte royale qui donne sur la rue de Tournon, je plaçai des mires à l'autre extrémité de cette longue rue. J'en mesurai la longueur, qui est de 900 pieds, & je m'en servis pour déterminer, au mois de Juillet 1760, le diamètre du Soleil, apogée, $31^{\circ} 30' 5''$ (*Mémoires de l'Académie 1760, p. 48*). Cette base avoit été mesurée avec un soin extrême, & la lunette dirigée vers le Soleil aussitôt après que j'avois pris l'angle des mires, ne laissoit aucun soupçon sur le rapport des deux mesures, qui d'ailleurs étoient égales à quelques secondes près; en sorte que les inégalités de la vis ne pouvoient y influer. Enfin je crois encore, même au bout de 30 ans, que l'on n'a pas fait de mesure plus exacte du

diamètre du Soleil, ainsi je me servirai toujours de la mienne.

Je prendrai cette mesure pour terme de comparaison, & j'y rapporterai celles du diamètre de la Lune faites avec le même instrument; mais il y aura quelques incertitudes de plus, à cause des inégalités de la vis, & de la dilatation d'un tuyau de fer-blanc de 18 pieds de long. Il me parut le 9 Juin 1760, que quand le thermomètre étoit à la température, il falloit ajouter 3" aux diamètres mesurés à la chaleur de 20^d, qui étoit souvent celle que j'éprouvois en mesurant le diamètre du Soleil. Cependant je n'ai pas assez examiné cette équation pour la faire entrer dans mes calculs, & j'ai tâché d'en éviter les inconvénients, en ne mesurant pas le diamètre du Soleil par un temps trop chaud. Si l'on employoit trois secondes, les diamètres suivans s'accorderoit mieux avec ceux du P. la Grange, & avec mon ancienne détermination.

Quoique je regarde ces observations comme n'ayant pas chacune plus d'une seconde d'incertitude, on verra cependant des différences de 2 à 3" dans mes résultats, parce que outre les sources d'erreurs dont je viens de parler, il y a l'erreur sur la mesure du diamètre solaire, qui servoit toujours de terme de comparaison, & que je mesurois de temps à autre. Il y entre aussi une petite erreur sur le temps & la hauteur de la Lune, que je ne marquois pas toujours rigoureusement; enfin une partie de ces différences pourroit bien venir de ce que la variation des parallaxes ne seroit pas représentée par les équations de Mayer, pour toutes les situations de la Lune avec la précession de 2 à 3".

Quoi qu'il en soit, je ne crois pas même actuellement que l'on ait fait de meilleures observations sur les diamètres de la Lune; les micromètres ordinaires ne comportant pas la même précision, & étant sujets aux mêmes inconvénients. M. de la Caille en publia quelques-unes dans les Mémoires de 1761, mais elles n'étoient faites qu'avec la lunette de 6 pieds de son sextant, & ils me paroissent trop grands;

ainsi je rapporterai ici toutes mes observations, que l'on pourra calculer à loisir si l'on n'en fait pas de meilleures. En attendant, je donnerai le résultat de celles que j'ai calculées. L'ouverture de mes objectifs étoit réduite à 18 lignes pour diminuer l'aberration des verres; les objets y étoient toujours bien terminés.

Pour faire ces évaluations, je prendrai toujours le diamètre du Soleil mesuré le plus près du temps dont il s'agit pour la Lune; ainsi, pour avoir le diamètre de la Lune le 8 Juillet 1761, ou la valeur de 23,50 sur mon héliomètre, je prends le diamètre du Soleil mesuré le 6 de Juin, de 22,30, qui, suivant la Table de 1757, donne 31' 40" 1; & comme par les diamètres du Soleil que j'ai déterminés en 1760, il ne devoit être que de 31' 33",3, il s'ensuit qu'il faut ôter 6",8 des valeurs trouvées par cette Table. Elle donne pour 23,50, une valeur de 31' 13",0, ce qui exige à proportion, qu'on ôte 6",7, & l'on aura 31' 6",3 pour le diamètre observé. Il en faut ôter 12",9, à cause de la hauteur de la Lune, & y ajouter 3",0, à cause de la réfraction; il reste 30' 56",4 pour le diamètre horizontal de la Lune à l'heure de l'observation.

J'ai toujours mesuré le diamètre du Soleil horizontalement, pour éviter l'effet de la réfraction, & l'effet opposé par lequel il paroît que le diamètre vertical est plus grand de 2" que le diamètre mesuré horizontalement (Bouguer, *Mémoires de l'Académie* 1748, page 30). On verra ci-après que j'ai trouvé le même résultat.

Pour la Lune, on est obligé de mesurer le diamètre entre les pointes du croissant ou sur la ligne des cornes: il faut calculer l'effet de la réfraction sur le diamètre incliné, & pour cela il faut connoître non-seulement la hauteur de la Lune, mais l'angle de la ligne des cornes avec le vertical; quelquefois je l'ai estimé à la vue. Lorsque l'on n'a pas eu cette attention, il suffit d'examiner sur le globe quel angle faisoit le vertical de la Lune avec l'écliptique, ou plutôt avec le grand cercle mené de la Lune au Soleil. Cet angle n'exige

n'exige pas une plus grande précision, à moins que la Lune ne fût très-basse, & il faut éviter d'employer de pareilles observations.

OBSERVATIONS des Diamètres de la Lune, faites avec un héliomètre de 18 pieds, depuis 1755 jusqu'en 1764.

17 Juin 1755.	10 ^h 35'	T. V. Diam. de la ☾	20", 19.	Haut. de la ☾	17 ^d 0'.
	43	20,45	15. 40.
	51	44	14. 20.
18	11. 0	19,66		
			71		
	8	19,76 $\frac{1}{2}$	16.
19		19,06 $\frac{1}{3}$	24.
	10. 27	5	23 $\frac{1}{2}$.
	33	18,98	23.
25	10. 52	22,18	13 $\frac{1}{4}$.
26	10. 52	23,97	9.
	58	75		
	11. 0	82		
	5	71	10 $\frac{1}{2}$.
			mil. 81.		
27	11. 25	24,89	9.
	28	91	9 $\frac{1}{3}$.
	34	96	10 $\frac{1}{3}$.
28	11. 46	26,18	8 $\frac{1}{2}$.
	50	10		
	51	25,85	9 $\frac{1}{4}$.
	55	91		
	57	91		
4 Juillet...	4 $\frac{1}{4}$	diamètre horiz. du Soleil.	22,80.		
10	6 $\frac{1}{2}$	diamètre de la Lune...	22,78.		
			80.		
			86.		

L'oculaire qui étoit de trois pouces s'est cassé, j'en ai pris un de deux pouces, ce qui donne 20 parties de plus.

Mém. 1788.

B b

15 Juillet 1755.	9 ^h 40'	T. V. Diam. de la C	21",08.	Haut.
16.....	8. 45.....		20,03.....	22 ^d . diam. vertic.
17.....	9 $\frac{1}{2}$		19,78.....	21. de haut.
			79.	
18.....	10. 10.....		91.....	18.
20.....	9 $\frac{3}{4}$		20,04.....	21 $\frac{2}{3}$.
			9	
			10.	
22.....	9 $\frac{1}{2}$		21,44.....	18 $\frac{3}{4}$.
			42 $\frac{1}{2}$.	
25.....	10. 10.....		24,54.....	12 $\frac{1}{2}$.
			44.	
			53.	
			mil. 50.	
15 Août....	8 $\frac{1}{2}$		20,51.	
			42.	
			38.	
			43.	
16.....	10.		20,98.	
			21,14.	
			4.	
			2.	
17.....	10. 10.....		21,49 $\frac{1}{2}$.	
	20.....		56.	
			57.	
20.....	8 $\frac{3}{4}$		23,32.	
			28 $\frac{1}{2}$.	
			31.	
21.....	9 $\frac{1}{4}$		24,13	} verticalement.
			21	
			24,15	} horizontalement.
			2	
	10 $\frac{1}{4}$		23,97	verticalement.
			24,02	horizontalement.
22.....	10. 5.....		92	verticalement.

22 Août 1755.	10 ^h 5'	T. V. Diam. de la ☾	24,92. verticalement.
			95.
			25,0.
23.....	9 20.....		26,03.
			06.
24.....	10. 0.....		26,46.
			48 $\frac{1}{2}$.
25.....	10. 15.....		27,25.
			14.
			23.
			18.
			2.
			mil. 15.
15 Sept.....	9. 45.....		22,90 deux fois.
16.....	9. 35.....		23,56 deux fois.
17.....	10. 5.....		24,42 presque dans le méridien.
22.....	10. 30.....		26,88 $\frac{1}{2}$ la Lune étoit trop haute.
25.....	10. 9.....		27,67.
			64 $\frac{1}{2}$.
	10. 12.....		65 $\frac{1}{2}$.
26.....	7. 0 matin.....		26,75..... 41 ^d de hauteur.
Diamètre du Soleil 3 fois 21,20. Il servira à trouver les valeurs du micromètre pour les observations qui précèdent.			
11 Octob...	7. 50.....		21,53.
	52.....		50.
	55.....		56.
15.....	11 $\frac{1}{4}$		25,19.
18.....	9. 56.....		26,51.
19.....	9 $\frac{1}{4}$ environ.....		26,83..... 35 $\frac{1}{2}$ de haut.
20.....	9 $\frac{1}{2}$		27,22..... 36.
31 Mai 1756.	8. 0 matin, diam. du Soleil.		22,25 horizontal. Toujours avec l'oculaire de 2 pouces.
19 Oct. 1757.	3. $\frac{1}{2}$ après avoir changé l'oculaire.		
	diamètre du Soleil...		20,75.
	7 $\frac{1}{2}$ diam. de la Lune égal à celui du Soleil.		
			20,75..... 16 $\frac{1}{2}$ haut.

10 Oct. 1757.	diamètre du Soleil . . .	26",85 ou 2" moins que le 19, mais je préfère celui du 20.
	6 $\frac{1}{2}$. diamètre de la Lune..	20,05..... 21 $\frac{1}{4}$. haut.
21.....	7 $\frac{1}{2}$	19,60..... 24 $\frac{1}{2}$.
22.....	7. 50.....	19,60 comme le 21.
		27 $\frac{1}{3}$.
23.....	9. 42.....	19,65 hauteur. 32 $\frac{1}{2}$.
24.....	10. 30.....	20,00..... 37 $\frac{1}{2}$.
21 Novemb..	9. 45.....	21,10..... 40.
25.....	diamètre du Soleil . . .	19,95.
17 Mars 1758	2 $\frac{1}{2}$	20,80.
11 Avril....	8 $\frac{1}{2}$ diamètre de la Lune..	23,15..... 24 $\frac{1}{2}$.
13 Mai.....	7 $\frac{1}{4}$	26,20..... 47 $\frac{1}{2}$.
	8.....	26,35..... 46.
17.....	5 $\frac{1}{4}$	26,60..... 36.
18.....	7 $\frac{1}{4}$	25,75..... 39 $\frac{1}{2}$ incl. de 45 $^{\circ}$.
19.....	8. 40.....	25,10..... 35 $\frac{1}{4}$ incl. de 35 $^{\circ}$.
		à la vertic.
20.....	9.....	24,34..... 29 $\frac{1}{2}$ 45 incl.
21.....	23,57..... 19... 45.
23.....	6. 0 diamètre du Soleil..	22,15.
13 Juin.....	10 $\frac{1}{2}$ diamètre de la Lune..	27,15..... 21... 15.
19.....	10 $\frac{1}{2}$	21,61..... 22... 25.
22.....	11.....	19,96..... 10 $\frac{1}{2}$ 25.
		92..... 11 $\frac{1}{3}$.
9 Juin 1760.	diamètre du Soleil..	22,35. le Soleil étoit fort chaud.
17.....	45.
24 & 27....	22,40. thermomètre à 14 ou 15 $^{\circ}$.
18 Juillet...	8. 25. diamètre de la Lune.	25,81..... 22 .. 20. incl.
22.....	8. 30.	27,29..... 20 $\frac{1}{2}$. 10.
3 Mai 1761.	diamètre du Soleil..	20,00..... mais le 7 Mai on a écharné les verres de l'héliomètre pour observer le passage de Vénus sur le Soleil, & pouvoir mesurer la plus courte distance.
5 Juin.....	6. 0 du soir, Soleil. . .	22,35. diam. horizontalement.
		60. diam. vertical.
6.....	diam. horiz. du Soleil.	22,30. celui-ci vaut mieux.

12 Juin 1761.	11 ^h	0' diamètre de la Lune.	25"50.....	incl. 5 à 6 ^d .
17.....	11.	7.....	27,82.	haut. 16 ^d $\frac{1}{2}$ envir. 45.
8 Juillet...	8.	53.....	23,50.....	24..... 7 à 8.
Cette observation est marquée comme bien sûre.				
9.....	8.	15.....	24,50.....	28 ... 0.
10.....	7.	50.....	25,55.....	26 $\frac{1}{2}$... 12 env.
11.....	8.	45.....	26,45.....	21 ^d 50'.. 15.
22.....	11.	45.....	24,72.....	12. 20.. 30.
	12.	23.....	24,33.....	18. .. 24.
27 Mai 1762.		diamètre du Soleil..	22,54.	
	9.	0. diamètre de la Lune.	19,20.....	28. .. 35.
28.....	8.	38.....	19,10.....	37 $\frac{1}{2}$.. 30.
2 Juin.....	9.	30.....	22,12.....	20.
3.....	10.	43.....	23,00.....	0.
4.....	8.	30.....	24,05.....	16. .. 45.
1. ^{er} Juillet..	6 $\frac{3}{4}$	diamètre du Soleil..	22,83.	plus sûr que le 27 Mai.
15 Mars 1764.		diam. du Soleil à midi.	20,75.	
Le diamètre vertical étoit plus grand de deux secondes environ.				
	6.	13. diamètre de la Lune.	19,20.....	31. 45.. 60.
16.....	6.	13.....	18,35.....	19. 5.
17.....	10.	0.....	17,20.....	37. 5.. 60.
30.....		diamètre du Soleil..	21. 07.	horizontalement.

Vers ce temps-là je quittai l'observatoire du Luxembourg pour occuper celui du collège Mazarin, qui étoit malheureusement vacant par le décès de M. de la Caille; & comme il n'étoit pas assez élevé pour y placer mon héliomètre de 18 pieds, je n'ai pas continué ce genre d'observation; l'observatoire que je fis construire ensuite sur la place du Palais Royal & celui que j'ai eu au Collège Royal ont le même inconvénient.

J'y suppléerai par des observations qui me furent envoyées par le P. la Grange, Jésuite de Mâcon, habile astronome; il travailloit alors avec le P. Pézénas à l'observatoire de Marseille. Il fut appelé ensuite à Milan, où il

198 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

a dirigé l'observatoire pendant plusieurs années, il est mort à Mâcon le 25 Août 1783. On voit dans ces observations, non-seulement les parties du micromètre, mais encore la hauteur apparente du centre de la Lune, & l'angle que faisoit le diamètre mesuré, ou la ligne des cornes, avec la verticale, ce qui est nécessaire pour réduire les observations. L'instrument marquoit ces inclinaisons.

DIAMÈTRES observés à Marseille, avec le micromètre objectif de SHORT, appliqué à un télescope de deux pieds de foyer, par le P. LA GRANGE.

1759.	DIAMÈTRES du Soleil.	DIAMÈTRES DE LA LUNE.				
		1758.	TEMPS vrai à Marf.	PARTIES du micromètre.	Hauteur du centre.	Ang. de la vertic. & du diam. sur la lig. des cornes.
	P. Dix." 500.		H. M.		D.	D.
			foir.			
Janvier 18	4. 4. 17 $\frac{1}{2}$	Déc. 12	6. 57	4. 4. 4	48 $\frac{1}{3}$	32
19 & 20	4. 4. 17	14	6. 34	4. 3. 10	36 $\frac{1}{3}$	90
23	4. 4. 16	15	9. 25	4. 2. 42	40 $\frac{1}{2}$	75
27	4. 4. 14	1759.				
28	4. 4. 13 $\frac{1}{2}$	Janvier 2	6. 4	4. 4. 24 $\frac{1}{2}$	17	55
30	4. 4. 14	3	6. 29	4. 4. 37	25	50
31	4. 4. 13	5	6. 7	4. 4. 33	44	28
Février 3	4. 4. 13	6	5. 56	4. 4. 24	50	12
6	4. 4. 11	7	9. 34	4. 4. 6	45 $\frac{1}{2}$	53
7	4. 4. 11	8	5. 48	4. 3. 43	48	27
10	4. 4. 10	9	5. 20	4. 3. 20	38	35
12	4. 4. 10	10	5. 17	4. 3. 2 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{5}{6}$	40
Mars 2	4. 4. 0 $\frac{1}{2}$	11	5. 36	4. 2. 31 $\frac{1}{2}$	23 $\frac{1}{3}$	48
4	4. 4. 0	12	5. 34	4. 2. 1 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	80
10	4. 3. 46	matin.				
12	4. 3. 44	13	6. 30	4. 1. 40	11 $\frac{2}{3}$	90

DIAMÈTRES DE LA LUNE.

1759.	DIAMÈTRES du Soleil.		1759.	TEMPS vrai à Marf.	PARTIES du micromètre.	Hauteur du centre.	Ang. de la vertic. & du diam. fur la lig. des cornes.
	P. Dia. 500.			H. M.		D.	D.
Mars 18	4. 3. 39		Janvier 13	7. 36	4. 1. 39	25 $\frac{1}{3}$	80
Avril 19	4. 3. 24		14	8. 34	4. 1. 21	25 $\frac{1}{2}$	55
	20	4. 3. 21	15	9. 5	4. 1. 0 $\frac{1}{2}$	20	25
Mai 19	4. 3. 5 $\frac{1}{2}$		16	10. 0	4. 0. 33	19 $\frac{1}{3}$	34
	20	4. 3. 5 $\frac{1}{2}$		matin.			
Juin 26	4. 2. 47		17	6. 5	4. 0. 37	37	25
	27	4. 2. 47	18	5. 55	4. 0. 35	43	11
	29	4. 2. 46	19	5. 56	4. 0. 31 $\frac{1}{2}$	44	0
Juillet 6	4. 2. 48		20	5. 55	4. 0. 38	43	12
	8	4. 2. 48	22	6. 0	4. 1. 18	33	26
	14	4. 2. 47	23	6. 0	4. 1. 39	29	31
	20	4. 3. 0	25	6. 16	4. 2. 29	17	34
AOÛT 10	4. 3. 3		26	6. 17	4. 2. 47	9	35
	11	4. 3. 4		soir.			
	23	4. 3. 9	30	6. 11	4. 4. 33 ^d	7	58
	31	4. 3. 12	31	6. 0	4. 4. 47 ^d	20	56
Sept. 2	4. 3. 13		Février 1	6. 5	4. 5. 8	31	52
	8	4. 3. 18	2	6. 2	4. 4. 48	43	47
	16	4. 3. 24 $\frac{1}{2}$	3	6. 33	4. 4. 29	50	42
			4	6. 23	4. 4. 9	59	22
			5	6. 34	4. 3. 30	63	0
				soir.			
			6	6. 24	4. 3. 7	61	23
			7	6. 12	4. 2. 36	53	46
			8	6. 30	4. 2. 15	48	55
			9	5. 36	4. 1. 38	27 $\frac{3}{4}$	67
			10	6. 16	4. 1. 22	25	77
			11	7. 21	4. 1. 3	26 $\frac{1}{2}$	90
			12	9. 7	4. 0. 48	37	39

200 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

DIAMÈTRES DE LA LUNE.						
1759.		TEMPS vrai à Marf.	PARTIES du micromètre.			HAUTEUR du centre.
		H. M.				Angles de la vertic. & du diamètre sur la ligne des cornes.
						D.
		soir.				
Février	13	8. 48	4. 0. 32	15 $\frac{1}{4}$...	60	
Mars	2	7. 30	4. 4. 46	22.....	64	
	3	7. 15	4. 4. 40 $\frac{1}{2}$	37.....	60	
	4	8. 39	4. 4. 30	33.....	60	
	6	9. 1	4. 2. 48	53.....	54	
	8	6. 30	4. 2. 0 $\frac{1}{2}$	59.....	57	
	9	6. 29	4. 1. 27	50.....	68	
	10	8. 34	4. 1. 14	59.....	60	
	11	9. 3	4. 1. 0 $\frac{1}{2}$	54.....	64	
	12	9. 31	4. 0. 41	48.....	90	
	13	9. 11	4. 0. 26	36.....	5	
	14	9. 0	4. 0. 22	24.....	39	
	16	9. 40 ^d .	4. 0. 16	10.....	57	
		matin.				
	19	5. 58	4. 0. 47	23.....	15	
		soir.				
	31	9. 22	4. 4. 13 ^d	60	
Avril	3	9. 35	4. 2. 47	40 $\frac{1}{4}$...	50	
	4	9. 28	4. 2. 20	50 $\frac{1}{2}$...	45	
	5	8. 55	4. 1. 44	62 $\frac{1}{2}$...	20	
	6	8. 56	4. 1. 21	63 $\frac{1}{2}$...	3	
	7	7. 5	4. 1. 5	54.....	55	
	8	7. 17	4. 0. 40	46 $\frac{1}{2}$...	65	
	9	7. 7	4. 0. 29	35.....	75	
	10	8. 40	4. 0. 31	39.....	70	
	11	8. 35	4. 0. 23	29.....	87	
	12	9. 9	4. 0. 23	14.....	40	
		matin.				
	15	4. 49	4. 0. 36	18.....	30	

DIAMÈTRE

DIAMÈTRES DE LA LUNE.

1759.		TEMPS vrai à Marf.	PARTIES du micromètre.	HAUTEUR du centre.	Angles de la vertic. & du diamètre sur la ligne des cornes.
		H. M.		D.	D.
		matin.			
Avril	16	4. 51	4. 1. 4	20 $\frac{1}{2}$...	24
	17	4. 44	4. 1. 24	22 $\frac{1}{2}$...	14
	18	4. 41	4. 2. 3	23 5	
	20	4. 38	4. 3. 6	20 $\frac{1}{2}$... 5	
	21	4. 31	4. 3. 35	17 11	
		soir.			
Mai	2	8. 34	4. 2. 27	46 $\frac{1}{2}$...	41
	5	8. 39	4. 1. 3	58 9	
	6	8. 38	4. 0. 40	55 $\frac{1}{2}$... 25	
	7	8. 51	4. 0. 36	51 32	
	8	9. 6	4. 0. 34	45 $\frac{1}{2}$... 41	
	10	8. 20	4. 0. 37	25 68	
	11	8. 57	4. 0. 49	20 $\frac{1}{2}$... 90	
	12	9. 23	4. 0. 46	14 $\frac{1}{2}$... 10	
Juin	9	7. 43	4. 1. 27 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$... 58	
	10	8. 17	4. 1. 33 $\frac{1}{2}$	6 90	
Juillet	1	9. 2	4. 0. 39	29 $\frac{1}{2}$... 18	
	5	8. 33	4. 1. 7 $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$... 16	
	8	8. 29	4. 2. 14	16 33	
	9	8. 46	4. 2. 32	11 $\frac{1}{2}$... 40	

Le télescope avec lequel ces observations ont été faites, a été décrit dans les *Mémoires rédigés à l'Observatoire de Marseille*, année 1755, seconde partie, page 96-136. L'objectif qu'on y plaçoit avoit 38 pieds de foyer, & il grossissoit 87 fois. Quoique la grandeur de cet instrument semblât annoncer la précision des secondes, & qu'elles fussent marquées une à une par les divisions, on voit des

Mém. 1788.

différences de 3 à 4". Il y a deux difficultés dans l'usage de cet instrument; 1.^o il est des temps où les images paroissent continuellement osciller; tantôt elles se mordent, & tantôt se séparent. Alors prenant le milieu, & recommençant plusieurs fois, on trouve jusqu'à trois parties du vernier, ou 3" de différence; il y a des temps où l'on ne remarque point ces oscillations.

2.^o En écartant l'œil à droite & à gauche, on voit aussitôt mordre l'une sur l'autre les images qui se touchoient; jusque-là qu'en regardant fort obliquement on ne voit plus qu'une seule image; mais en tenant l'œil un peu éloigné de l'ouverture, & voyant alors les deux demi-objectifs, si l'on a soin de faire en sorte que le rayon visuel dirigé au point de contact soit sur la ligne que parcourent les deux moitiés de verre, on n'aperçoit pas cette variation, soit que ce point de contact soit au milieu du champ ou ailleurs. Si on dirige son rayon visuel par une des deux lunettes, alors les images se mordront dans une partie du champ, & elles se sépareront dans un autre, & tout variera. On trouvoit quelquefois des différences de 10"; mais on les évitoit en mettant l'œil à la même place & les images au milieu du champ. L'unité d'image d'une étoile se prend quand les deux points rayonnans d'un côté viennent former un seul point rayonnant de tous côtés.

Lorsqu'on a eu à détacher le micromètre du télescope, on a toujours trouvé quelque différence, quoique la division qui est près du petit miroir marquât la même chose; cette différence alloit à 2" sur le diamètre du Soleil.

Le P. la Grange observoit qu'après avoir regardé longtemps dans ce télescope, les diamètres paroissoient plus grands. Quand on mesuroit plusieurs fois les diamètres, on trouvoit souvent les derniers plus grands; mais cela n'alloit guères au-delà de 3 à 4"; probablement cela venoit du changement dans le foyer de l'œil, dont M. l'Abbé Rochon a parlé dans ses Mémoires (1783, p. 77 & 85). Les nombres que marque ce télescope sont des pouces

Anglois, des dixièmes de pouces & des 50.^{es} de dixièmes ou 500.^{es} de pouces; ainsi 4, 4, 18 $\frac{1}{2}$ valent 22 18 $\frac{1}{2}$ parties du vernier: le P. la Grange les supposoit égales à 32' 40". Short avoit gradué l'un des deux anneaux dans lesquels tourne le télescope, en sorte qu'on avoit à 2 ou 3^d près l'angle de la verticale avec la ligne des cornes; & c'est un avantage pour évaluer l'accourcissement des réfractions sur les diamètres inclinés: j'en ai donné une Table dans mon *Astronomie*.

Pour évaluer les diamètres de la Lune, j'ai pris pour le mois de Janvier 1759, le diamètre du Soleil 22 17,2 = 32' 33",7; & pour le mois de Mai, le diamètre 2 147 = 31' 30",5: il y a une différence d'une seconde & demie.

Calcul des Observations précédentes.

Pour déterminer le diamètre horizontal de la Lune par mes observations, j'en ai choisi une douzaine parmi celles qui me paroissent les plus exactes, & partant toujours du diamètre du Soleil supposé connu, j'ai réduit les parties du micromètre. Ainsi, le 28 Juin 1755, je prends le diamètre du Soleil observé le 4 Juillet, de 22,80, ce qui fait par la Table étendue, 3' 28",9; mais il ne devoit être que de 31' 30",5: je vois qu'il faut ajouter 1",6 à la Table. Or, le diamètre de la Lune 25,91, donneroit par la Table 30' 18",9, ainsi j'ai 30' 20",5: j'y ajoute 13",0 pour l'accourcissement de la réfraction, & j'en ôte 5",9 pour l'augmentation qui vient de la hauteur; & j'ai 30' 27",6 pour le diamètre horizontal.

J'ai calculé la parallaxe horizontale de la Lune pour Paris, en employant les équations de Mayer, mais en supposant la constante 56' 57". On verra dans la Table suivante le diamètre horizontal qui répond à chaque parallaxe, & celui qui en résulte pour une parallaxe de 60', avec la quantité dont chaque observation s'écarte du terme moyen, qui est 32' 47",3.

OBSERVATIONS de Paris.

	T. moy. à Paris.	Diamètre horiz.		Parallaxe horiz.		Diamètre pour 60'.		Différ. à 47",3.
		H.	M.	M.	S.	M.	S.	
1755 Juin 28	12. 0	30.	27,6	55.	44,0	32.	47,5	+ 0,2
1755 Sept. 16	9. 30	30.	55,1	56.	36,3		46,4	- 0,9
1755 Sept. 25	10. 2	29.	35,7	54.	57		49,5	+ 2,2
1757 Oct. 20	6. 0	32.	22,5	59.	11,2		49,2	+ 2,0
1760 Juil. 18	8. 39	30.	5,8	55.	8,9		44,7	- 2,6
1760 Juil. 22	8. 46	29.	34,1	54.	59		47,6	+ 0,3
1761 Juin 17	11. 7	29.	24,2	53.	52,9		44,5	- 2,8
1761 Juil. 8	8. 58	30.	56,4	56.	39,1		46,1	- 1,2
1761 Juil. 9	8. 20	30.	31,7	55.	53,4		46,4	- 1,9
1762 Juin 4	8. 28	30.	57,4	56.	36,4		48,7	+ 1,4
1764 Mars 15	6. 22	32.	27,0	59.	21,7		48,0	+ 0,7
1264 Mars 16	6. 22	32.	53,0	60.	8,2		48,5	+ 1,2

Ainsi par un milieu, le diamètre qui répond à 60' de parallaxe pour Paris, est 32' 47",3, ou 32' 46",6, si l'on prend pour constante la parallaxe 56' 58",3 par un milieu entre les résultats de la Caille, de M. du Séjour, & les miens.

Dans les douze observations précédentes on trouve le diamètre 29' 24", le plus petit qu'il soit possible d'observer dans aucune position de la Lune, & celui de 32' 53", qui ne diffère que de 44" du plus grand de tous les diamètres lunaires; ainsi elles suffisent déjà pour justifier, du moins à 2 ou 3" près, les variations que donne la théorie.

Je vais faire actuellement une semblable comparaison sur dix observations du P. la Grange, que j'ai calculées avec le même soin.

OBSERVATIONS de Marseille.

		T. moy. à Paris.	Diamètre horiz.	Parallaxe.	Diamètre pour 60'.	Différ. à 50",7.
		H. M.	M. S.	M. S.	M. S.	S.
1759 Janv.	3	6. 22	32. 37,3	59. 28,2	32. 49,6	— 1,1
	5	6. 1	32. 24,8	59. 12,0	45,6	— 5,1
	6	5. 50	32. 14,7	58. 56,3	53,6	+ 2,9
	7	9. 29	32. 0,3	58. 33,7	51,8	+ 1,1
Mai	7	8. 35	29. 31,4	53. 59,5	50,7	0,0
	8	8. 50	29. 31,4	53. 56,0	48,5	— 2,2
	16	8. 4	29. 41,7	54. 12,9	47,5	— 3,2
Juin	9	7. 20	30. 21,6	55. 22,7	49,5	— 1,2
	10	8. 4	30. 31,1	55. 53,2	51,1	+ 0,4
Juil.	8	8. 21	30. 56,7	56. 33,7	54,8	+ 4,1

Ainsi par un milieu, le diamètre qui répond à 60' de parallaxe, est 32' 50",7, en rejetant la seconde observation qui s'écarte le plus des autres, ou 32' 50",0, en prenant pour constante 56' 58",3. J'ai été surpris de voir 3" $\frac{1}{2}$ de différence entre ce résultat & le mien, & peut-être cela vient-il des inconvénients que j'ai racontés ci-dessus en parlant du télescope. Peut-être éclaircirait-on cette difficulté en calculant plus d'observations. On pourroit croire que le télescope terminant moins bien que ma lunette, faisoit paroître le diamètre plus grand; mais comme je me suis servi du même diamètre solaire pour évaluer les parties du micromètre Anglois, cette différence devoit disparaître.

Quoi qu'il en soit, je m'en tiendrai au résultat de mes observations, & je supposerai que le diamètre de la Lune est 32' 47",3. quand la parallaxe pour Paris est de 60'.

Dans la seconde édition de mon *Astronomie* je le supposois de $32' 50'',0$ pour la parallaxe de $60' 6'',6$, qui revient à celle de $60'$ dans ma nouvelle hypothèse; ainsi je le trouve aujourd'hui plus petit de $2'',7$. Je n'ai pu retrouver les calculs que j'avois faits vers 1760 sur cet objet; mais je ne crois pas qu'ils fussent plus concluans que ceux de ce *Mémoire*; ainsi dans les *Tables* que je vais publier, je ne ferai pas difficulté de diminuer le diamètre.

De-là il suit que la diminution de $3'',5$ que M. du Séjour avoit remarquée dans les éclipses pour le demi-diamètre de la Lune, y compris l'effet de l'inflexion, devoit se réduire à $2'',2$. Dans son *Traité analytique*, p. 418, il réduit l'inflexion à $1'',8$, en faisant une diminution de $1'',5$ dans le demi-diamètre de la Lune; la somme est $3'',3$, qui devoit se réduire à $2''$ d'après le nouveau diamètre que j'adopte actuellement: dans ce cas, l'inflexion se réduiroit à $1'',1$, & la diminution du diamètre à $0'',9$.

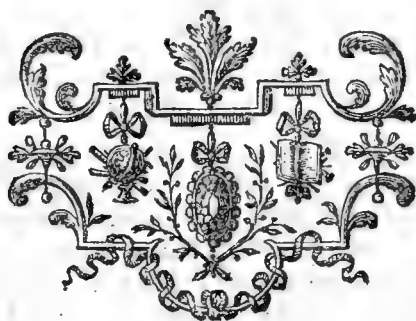
Ces recherches sur le diamètre de la Lune étoient d'autant plus nécessaires, que les astronomes différoient beaucoup pour cet élément. Par exemple, le 15 Mars 1764 je trouve le diamètre $32' 28''$ par mes nouveaux calculs, & les *Tables* de Cassini donnent la même chose; mais ce ne seroit que $32' 13''$, suivant les *Tables* de la Hire; $32' 18''$, suivant celles de Halley; & $32' 24''$, suivant les *Tables* des *Institutions* de M. le Monnier. On auroit une seconde de plus ou $32' 27''$, suivant le résultat adopté par NEWTON; & $32''$, suivant la Caille (*Mém.* 1761, p. 57). Au reste les variations des diamètres étant représentées fort imparfaitement dans les anciennes *Tables* de la Lune, il seroit difficile de dire à 3 ou 4" près ce qu'elles donnoient, & les trois premiers auteurs que je viens de citer n'avoient pas rapporté des observations positives du diamètre de la Lune, d'après lesquelles on pût savoir combien nous différons (Cassini, *Mém. Ac.* 1699, p. 279; La Hire, *Mém. Ac.* 1703, p. 7). M. le Monnier est le seul qui ait publié des

observations, déjà imprimées jusqu'en 1746, & il paroît par un mot de ses *Institutions* (p. 184) que je diffère peu de ce célèbre astronome; mais il n'en a pas encore publié les résultats. Ainsi ceux que je viens de donner dans ce Mémoire, sont les premiers que l'on ait eus avec la précision d'une grande lunette, pour les valeurs des diamètres de la Lune.

La réduction des diamètres observés, aux diamètres horizontaux, m'a donné lieu d'examiner les Tables de l'augmentation, calculées par la Caille & par Mayer, & j'ai reconnu qu'elles n'étoient pas d'une exactitude suffisante; il y a quelquefois plus d'une demi-seconde d'erreur: j'en ai donc calculé une nouvelle par une formule commode qui est dans mon *Astronomie*, art. 1510.

Si l'on veut avoir égard à l'aplatissement de la Terre, on est obligé de distinguer deux cas: quand la Lune est dans le méridien il suffit de diminuer la distance au zénith de l'angle que fait la verticale avec le rayon de la Terre, & cela peut produire un dixième de seconde; mais cette correction est nulle dans le premier vertical, & elle est comme le cosinus de l'azimuth. Cette correction est égale au diamètre multiplié par les sinus de la parallaxe & de l'angle de la verticale, & par les cosinus de la hauteur & de l'azimuth. J'ai pris le parti dans ma Table, de prendre un milieu, en n'employant que la moitié de la correction, afin que cette Table puisse servir dans tous les cas, sans que l'on courre risque de se tromper d'un vingtième de seconde. Il seroit inutile de pousser la précision de cette Table au-delà des dixièmes de secondes, puisque cela exigeroit une correction dans la Table pour les différens degrés d'azimuth. Par la même raison, je me suis contenté de calculer la Table pour les diamètres de 30' 30" & 32' 30"; j'ai conclu les autres par des parties proportionnelles, ce qui n'auroit pas suffi si j'eusse voulu avoir une précision plus grande qu'un dixième de seconde.

Cette Table est faite pour la latitude de Paris, mais elle peut servir pour tous les autres pays, la différence n'étant pas d'un vingtième de seconde pour un changement de 6" dans la parallaxe horizontale. Elle se trouvera dans la troisième édition de mon Astronomie, qui paroîtra au commencement de 1791.



M É M O I R E

Sur le Diamètre & la Lumière du quatrième Satellite de Jupiter.

Par M. DE LA LANDE.

DANS le travail curieux & important que M. Bailly a publié sur les diamètres & la lumière des satellites (*Mém. de l'Acad. 1771*), il ne put faire entrer l'article du 4.^e satellite, parce qu'il ne s'éclipsait pas en 1770, temps où M. Bailly étoit occupé de ces observations; je lui ai demandé la permission de joindre ce petit supplément à un traité d'ailleurs très-savant, très-neuf & très-complet: voici ce que m'ont donné les premiers essais que j'ai eu occasion de faire sur le 4.^e satellite.

Le 25 novembre 1788 j'ai observé l'émerfion du 4.^e satellite avec une excellente lunette de Dollond, qui a $40\frac{1}{2}$ lignes d'ouverture; il a commencé à paroître à $11^h 58' 44''$, temps vrai (M. Messier, $12^h 0' 16''$; M. Méchain, $11^h 59' 39''$); aussitôt j'ai masqué l'objectif avec un carton qui n'avoit qu'un pouce ou 12 lignes d'ouverture; & $4' 49''$ après la première observation, j'ai eu une seconde émerfion avec cette petite ouverture; elle donnoit 11 fois moins de lumière que l'ouverture entière, puisque le carré de $40\frac{1}{2}$ lignes est au carré de 12 comme 11 est à 1.

Peu après l'observation j'ai trouvé que le satellite disparoissoit pour ainsi dire, & qu'on avoit peine à le voir avec un diaphragme de huit lignes, qui réduisoit à un vingt-cinquième la lumière de la lunette, ou plus exactement à 0,039; ainsi quand la lumière du satellite en émerfion a commencé à s'apercevoir avec peine, il y avoit déjà $\frac{1}{25}$ de son disque hors de l'ombre. Cette conséquence est

Mém. 1788.

D d

nécessaire, car si la lumière de la lunette diminuée & réduite à cette fraction, suffit à peine pour faire voir le satellite, il est clair que quand avec l'ouverture entière on ne fera que l'entrevoir avec la même difficulté, il y aura la même lumière, égale à un vingt-cinquième de la lumière totale ou de la surface entière du satellite : c'est la valeur d'un segment qui est comme invisible dans cette lunette.

Suivant la Table des segmens qui est dans le Mémoire de M. Bailly, un segment qui est 0,03902 du cercle entier, a pour flèche ou sinus versé 0,08217 du diamètre entier ; telle est donc aussi la portion du diamètre du satellite qui est hors de l'ombre lorsqu'on commence à entrevoir le satellite ; c'est ce qu'on appelloit ci - devant *émerison*.

Mais lorsque j'ai observé la seconde émerison avec une ouverture de 12 lignes, le segment invisible étoit 0,08779 ou environ une douzième partie de la lumière totale, & la flèche qui lui correspond est 0,14300 du diamètre. Ce segment étoit presque 11 fois plus grand que le premier ; ainsi multipliant par 11 le premier segment invisible, je trouve celui qui avoit lieu dans cette petite ouverture 0,4445, & la flèche qui lui répond 0,45619 du diamètre du satellite. C'est la partie du diamètre qui étoit hors de l'ombre quand j'ai commencé à l'apercevoir avec la petite ouverture, 4' 49" plus tard.

La différence de ces deux flèches est 0,374 du diamètre, & c'est cette partie qui, suivant l'observation, a employé 4' 49" à sortir, ce qui donne pour le diamètre entier 12' 53" de temps. En tenant compte du changement de lumière qui avoit dû arriver dans l'intervalle des deux observations, je trouve seulement 12' 50". La distance au nœud étoit alors de 28^d, & supposant l'inclinaison de 2^d 36', je trouve qu'en 12' 50" de temps le satellite s'éloignoit du centre de l'ombre de 9' 37". Tel est donc le diamètre apparent du satellite vu du centre de Jupiter. Cette quantité que je trouve de 9' 37", étoit, suivant

Whiston, de $5' 40''$ seulement, & suivant Cassini, dans ses Tables astronomiques (*page 184*), de $15' 4''$.

Multipliant le sinus de cette quantité par la distance du satellite 13,31, on a $\frac{1}{27}$ de Jupiter; M. Maraldi l'estimoit $\frac{1}{20}$ (*Mém. de l'Acad. 1734*); Whiston, $\frac{1}{44}$ (*The longit. discovered, 1738, p. 8*); mais ni l'un ni l'autre n'avoient employé une méthode aussi exacte que celle-ci, qui nous a été suggérée par M. de Fouchy, mais dont M. Bailly a tiré le plus grand parti, & dont il a fait la plus savante application aux trois premiers satellites, avec autant de sagacité que de travail.

Le diamètre de la Lune est $\frac{1}{40}$ de celui de Jupiter; ainsi le diamètre du satellite est une fois & demie celui de la Lune.

Ce satellite, dans ses plus grandes digressions, se voit encore avec un diaphragme de $3 \frac{1}{2}$ lignes; mais quand il est tout près de Jupiter, il en faut un qui ait au moins 15 lignes; c'est-à-dire, qu'alors le satellite a dix-huit fois moins de lumière, parce que celle de Jupiter éteint & affoiblit pour nous la lumière du satellite à mesure qu'il est plus près de Jupiter. Pour connoître la loi de la diminution de lumière suivant ses distances à Jupiter, j'emploierai des observations que je fis le 22 février lorsque le satellite passa sur le bord de Jupiter, dans sa conjonction inférieure; il en étoit si près, qu'il parut le toucher pendant près d'un quart d'heure.

Je trouvai le segment invisible 0,1030, avec un diaphragme de 13 lignes, lorsque la distance du satellite au centre de Jupiter en demi-diamètres de Jupiter étoit 1,46; & ensuite avec un diaphragme de $15 \frac{1}{2}$ lignes, je trouvai le segment invisible 0,1465 à la distance 1,20. J'ai calculé ces distances en partant de la conjonction, ou du milieu du passage qui me parut arriver vers $9^h \frac{1}{4}$; le satellite ne fit que raser le bord de Jupiter, il faisoit $8''{,}4$ par heure: le demi-diamètre apparent de Jupiter étoit alors de $19''{,}4$. Avec ces données j'ai tracé une figure où j'ai vu qu'à

$6^h 38'$ & $7^h 32'$, les distances au centre de Jupiter en demi-diamètres de cette planète étoient 1,46 & 1,20.

Lorsqu'en pareil cas on veut calculer à quelle distance le satellite a dû passer du centre de Jupiter, il ne suffit pas d'avoir égard à la latitude du satellite par rapport à l'orbite de Jupiter; il faut aussi considérer la latitude géocentrique de Jupiter, qui est égale à la latitude de la Terre vue de Jupiter: ainsi le 22 février Jupiter avoit $16'$ de latitude australe, la Terre lui paroïssoit avoir $16'$ de latitude boréale; d'où j'ai trouvé par deux triangles sphériques, que la Terre étoit de $13'$ au midi de l'orbite de Jupiter, ce qui fait $2''$ dont le satellite devoit paroître plus au nord; & comme le satellite ayant $2^d 1'$ de latitude, devoit paroître $18'',8$ au nord de Jupiter, il s'ensuit que sa latitude auroit dû être de $20'',8$, c'est-à-dire, qu'il devoit passer $1'',4$ au nord du bord de Jupiter; mais cette distance a été insensible, & il n'étoit pas possible de distinguer le satellite. Au reste, Jupiter étoit fort bas, les irradiations & les aberrations de la lunette pour les deux astres ont bien pu rendre insensible cette distance, & elle a pu être aussi réellement moindre par le défaut des élémens du calcul, c'est-à-dire, de l'inclinaison, du nœud & du rayon de l'orbite du satellite.

Je suppose que la valeur générale du segment invisible pour une distance quelconque x , soit exprimée par la formule

$\frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} = y$; substituant pour y les segmens observés, & pour x les distances calculées, on a la valeur

$$\frac{b}{(1,46)^2} + \frac{c}{1,46} = 0,1030, \text{ \& } \frac{b}{(1,20)^2} + \frac{c}{1,20} = 0,1465; \text{ d'où j'ai conclu } b = 0,1707, \text{ \& } c = 0,0335. \text{ Mais en réduisant les segmens à la hauteur de } 38^d \text{ \& à la distance de Jupiter qui avoit lieu le 25 novembre, j'ai trouvé } b = 0,1796, \text{ \& } c = 0,0351.$$

Pour réduire les segmens à une distance & à une hauteur différentes de celles qui avoient lieu le 22 février,

j'ai calculé les distances de Jupiter au Soleil & à la Terre, en février & en novembre; la distance au Soleil en février étoit plus petite dans le rapport de 1 à 1,02; la distance à la Terre étoit plus grande dans le rapport de 1 à 1,049; le segment invisible qui étoit plus petit à raison de la première circonstance, & plus grand à raison de la seconde, & cela dans le rapport des carrés des distances, doit être diminué en total dans le rapport de 1 à 1,049, ou multiplié par 0,9446, pour être réduit au 25 novembre.

Les segmens invisibles observés le 22 février vers 63^d de hauteur, doivent aussi être réduits à 38^d, qui étoit la hauteur le 25 novembre, parce que quand les astres sont plus bas, l'atmosphère intercepte une plus grande partie de leur lumière. Les expériences de Bouguer nous fournissent les élémens de cette réduction; nous voyons dans sa Table, que les quantités de lumière que l'atmosphère nous transmet, sont à 63^d de 0,792, & à 38^d de 0,712 seulement (*Traité d'optique in-4.^o page 332*); il y avoit donc moins de lumière le 25 novembre; le segment invisible étoit plus grand: il faut multiplier ceux de février par 1,112, pour les comparer à ceux de novembre.

J'ai réduit tout au 25 novembre, parce que c'est le jour où j'ai fait l'observation du diamètre du satellite, & que j'ai fait de semblables observations le 24 & le 25 novembre. Le 24 à 10^h 51', temps vrai, Jupiter étant élevé de 24^d, le satellite étant à 4' 39" ou 13,71 de distance, paroissoit à peine avec un diaphragme de trois lignes & demie; le segment invisible étoit 0,006294. Le 25 à 1' 9" ou 3,39 de distance, il étoit, comme on l'a vu ci-devant, 0,0390; d'où j'ai conclu $b = 0,2068$, & $c = 0,0712$.

Ces quantités ne sont pas les mêmes que les précédentes, mais elles en approchent assez pour l'usage qu'on en fait, c'est-à-dire, pour réduire à une même distance les observations faites aux environs des immersions & des émerfions;

ainfi je fuppoferai par un milieu que le fegment invifible

eft $\frac{0,192}{x^2} + \frac{0,053}{x}$ à 38^d de hauteur, & à la diftance

où Jupiter étoit de la Terre & du Soleil le 25 novembre 1788, lorsqu'il eft vu dans la lunette dont j'ai parlé. Mais il y a apparence que la loi de ces diminutions de lumière eft fort différente quand on prend deux diftances fort grandes ou deux diftances fort petites. Si l'on pouvoit tenir Jupiter derrière une lame par le moyen d'un hélioflate qui fuivoit le mouvement diurne, on jugeroit encore mieux des groffeurs des fatellites.

Si l'on emploie la diftance du fatellite au bord de Jupiter plutôt que la diftance au centre, on trouve cette formule

$\frac{0,06127}{x} - \frac{0,0064}{x^2}$; je crois que cette hypothèfe eft

préférable, parce qu'elle donne des réfultats plus uniformes. On trouve en effet, que le fegment invifible eft en raifon inverfe de la diftance fimple; du moins le terme c qui dépend de cette diftance eft vingt fois plus fort pour le premier fatellite que le terme b qui dépend du carré de la diftance; il eft dix-fept fois plus fort pour le fecond fatellite, & dix fois pour le troifième & le quatrième: mais quand on prend, comme M. Bailly, la diftance du fatellite au centre de Jupiter, on trouve des difparates confidérables entre les termes qui dépendent de la diftance fimple & ceux qui viennent du carré pour différens fatellites. Au refte, ces termes peuvent avoir un rapport différent pour les fatellites les plus gros & pour les plus petits, parce que la lumière d'un objet plus petit s'affoiblit plus promptement que celle d'un objet plus gros en approchant d'une groffe lumière.

On voit par ces réductions combien étoient imparfaites les obfervations des fatellites lorsqu'on ne faifoit pas ufage des diaphragmes: auffi M. Maraldi & M. Meffier différoient-ils de 12 minutes dans l'immerfion du 25 janvier 1762.

M. de Lambre, en discutant au mois de novembre 1788 les observations du quatrième satellite pour les nouvelles Tables, trouvoit des résultats différens de plusieurs minutes, tant pour l'équation que pour les mouvemens séculaires du satellite, de son apside & de son nœud, ou pour l'inclinaison de son orbite, suivant qu'il employoit telles ou telles observations.

La différence entre l'immersion observée & celle du centre du satellite est aisée à calculer par les quantités rapportées ci-dessus. En effet, la portion du diamètre qui étoit déjà hors de l'ombre quand j'ai commencé à apercevoir le satellite, étoit 0,08061 du diamètre, au lieu de 0,08217 que j'ai trouvée 16' après l'émergence; cette portion employoit 1' 2" de temps à sortir, & il s'en falloit alors 5' 23" que le centre du satellite ne fût sur le bord de l'ombre.

C'est ce que M. Bailly appelle l'équation de M. de Fouchy; c'est cette quantité qu'il faudroit appliquer toujours aux observations faites avec différentes lunettes & dans des circonstances différentes pour pouvoir les comparer entre elles, & c'est là le résultat important pour la théorie des satellites de Jupiter.

On a fait deux objections à la méthode des diaphragmes; la première, que la lumière de Jupiter étant diminuée aussi-bien que celle du satellite, on n'avoit pas dans ces observations l'effet que l'on suppose déterminé séparément pour le satellite; la seconde, que l'aberration des lunettes qui agrandit les diamètres d'autant plus que l'ouverture est plus grande, produisoit un effet différent dans les deux immersions que l'on observe. Mais les petites différences qui peuvent en résulter n'approchent pas des erreurs que l'on commet en négligeant ces précautions, & l'on ne peut rien espérer par le progrès de la théorie des satellites, tant que l'on ne fera pas usage des diaphragmes.



M É M O I R E

SUR LES SATELLITES DE SATURNE.

Par M. DE LA LANDE.

LORSQUE je rappelai en 1786 l'attention des astronomes vers les satellites de Saturne, qui étoient oubliés depuis soixante-dix ans (*a*), je remarquai des erreurs de vingt degrés dans les Tables de Cassini, & je me proposai dès-lors d'en donner de nouvelles dans la troisième édition de mon ASTRONOMIE; M. Bernard voulut bien me fournir des observations, & cette année dans mon voyage d'Angleterre, M. Herschel m'en a donné quelques-unes, en sorte que je suis en état de rectifier les moyens mouvemens de tous les satellites de Saturne.

Je comptois employer les anciennes observations telles que Cassini le fils les rapporta dans les Mémoires de 1716; mais ayant voulu les comparer avec mes nouveaux élémens, je n'ai pas tardé à apercevoir une faute que tous les astronomes ont faite, & qui seule a produit des erreurs de deux ou trois degrés dans les positions que l'on nous a transmises; c'est la réduction des longitudes à l'orbite de chaque satellite.

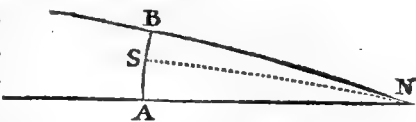
Les longitudes de Saturne se comptent sur l'écliptique; celles des satellites se comptent sur leurs orbites; on ne peut donc les comparer ensemble sans réduire celles de Saturne à l'orbite du satellite; & comme l'inclinaison est de 30^d , la réduction est très-considérable. La latitude de Saturne augmente encore la nécessité de cette réduction.

(*a*) Les dernières observations étoient de 1718. Pound *Phil. trans.* 1718, n.º 355, p. 772.

Toutes les observations que l'on a faites sur les satellites de Saturne se rapportent à son anneau. Cassini appelle la conjonction supérieure d'un satellite ou son apogée, le point où il répond perpendiculairement sur la ligne des anses, étant situé sur le petit axe de l'anneau; il observoit la conjonction des satellites avec une des anses, ou bien le passage sur cette ligne; M. Bernard & M. Herschel ont fait la même chose: ainsi dans toutes ces observations on observe la distance au petit axe de l'anneau. Pour le cinquième satellite, si l'on détermine la distance à la conjonction, alors c'est sur le petit axe de son orbite qu'on la suppose arriver, & c'est une autre réduction qu'il faut faire.

Or quand nous observons un satellite en conjonction avec Saturne sur le petit axe de l'orbite apparente du satellite, la Terre & les deux astres sont dans un plan perpendiculaire au plan de l'orbite du satellite; car quand un cercle vu obliquement paroît sous la forme d'une ellipse, le petit axe est toujours dans le plan perpendiculaire au plan du cercle. Ainsi nous rapportons Saturne & le satellite perpendiculairement sur l'orbite de celui-ci, mais alors le lieu du satellite compté sur cette orbite n'est pas le lieu de Saturne compté sur l'écliptique.

Soit AN l'écliptique, AS la latitude de Saturne, $1^d 34'$ boréale; NB l'orbite des quatre premiers



satellites, dont le nœud N étoit en 1787 à $5^f 17^d 15'$, & dont l'inclinaison N est de $31^d \frac{1}{2}$, B le point de la conjonction. Si la distance AN entre le nœud N & Saturne, est de $23^d 26'$, la distance NB n'est que de $19^d 30'$; il faut donc ôter $3^d 56'$ de la longitude de Saturne en A pour avoir la longitude du satellite en B , comme on le trouve en résolvant les deux triangles RNA , SNB . Le point S , où je suppose Saturne, peut être considéré comme le point du ciel directement

opposé à la Terre, ayant une latitude égale à celle de Saturne vu de la Terre; alors NB est l'orbite du satellite autour de Saturne, & NA l'écliptique vue de Saturne; mais le point S & le point B sont toujours sur l'arc SB perpendiculaire à l'orbite, si B est le point de la conjonction ou le petit axe de l'orbite du satellite.

Pour le cinquième satellite, il faut distinguer la manière dont on a fait les observations. Celles que j'ai rapportées (*Mém. 1786, page 383*) étant faites par rapport à la perpendiculaire à son orbite, le point N est le nœud du cinquième satellite; mais l'observation de 1673 que j'ai employée & que j'ai réduite de même, pourroit bien avoir été faite par rapport à la ligne des anses, parce qu'alors on croyoit que le satellite tournoit dans le même plan que les autres: or Cassini disant que le satellite étoit à $6^d 40'$ de son périégée (*Mém. 1716, p. 216*), pourroit bien avoir pris pour périégée le petit axe de l'anneau; la différence feroit $40'$ dans la réduction. Cependant comme plusieurs jours d'observations rapportées sur une figure, indiquent naturellement le passage par le petit axe de l'ellipse, je crois plus naturel de supposer que c'est-là ce qu'il a entendu par le périégée du satellite.

Pour corriger encore un peu les anciens résultats de Cassini, j'ai calculé les longitudes de Saturne par les Tables de Halley, & j'y ai appliqué l'erreur des Tables que Halley avoit déterminée; par ce moyen j'ai eu les résultats suivans pour les dix observations dont Cassini s'étoit servi pour construire ses Tables. Ces observations sont rapportées dans les Mémoires de 1716, & je les ai encore insérées dans ceux de 1786, *page 385*; mais les voici plus exactement.

	TEMPS MOYEN des observations.			LONGITUDES des Satellites.			CORRECT. des Tables.	
			H. M. S.				D. M.	
I.	1685	31 Mars	10. 19.	4.	5. 40	+ 1. 52		
	1714	18 Avril	9. 36.	1.	0. 23	+ 2. 30		
II.	1685	24 Avril	8. 38.	10. 13. 47	+ 1. 52			
	1714	7 Mai	9. 26.	3. 22. 42	+ 2. 11			
III.	1673	25 Juillet	12. 5. 46	1. 11. 17	- 2. 46			
	1714	4 Avril	10. 3.	11. 26. 52	+ 2. 23			
IV.	1659	14 Mars	8. 9. 20	0. 25. 44	- 4. 2			
	1714	11 Février	10. 14. 53	11. 11. 11	+ 1. 59			
V.	1673	16 Juillet	12. 5. 20	6. 19. 49	+ 0. 3			
	1714	5 Mai	9. 26.	4. 28. 22	+ 0. 14			

On voit que les Tables de Cassini ne s'accordent point avec les observations qui lui avoient servi pour les construire, & cela vient principalement de la réduction dont j'ai parlé, & qu'il avoit omise.

Pour établir les époques des satellites au temps présent, j'ai fait usage des observations de M. Bernard, que j'ai rapportées dans les Mémoires de 1786, p. 384, & j'y ai joint celles de M. Herschel que je vais rapporter.

Premier satellite. Le 19 août 1787, 12^h 29', temps moyen réduit au méridien de Paris : il étoit à gauche, exactement sur la ligne des anses.

Le 20 août, 12^h 25', il étoit à droite sur la ligne des anses; le milieu donne la conjonction supérieure.

Le 30 septembre, 9^h 18', il étoit près de la perpendiculaire menée sur l'anneau à l'extrémité de l'anse, avant sa conjonction inférieure.

Second satellite. Le 10 septembre, $9^h 37'$, dans la perpendiculaire menée par une anse.

Le 24 septembre, $10^h 3'$, dans la perpendiculaire menée par l'autre anse.

Troisième satellite. Le 30 août, $10^h 38'$, il étoit en conjonction supérieure sur le petit axe de l'anneau.

Le 8 septembre, $10^h 50'$, aussi en conjonction supérieure.

Quatrième satellite. L'observation que l'on verra ci-après, de l'ombre au milieu de Saturne, le 2 novembre 1789, à $10^h 43'$ est certainement la plus exacte de toutes; mais comme elle est unique, elle n'apprend rien pour une orbite où il y a 5 ou 6 degrés d'équation; il en faudroit trois de même espèce, & tout le soin que j'ai mis à la calculer & à la réduire, ne lui donne aucun avantage.

Mais comme j'avois sept observations de M. Bernard, je les ai toutes calculées; voici les erreurs des Tables de Cassini, ou les corrections qu'il faut y faire pour chacune, en y joignant celle de M. Herschel: le résultat moyen est $1^d 21'$ à ajouter aux époques de Cassini pour 1788, tandis qu'en 1659 il y avoit $4^d 2'$ à ôter; cela fait $5^d 23'$ pour 129 ans, ou $2' 30''$ par année à ajouter au mouvement du quatrième satellite.

		D.	M.
11	Août 1787	—	2. 13
26	Juillet	—	2. 46
2	Nov. 1789	—	3. 53
28	Sept. 1787	—	5. 26
3	Sept.	+	5. 14
21	Octob.	+	6. 10
9	Octob.	+	6. 46
18	Août 1786	+	7. 0

Mais comme l'observation de 1659 est unique, & qu'elle pourroit être de 5 ou 6 degrés plus ou moins forte que la longitude moyenne, on pourroit discuter les observations de Cassini rapportées dans les Mémoires de 1718; c'est ce que je ferai quand j'aurai rassemblé un plus grand nombre d'observations modernes: M. Herschel m'a promis d'en publier, & je les attends avec impatience pour déterminer l'apside du quatrième satellite. En attendant, elle me paroît comme celle du Soleil, vers trois signes de longitude, avec une équation de cinq ou six degrés, comme celle de la Lune.

En réunissant ces observations avec celles de M. Bernard, j'ai eu les positions suivantes avec la correction des Tables de M. Cassini.

			H.	M.		D.	M.	S.		D.	M.
I.	1787	19 Août	12.	29	}	10.	28.	59	+	19.	52
		20 Août	12.	25							
		9 Sept.	7.	53			1.	27.	50		15. 41
		30	9.	18			3.	28.	18		20. 15
		20 Déc.	6.	30			1.	28.	29		16. 12
	L'erreur moyenne est 18 ^d .										
I I.	1787	10 Sept.	9.	37		4.	5.	54	+	10.	42
		24 Sept.	10.	3		2.	18.	48	+	9.	46
	L'erreur moyenne est 10 ^d 14'.										
III.	1787	30 Août	10.	38		10.	28.	39	-	3.	28
		8 Sept.	10.	50		10.	27.	47	-	2.	3
	L'erreur moyenne est 2 ^d 45'.										
I V.	1787	26 Juill.	10.	43		5.	3.	38	-	2.	46
		11 Août	11.	13		5.	6.	24	-	2.	13
		18 Août	10.	39		10.	22.	37	+	7.	0
		3 Sept.	10.	4		10.	21.	32	+	5.	14
	Le milieu est + 1 ^d 21', comme on l'a vu ci-dessus.										
V.	1787	24 Août	1.	7		10.	25.	26	-	7.	59
		23 Nov.	6.	20		5.	15.	44	-	5.	13
		21 Déc.	5.	46		9.	19.	11	-	8.	43
	Le milieu est - 7 ^d 18'.										

En comparant ces erreurs avec celles des plus anciennes observations rapportées ci-dessus, je trouve qu'il faut faire aux moyens mouvemens des Tables de Cassini, les corrections suivantes. J'en ai conclu le mouvement annuel, & j'y ai joint celui qui fut donné par Cassini (*Mém. de l'Acad. 1716*), & par Bradley (*Phil. transf. 1718*, n.^o 356): on verra par la comparaison, que les Tables de Bradley étoient beaucoup moins exactes pour les quatre derniers satellites, que celles de Cassini; aussi Halley, dans son recueil de Tables, préféra celles-ci, par le conseil même de Bradley.

Satellites.	CORRECTIONS À FAIRE aux Tables de Cassini.	Mouvement ann. suivant nous.	Mouvement ann. suivant Cassini.	Mouvement ann. suivant Bradley.
	<i>D. M.</i>	<i>S. D. M. S.</i>	<i>S. D. M. S.</i>	<i>S. D. M. S.</i>
I.	ajoutez 16. 8 au mouvement de 102 $\frac{1}{2}$ ans.	4. 4. 44. 42	4. 4. 35. 15	4. 4. 42. 51
II.	ajoutez 8. 22 pour 102 $\frac{1}{2}$.	4. 10. 15. 19	4. 10. 10. 25	4. 10. 1. 59
III.	ôtez 0. 1 pour 114 ans.	9. 16. 57. 5	9. 16. 57. 5	9. 17. 1. 42
IV.	ajoutez 5. 23 pour 128 $\frac{1}{2}$ ans.	10. 20. 39. 37	10. 20. 37. 7	10. 20. 35. 6
V.	ôtez 7. 21 pour 114 $\frac{1}{2}$ ans.	7. 6. 23. 37	9. 6. 27. 28	7. 6. 31. 33

D'après ces élémens, j'ai fait de nouvelles Tables des satellites de Saturne qui sont dans la *Connoissance des temps de 1791 & 1792*. Je n'ai point tenu compte des inégalités des satellites: il y aura donc souvent deux ou trois degrés d'erreur, mais nous n'avons point encore assez d'observations pour entreprendre la recherche des inégalités des satellites; il suffit de pouvoir bien les reconnoître toutes les fois qu'on voudra les observer, & il étoit nécessaire de corriger des erreurs de 7^d, 10^d & 18^d dans les Tables dont on se servoit jusqu'à présent; il étoit sur-tout nécessaire de rectifier l'erreur que tous les astronomes avoient commise en calculant les longitudes des satellites par leurs observations.

J'ai parlé ci-dessus d'une observation curieuse de M. Herschel; il m'a écrit le 26 février 1790, qu'il avoit observé le passage de l'ombre du 4.^e satellite sur le disque de Saturne, & qu'il étoit central le 2 novembre 1789, à 10^h 31' 25", 5, temps moyen à Slough, ou 10^h 43' 9", temps moyen à Paris : la longitude de Saturne sur son orbite, étoit 11^f 21^d 33', & celle du satellite sur la sienne, 5^f 21^d 13'. Cette observation donne pour la longitude du satellite 5^d 34' de moins que mes Tables; mais cette différence vient sans doute de l'équation de l'orbite du satellite, que nous déterminerons quand nous aurons un plus grand nombre d'observations. L'erreur des Tables de Cassini pour cette observation, n'est que de 3^d 53'; ainsi il auroit fallu diminuer la longitude de ces Tables, au lieu que je l'ai augmentée; mais les observations du 18 août & du 3 septembre 1786 l'exigeoient évidemment.

Au moment où l'on finissoit l'impression de ce Mémoire (25 janv. 1791), j'ai reçu les observations de M. Herschel, avec de nouvelles Tables des satellites de Saturne, par ce célèbre observateur; je les ai comparées avec ses observations, & j'ai trouvé que mes Tables s'accordoient mieux que celles de M. Herschel avec ses propres observations, en faisant les réductions dont j'ai parlé, comme je le ferai voir dans un troisième Mémoire sur les satellites de Saturne.



ÉCLIPSES DE SOLEIL

ET D'ÉTOILES,

*Observées en 1787 & 1788, avec les résultats des
Observations pour les Longitudes de divers pays.*

Par M. DE LA LANDE.

LES occultations des étoiles η & μ des Gémeaux ont été observées à Paris & en plusieurs autres endroits, le 26 novembre 1787; voici les observations & les calculs, en supposant la parallaxe de la Lune à Paris, $60' 59''.7$, à $11^h 33' 40''$ de temps vrai; & le mouvement horaire, $37' 35''.3$ en longitude, & $3' 27''.3$ en latitude.

M. le François, mon neveu, qui s'occupe de l'astronomie avec moi depuis plusieurs années, a observé au Collège royal, $2''.2$ à l'orient de l'Observatoire, l'immersion de η , $11^h 33' 40''$, temps vrai; & l'émergence, $12^h 42' 27''$. L'immersion de μ , $15^h 44' 45''$; & l'émergence, $16^h 16' 51''$; d'où il résulte que la conjonction avec η est arrivée à $12^h 35' 28''$; longitude de la Lune, $3^r 0^d 29' 15''$; latitude, $23' 48''$. A. la conjonction avec μ , $15^h 33' 34''$; longitude, $3^r 2^d 20' 40''$; latitude, $33' 49'' \frac{1}{2}$.

A Greenwich, immersion de la première, $11^h 22' 51''.7$; émergence, $12^h 31' 45''.0$; conjonction, $12^h 26' 4''.5$; latitude, $23' 43''$. Immersion de la seconde, $15^h 38' 34''.7$; émergence, $15^h 53' 48''.0$; conjonction, $15^h 24' 14''.7$; latitude, $33' 51''$.

A Marseille, par M. Bernard; immersion de la première, $11^h 51' 28''$; émergence, $12^h 51' 32''$; conjonction, $12^h 47' 28''$; latitude, $23' 42''$. Immersion de la seconde,

seconde, $15^h 56' 59''$; émerfion, $16^h 48' 28''$; conjunction, $15^h 45' 35'' \frac{3}{4}$; latitude, $33' 50''$.

A Vérone, par M. Cagnoli, immersion de la première étoile, $12^h 20' 49''$; émerfion, $13^h 27' 16''$: celle-ci est plus sûre. Conjonction, $13^h 9' 48''$; latitude, $24' 0''$; cette latitude étant trop grande, rend l'immersion fufpecte. En n'employant que l'émerfion, on trouve la conjunction, $13^h 10' 0''$, & la différence des méridiens, $34' 34''$, au lieu qu'on ne trouve que $34' 12''$ par l'immersion. M. Cagnoli trouve par un milieu entre plusieurs observations, $34' 42''$, & la latitude, $45^d 26' 7''$.

A Gotha, par M. Zach, immersion de la première étoile, $12^h 18' 38'',8$; émerfion, $13^h 29' 30'',8$; conjunction, $13^h 8' 53'',6$; latitude, $24' 8''$. La différence des méridiens avec Paris feroit $33' 27''$; mais comme la latitude ne devoit être que de $23' 42'' \frac{1}{2}$, il y a lieu de croire qu'une des deux observations a moins bien réuffi: l'immersion feule donne la différence des méridiens, de $33' 18''$; l'émerfion feule donne $33' 29''$, ce qui me paroît plus exact, parce que j'avois trouvé $33' 34''$ par l'éclipe de ι du Taureau, le 18 octobre 1788. Comme l'émerfion fe faisoit ici à la partie obscure de la Lune, elle étoit en effet fufceptible d'une plus grande précision, & je préfère le réfultat de $33' 29''$.

En prenant le milieu entre les observations des deux étoiles, on a la longitude de la Lune le 26 novembre, $12^h 23' 16''$, temps moyen, réduit à l'Observatoire royal; $3^f 0^d 29' 11''$; & la latitude, $23' 41''$. La correction à faire aux Tables, telles qu'elles font dans mon *Aftronomie*, 3.^e édition, est $0''$ pour la longitude, & $+ 1''$ pour la latitude.

On a auffi très-bien observé l'occultation de Jupiter par la Lune, le 14 mars 1788.

Ce jour-là on étoit afsemblé au Palais-royal pour voir Jupiter à côté de la Lune, qui faisoit un fpectacle fingulier, fur-tout après l'émerfion.

Mém. 1788.

F f

Immersion du premier bord de Jupiter, au Collège royal.....	4 ^h	46'	33",	temps vrai.
Immersion totale.....	4	47	50.	
Émerfion du premier bord	6	4	49.	
Émerfion du fécond bord	6	5	59.	

J'ai employé la seconde & la quatrième observation pour trouver la conjonction.

J'ai supposé le mouvement horaire de la Lune, 34' 51",9 en longitude, & 3' 5",6 en latitude; la parallaxe horizontale de la Lune pour Paris, 58' 55" & 58' 56"; le diamètre horizontal de la Lune, 32' 7",4 & 32' 6",9; celui de Jupiter, 36".

J'ai trouvé la conjonction, 5^h 22' 32", temps vrai, ou 5^h 31' 39", temps moyen, au méridien de l'Observatoire royal. La longitude calculée par les Tables, étoit 2^e 18^d 16' 27",6, plus grande de 2" $\frac{1}{2}$ que celle de Jupiter, suivant l'observation du P. Fixlmillner; & la latitude, 14' 43" B.

Le 18 octobre 1788, l'étoile ι du Taureau a été éclipsée par la Lune; l'immersion, 10^h 57' 41" $\frac{1}{2}$; émerfion, 11^h 49' 9" $\frac{1}{2}$, par M. le François mon neveu, au Collège royal. M.^{rs} Méchain & Messier ont eu quelques secondes de différence pour l'immersion; en supposant 44", on trouve la conjonction vraie, 12^h 12' 50", temps vrai réduit à l'Observatoire, avec 2^e 13^d 50' 40" de longitude, & 29' 16" de latitude. J'ai supposé 1^d 13' 20" pour la latitude apparente de l'étoile, cette année, en tenant compte du changement de latitude, à raison de 50" pour la diminution séculaire. J'ai supposé la parallaxe horizontale pour Paris, 58' 14" plus petite que celle qu'on a employée jusqu'ici, parce qu'il me paroît que l'aplatissement de la Terre n'est pas aussi considérable que les astronomes l'ont supposé. Le mouvement horaire en longitude étoit 34' 16",3, & 3' 5",0 en latitude;

le demi-diamètre horizontal de la Lune, $15^{\circ} 54', 3''$; d'après les nouveaux calculs que j'ai présentés à l'Académie; j'en ôte $2''$ pour l'inflexion. Par les nouvelles Tables de la Lune, de Mafon, publiées en Angleterre, on trouve la longitude, $2^{\circ} 13^{\circ} 50' 40''$; & la latitude, $29' 9''$; ainsi l'erreur est nulle en longitude, elle est $+ 7''$ en latitude: c'est la correction à appliquer aux Tables pour les accorder avec l'observation.

M. Zach m'ayant envoyé son observation, $11^{\text{h}} 40' 50''$, & $12^{\text{h}} 32' 57''$, à Gotha, j'en ai déduit la conjonction, $12^{\text{h}} 46' 23'' \frac{1}{2}$; & la différence des méridiens, $33' 33'' \frac{1}{2}$, au lieu de $33' 40''$ que nous supposions auparavant.

Le 18 novembre, la première des deux α du Cancer a été éclipsée: immersion, $17^{\text{h}} 54' 32''$; émerfion, $18^{\text{h}} 47' 21''$, au Collège royal; conjonction, $18^{\text{h}} 12' 14'', 7$, temps vrai réduit à l'observatoire; longitude apparente de l'étoile, par le catalogue de Mayer, $4^{\circ} 10^{\circ} 9' 48''$; latitude de l'étoile, $5^{\circ} 29' 40'', 3$; latitude de la Lune par l'observation, $4^{\circ} 40' 47'', 5$; erreurs des Tables en longitude, $+ 4''$, en latitude, $+ 4''$; parallaxe, $59' 20''$; mouvement horaire, $35' 40'', 9$, & $1' 31'', 2$; demi-diamètre horizontal de la Lune, $16' 12'', 3$.

Le 21 novembre, immersion de l'étoile ϵ du Lion, $14^{\text{h}} 23' 32''$; émerfion, $15^{\text{h}} 19' 52'' \frac{1}{2}$, au Collège royal; conjonction, $16^{\text{h}} 18' 27''$, temps vrai, ou $16^{\text{h}} 5' 2''$, temps moyen, à l'Observatoire; longitude de l'étoile, $5^{\circ} 21^{\circ} 26' 9''$; latitude, $5^{\circ} 42' 3''$; latitude de la Lune, $5^{\circ} 8' 14''$, par l'observation; l'erreur des Tables en longitude est nulle, en latitude $- 10''$. J'ai supposé la parallaxe horizontale; $58' 38'', 6$ pour l'immersion, $58' 37'', 8$ pour l'émerfion; les mouvemens horaires, $34' 51'', 3$, & $44'', 9$; le demi-diamètre horizontal de la Lune, $16' 1''$.

L'éclipse de Soleil du 4 juin 1788, n'a pu être observée à Paris, mais elle l'a été en plusieurs endroits de l'Europe, & M. de Beauchamp l'a observée à Bagdad;

elle a été totale à Alep : mais revenant de son voyage de Perse, pour la détermination de la mer Caspienne, & ayant pris la fièvre, il n'a pu se transporter dans les parties de l'Asie où il auroit eu la satisfaction d'observer l'éclipse totale.

M. Piazzi, astronome de Palerme, qui étoit à Londres, ainsi que M. Darquier, correspondant de l'Académie, ont observé cette éclipse à Greenwich, avec M. Maskelyne, astronome royal : commencement, le 3 à $19^h 24' 46'',5$, temps vrai ; fin, $21^h 1' 24''$. M. Piazzi en a déduit la conjonction à $20^h 58' 47'',3$; & la latitude de la Lune, $14' 48''$ B. La longitude du Soleil, calculée par les nouvelles Tables de M. de Lambre, étoit alors $2^f 14^d 16' 39''$. Les nouvelles Tables de la Lune, de M. Mafon, donnent $17''$ de plus pour la longitude de la Lune, & $13''$ de trop pour la latitude.

En prenant le milieu entre les observations de Greenwich, d'Oxford & de Loampit-hill, & supposant Paris de $9' 18'',8$ à l'orient de Greenwich, comme le trouve M. le général Roy, par ses triangles, on a la conjonction pour Paris, $21^h 8' 6'',7$, temps vrai.

M. de Beauchamp observa la fin de l'éclipse le 4, à $1^h 26' 19''$, sous la latitude de $33^d 19' 32''$. Supposant la différence des parallaxes, $60' 18'',4$ à Bagdad ; le demi-diamètre apparent de la Lune, $16' 44'',1$; celui du Soleil, $15' 43'',5$; la différence des mouvemens horaires en longitude, $34' 30'',0$; le mouvement horaire en latitude décroissante, $3' 25'',5$, j'ai trouvé la conjonction, le 3, à $23^h 56' 12''$, & la différence des méridiens, $2^h 48' 5''$: elle est moindre seulement de $4''$ que celle que M. de Beauchamp avoit déduite de ses observations des satellites de Jupiter. Le commencement qu'il avoit estimé à $10^h 30' 51''$, étant comparé avec la fin, m'a donné la conjonction, $23^h 56' 11'' \frac{1}{2}$; ainsi il paroît que l'estime étoit exacte ; mais la fin ne donne que $2^h 47' 51''$ pour la différence des méridiens,

Voici les autres observations, avec les résultats que M. Piazzzi en a tirés : il les avoit publiés dans les Transactions philosophiques de 1789 ; mais il m'a envoyé des calculs refaits depuis la publication, en employant $6''{,}5$ pour l'inflexion & l'irradiation, & qui lui ont donné $14' 58''$ pour la latitude de la Lune en conjonction. On voit dans les deux dernières colonnes, la conjonction déduite séparément du commencement & de la fin, en supposant la latitude, $14' 58''$, & ôtant $6''{,}5$ de la somme des demi-diamètres.

	Commenc.	F I N.	Conjonction.	Latitude de la Lune.	Conj. par le com.	Conj. par la fin.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	M. S.	S.	S.
A Loampit-hill, M. Aubert.	19. 24. 41,9	21. 1. 20,3	20. 58. 44,1	14. 48,2	44,1	44,2
A Oxford, M. Hornsby...	19. 20. 36,1	20. 54. 40,0	20. 53. 46,2	14. 48,7	43,8	47,1
A Dublin, M. Usher.....	19. 5. 46,5	20. 27. 42,1	20. 33. 33,9	14. 48,3	37,6	30,2
A Mitau, M. Beitle.....	21. 20. 15	23. 8. 52	22. 33. 41,5	14. 48,7	37,6	45,0
A Berlin, M. Bode.....	20. 23. 9	22. 14. 32	21. 52. 20,3	14. 44,2	22,9	14,0
A Crensmunster, M. Fixl-millner.....	20. 15. 20	22. 19. 50,7	21. 54. 59	14. 23	21,2	37,0
A Vienne, M. Triesnecker.	20. 25. 49	22. 32. 40	22. 4. 18,8	14. 39	24,2	13,8
A Perinaldo, M. Maraldi..	19. 37. 50	21. 29. 40			
A Milan, M. ^{rs} de Cefaris & Reggio.....	19. 48. 23	21. 51. 14	21. 35. 24,7	14. 32	25,2	25,0
A Padoue, M. Ciminello..	19. 59. 20	22. 6. 58	21. 46. 21,3	14. 39	25,1	17,9
A Bologne, M. Mateucci..	19. 55. 10 $\frac{1}{2}$	22. 3. 45 $\frac{1}{2}$	21. 44. 15,3	14. 31,0	28,3	4,2
A Viviers, M. Flaugergue..	19. 26. 38	21. 25. 41	21. 17. 29	14. 31	41,2	18,4
A Rouen, M. du Lague...	21. 7. 15	21. 3. 9,6	10,6
A Marseille, M. Bernard...	19. 26. 42	21. 29. 23,5	21. 20. 17,5	14. 40	20,4	14,3

M. Gerstner, professeur d'astronomie à Prague, m'a envoyé de semblables calculs qu'il a faits par sa méthode analytique, pour cinq endroits différens.

	COMMENCEMENT observé.	FIN observée.	CONJONCTION par le commenc.	CONJONCTION par la fin.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
Greenwich. . .	19. 24. 46,5	21. 1. 25,5	20. 58. 42,9	20. 58. 43,0
Marseille. . .	19. 26. 42	21. 29. 23,5	21. 20. 10,1	21. 20. 10,3
Cremsmunster..	20. 15. 20	22. 19. 50,7	21. 55. 15,3	21. 55. 15,0
Vienne.	20. 25. 49	22. 32. 40	22. 4. 17,4	22. 4. 14,6
Prague.	20. 21. 31	22. 21. 15	21. 56. 26,0	21. 56. 28,8

M. Piazzi trouve la conjonction à Prague, $21^h 56' 30''$, & la latitude, $14' 45''$: la conjonction, par le commencement, est à $33''{,}8$, & par la fin, à $26''{,}1$, en tenant compte de l'inflexion, & supposant la latitude en conjonction, $14' 58''$.

J'ajouterai encore ici les observations faites en Suède.

A Stockholm, M. Nicander. $21^h 2' 21''{,}3$. $22^h 35' 33''{,}4$.

A Lund, M. Lidtgren. $20 25 53{,}5$. $22 12 2{,}8$.

A Abo, M. Lindquist. $21 24 10$. $22 56 7$.

Latit. $60^d 27' 7''$.

M. Piazzi trouve la conjonction, $22^h 27' 50''{,}7$, par le commencement; & $20''{,}4$ seulement par la fin.

A Varsovie, M. Bistrzki. $20 56 45$. $22 57 33$.

Celle-ci donne la conjonction à $22^h 22' 59''{,}3$, & la latitude, $14' 44''$, suivant les calculs de M. Piazzi; mais en tenant compte de l'inflexion, il trouve, par le commencement, $61''{,}7$; & par la fin, $55''{,}7$ seulement.

A Lilienthal, par M. Nahe, fin, $21^h 49' 50''{,}6$; latit. $53^d 8' 25''$, $26'$ à l'orient de Paris; la conjonction, $9^h 34' 38''$; différence des méridiens, $26' 30''$.

Cet observatoire, devenu remarquable actuellement, méritoit qu'on en déterminât bien la position.

Cette éclipse donne pour Périnaldo, la conjonction, $21^h 29' 40''$, & la différence des méridiens, $21' 36''$. Comme cet endroit est remarquable par les observations de feu M. Maraldi, j'ai voulu m'en assurer par une autre observation. Le 18 novembre 1774, M. Maraldi observa l'éclipse d'Aldebaran, à $16^h 9' 48''$ (*Mém. de l'Académ. 1777*) ; en employant les élémens donnés par M. Lexell, dans les Mémoires de Pétersbourg pour 1774, je trouve la conjonction, $15^h 27' 58''$; & comme M. Lexell la trouvoit pour Paris, $15^h 6' 23''$, cela donne pour la différence des méridiens, $21' 35''$. L'émerfion observée à Périnaldo ne s'accorde point avec l'immersion, & je m'en suis tenu à l'immersion. Ce résultat est assez bien d'accord avec celui de M. Piazzzi. M. Méchain a trouvé, il est vrai, $21' 44''$, par l'occultation d'Aldebaran du 1.^{er} novembre 1773, observée à $9^h 46' 29''$; mais M. Maraldi n'étoit pas assez sûr de cette observation pour qu'elle doive balancer le résultat de $21' 35''$.

Depuis que M. Piazzzi eut achevé ses calculs, je lui écrivis que je diminuois les parallaxes de la Lune de $5''$, en réduisant l'aplatissement de la Terre à $\frac{1}{300}$, ce qui donne pour l'angle de la verticale à Greenwich, $11' 12''$; alors il trouve la conjonction, $20^h 58' 42''$, au lieu de $47''$, 3 ; la latitude, $14' 59''$, 7, au lieu de $48''$; la correction des Tables, — $17''$ en longitude, & — $2''$, 6 en latitude, en prenant les Tables de la Lune, telles que je les ai données dans la troisième édition de mon *Astronomie*, où les époques & les moyens mouvemens sont un peu corrigés. Le 3 juin à $21^h 3' 58''$, temps moyen, elles donnent la longitude, $2^f 14^d 16' 56''$.

A ces résultats sur l'éclipse de 1788, j'en ajouterai un sur celle de 1787, par une observation qui m'est parvenue depuis la publication des Mémoires de 1787, où j'ai donné les résultats de cette éclipse. L'observation fut faite

à Gothaab, sur la côte occidentale du Groenland, par M. Ginge, missionnaire Danois, à $64^{\text{d}} 10'$ de latitude: commencement, le 14 juin à $11^{\text{h}} 43' 6''$ du matin; fin, à $1^{\text{h}} 29' 38''$; conjonction, $0^{\text{h}} 22' 26''$; différence des méridiens, $3^{\text{h}} 36' 7''$; latitude en conjonction, $59' 51''$, plus petite de $17''$ que je ne l'avois trouvée par les autres observations. La différence n'étant pas très-considérable, prouve que l'observation est assez bonne, sur-tout pour déterminer la position d'une côte aussi peu connue. On peut voir dans les Ephémérides de Vienne pour 1790, plusieurs observations des satellites, faites dans le même endroit, par lesquelles M. Méchain a déterminé la différence des méridiens, $3^{\text{h}} 36' 32''$. Il a aussi calculé l'observation de l'éclipse, & il trouve, $3^{\text{h}} 36' 26''$, en n'employant que la fin de l'éclipse, qu'on doit présumer plus exacte que le commencement.



M É M O I R E

*Sur l'Éclipse de Soleil du 16 Août 1765, observée
à Rome.*

Par M. DE LA LANDE.

J'OBSERVAI cette éclipse à Rome; je calculai la conjonction le même jour, & je l'envoyai à l'Académie. A mon retour, je voulus y ajouter de nouvelles comparaisons & de nouveaux calculs; mais d'autres occupations ont retardé ce travail jusqu'à présent. Cependant j'ai cru devoir y revenir, & j'en profiterai pour employer les nouvelles Tables du Soleil & de la Lune, & des élémens plus exacts, pour comparer plusieurs autres observations de la même éclipse, qui serviront à établir les longitudes de divers endroits.

J'étois au collège Romain de Saint-Ignace, avec trois astronomes habiles, le P. Boscovich, M. Zanotti, qui étoit venu à Rome à l'occasion des eaux de Bologne, & le P. Asclepi, professeur du collège Romain. Nous avions un télescope de deux pieds de foyer, garni d'un micromètre objectif fait par Short, que M. le Prince de Palestrine nous avoit confié, & une lunette acromatique de Dollond, qui a dix pieds de foyer, que M. le marquis Gabrielli nous avoit aussi prêtée. J'avois pris des hauteurs correspondantes; mais le mauvais temps diminua beaucoup le succès de nos préparatifs.

A $4^h 54' 30''$, temps vrai, j'aperçus au travers des nuages, que l'éclipse venoit de commencer. Le P. Audiffredi, qui étoit à la Minerve avec une lunette de dix-neuf palmes, ou treize pieds, faite par Eustachio de Divinis, opticien connu, l'aperçut $5''$ plus tôt, ou à $4^h 54' 25''$.

Mém. 1788.

G g

Je mesurai ensuite les distances des cornes de l'éclipse, tant que les nuages me le permirent.

TEMPS VRAI à Rome.			DISTANCES des cornes.	
H.	M.	S.	M.	S.
4.	59.	40	9.	22
5.	2.	5	11.	15
5.	4.	36	12.	30
5.	8.	13	14.	30
5.	11.	30	15.	15
5.	12.	35	15.	54
5.	16.	52	16.	46

A Greenwich, le commencement fut observé à $3^h 42'$ $52''$, de temps vrai; & la fin, à $4^h 59' 24''$. *Ephémérides, Berlin 1780, page 175.* Observations de M. Maskelyne; page 19.

A Londres, M. Short observa la fin, à $4^h 58' 57''$.

A Leyde, M. Lulofs observa la fin à $5^h 18' 58''$; il mesura plusieurs fois la distance des cornes; elle étoit de $19' 36''$ à $4^h 29' 1''$, & à $4^h 44' 48''$ (*Philosophical transact. 1766, page 31*).

A Caen, M. Pigott observa le commencement à $3^h 48' 16''$, & la fin, à $5^h 0' 56'',5$; grandeur de l'éclipse, $5' 15''$, en supposant $31' 43''\frac{1}{3}$ pour le diamètre du Soleil. Il se servit d'une lunette acromatique de six pieds, & d'un micromètre de Dollond (*Philos. transf. 1767, page 403*).

A Calais, l'éclipse fut observée par feu M. le prince de Croy, feu M. de Fourcroy, depuis Maréchal-de-camp; & M. Mouron. Commencement, $3^h 50' 46''$; & fin, $5^h 8' 17'',5$ (*Philos. transf. 1766, page 263*); mais on n'avoit pas pris de hauteurs correspondantes.

M. Messier observa la même éclipse à Colombes, $20^{\text{h}} \frac{1}{3}$ de temps à l'occident de Paris, à $48^{\text{d}} 55' 28''$ de latitude. Le commencement arriva à $3^{\text{h}} 58' 13''$, & la distance des bords fut mesurée de $26' 19''$, à $4^{\text{h}} 25' 27''$ (*Mém. de l'Acad. 1765, page 479. Philos. transf. 1766, page 3*).

M. Méchain a conclu du commencement la conjonction, $3^{\text{h}} 43' 47''$, temps vrai à Paris; mais c'est en partant de l'observation de Calais, sur laquelle il y a erreur.

M. le Monnier observa la fin à $5^{\text{h}} 11' 50''$, à Paris; mais entre les nuages (*Mém. de l'Académie 1765, page 553*).

A Brest, l'éclipse fut observée par M. le chevalier de Goimpy, mais seulement avec une lunette simple de trois pieds, & sans avoir pris des hauteurs correspondantes; ainsi l'on ne peut guère tirer parti de cette observation.

Le P. Rostan, Jésuite, & professeur de mathématiques à Varsovie, observa le commencement à $4^{\text{h}} 58' 27''$, & la fin à $6^{\text{h}} 27' 44''$; la partie éclairée, à $5^{\text{h}} 7' 28''$, étoit $13' 12''$, 6; à $5^{\text{h}} 49' 22''$, de $22' 23''$, 1, & à $6^{\text{h}} 23' 7''$, de $29' 47''$, 9. Pour faire cette observation, il se joignit à M. Wolf, médecin du prince Adam Czartorinsky, & le seul à Varsovie qui eût quelques instrumens d'astronomie; mais pour régler la pendule, au défaut de quart-de-cercle, il se servit d'un octant à pinules, avec un bassin d'huile pour horizon; cependant les temps s'accordoient toujours à 3 ou 4'' près. Pour observer l'éclipse, il employa un télescope de Short de vingt-quatre pouces de foyer, garni d'un micromètre objectif; la fin lui parut entre 41 & $47''$, dans les nuages; ainsi il n'y a que 3 ou 4'' d'incertitude sur cette fin.

Pour calculer ces différentes observations, & d'abord celle de Greenwich, j'ai cherché par les nouvelles Tables du Soleil de M. de Lambre, & les dernières Tables de la Lune de M. Mason, les élémens primitifs. Lieu du Soleil, le 16 août, à $3^{\text{h}} 47' 34''$, temps moyen de la conjonction

236 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

à Paris, à peu-près connu, $4^{\text{f}} 23^{\text{d}} 52' 51'',5$; plus petite de $10''$ que par les Tables de la Caille; lieu de la Lune, $4^{\text{f}} 23^{\text{d}} 52' 44'',1$; latitude boréale, $1^{\text{d}} 14' 15'',2$; mouvement horaire en longitude, $31' 16'',4$; en latitude, $2' 48'',0$; parallaxe horizontale pour Paris, $55' 34'',2$, qu'il faut diminuer de $6''$ pour la réduire à l'aplatissement de $\frac{1}{300}$, comme je l'ai prouvé dans mon dernier Mémoire sur la parallaxe. La latitude de Greenwich, $51^{\text{d}} 28' 40''$, se réduit à $51^{\text{d}} 17' 29''$ dans ce sphéroïde; & la différence des parallaxes horizontales du Soleil & de la Lune, à $55' 19''$.

	COMMENCEMENT.	FIN.
Temps vrai des observations à Greenwich.....	$3^{\text{h}} 42' 52''$	$4^{\text{h}} 59' 24''$
Différence des longitudes vraies du Soleil & de la Lune....	$0. 3. 46,6$	$0. 40. 36,4$
Latitude vraie de la Lune.....	$1. 13. 32,0$	$1. 9. 57,4$
Déclinaison du Soleil.....	$13. 34. 41$	$13. 33. 28$
Distance du Soleil au zénith....	$58. 17. 26$	$70. 0. 46$
Angle du vertical & du cercle de déclinaison.....	$37. 24. 0$	$39. 57. 52$
Angle de position.....	$19. 19. 54$	$19. 20. 35$
Différence apparente de longit..	$10. 54,5$	$22. 25,2$
Parallaxe de longitude.....	$14. 41,1$	$18. 11,2$
Différence apparente de latitude.	$29. 2,9$	$21. 25,2$
Parallaxe de latitude.....	$44. 29,1$	$48. 32,2$

Ainsi le mouvement apparent de la Lune pendant la durée de l'éclipse, devoit être $33' 19'',7$ en longitude, & $7' 37'',7$ en latitude. Je suppose la distance apparente des centres, $31' 3'',2$, & $31' 0'',5$, en diminuant les diamètres du Soleil & de la Lune, comme on le doit faire dans les éclipses, & je trouve le temps vrai de la conjonction, $3^{\text{h}} 35' 4'',4$, & la latitude vraie, $1^{\text{d}} 13' 55'' B.$

J'ai calculé de même l'observation de Caen, & j'ai trouvé le temps vrai de la conjonction, $3^h 33' 27''.5$, ou $3^h 44' 15''.5$ à Paris, & la latitude, $1^d 13' 52''$, plus petite de $3''$ que par l'observation de Greenwich. Il résulte aussi de-là une différence des méridiens entre Paris & Greenwich, qui ne seroit que $9' 11''$, c'est-à-dire, plus petite de $5''$ que celle de $9' 16''$ qu'on a coutume d'employer, & que l'on croit cependant depuis quelques temps un peu trop foible.

L'observation de Calais m'a donné la conjonction à $3^h 41' 55''$ (M. Méchain avoit trouvé $3^h 41' 49''$, mais avec une parallaxe plus grande); je trouve aussi la latitude, $1^d 13' 56''.3$, seulement $1''$ de plus que par l'observation de Greenwich; mais il paroît que le temps vrai étoit en erreur de $27''$, à en juger par les observations de Caen & de Greenwich: en effet, M. le prince de Croy n'avoit pas employé les hauteurs correspondantes; mais la durée paroît avoir été bien observée.

L'observation de M. Short, en corrigeant la latitude de la Lune par les observations de Greenwich & de Caen, donne aussi la conjonction pour Greenwich, $3^h 35' 4''$, & par conséquent la différence des méridiens, $9' 11''$, en partant de la conjonction trouvée pour Caen.

Par un milieu entre les deux observations de Caen & de Greenwich, on a la conjonction, $3^h 48' 6''$, temps moyen à Paris, dans $4^f 23^d 52' 53''$; la longitude des Tables est plus grande de $10''$; la latitude vraie, $1^d 13' 55''$, est plus petite de $20''$ que par les Tables. L'erreur n'est que de $9''$ dans les secondes Tables de Mayer, que j'avois insérées dans la seconde édition de mon *Astronomie*.

J'ai aussi voulu employer le commencement observé à Colombes par M. Messier, avec la fin observée à Paris par M. le Monnier, en réduisant les deux observations au méridien de l'observatoire, mais en y appliquant les parallaxes qui conviennent à chaque lieu respectivement;

j'ai trouvé, pour l'observation de M. Messier, précisément la même conjonction, $3^h 44' 18''$, comme le milieu entre Caen & Greenwich; mais l'observation de M. le Monnier, faite au travers des nuages, en diffère trop pour pouvoir en tirer les conséquences que j'avois en vue dans cette comparaison.

La position de Varsovie est encore assez peu connue pour qu'il soit utile de calculer aussi cette observation; j'en ai donc déduit le temps de la conjonction, & j'ai trouvé $4^h 58' 48''$; ce qui donne pour la différence des méridiens, $1^h 14' 30''$; la hauteur du pôle est de $52^d 14' 28''$ (*Éphém. de Berlin, 1780, page 176*). Le P. Rostan avoit aussi observé l'éclipse de 1764; commencement, $10^h 54' 5''$; fin, $1^h 50' 37''$; M. du Séjour en a conclu, $1^h 14' 40''$ par le commencement, & $1^h 14' 27''$ par la fin.

Par l'éclipse du 26 août 1775, M. Lexell trouva, $1^h 14' 38''$ ou $41''$, comme on le voit dans *les Mém. de Pétersb. 1775, page 590*. Il ajoute que dans l'éclipse de 1764, il avoit trouvé $1^h 14' 52''$ par le commencement, & $1^h 14' 24''$ par la fin. Dans les *Éphémérides de Berlin* pour 1780, le P. Rostan trouvoit $1^h 14' 51''$ par l'éclipse de 1764; M. Wolf, $1^h 14' 35''$ par celle de 1765; & $1^h 14' 32''$ par quelques éclipses des satellites: mais ce qui me fait croire que mon résultat, $1^h 14' 30''$ est exact, c'est que je trouve la latitude de la Lune, $1^d 14' 0''$, à $5''$ près, comme par les observations de Greenwich & de Calais, qui tiennent le milieu entre celles de Caen & de Varsovie.

La position de Leyde mérite aussi d'être vérifiée par cette éclipse; j'ai calculé la distance apparente des centres, en supposant la latitude corrigée, & la différence des méridiens de $8' 32''$, j'ai trouvé $0'',3$ de moins: ce qui fait voir qu'il n'y a aucun changement sensible à faire dans la différence des méridiens; on pourroit ôter seulement $1''$, elle seroit de $8' 31''$.

Je n'eus pas à Rome la satisfaction d'observer la fin ni la grandeur de l'éclipse; je me suis borné au commencement, en corrigeant la latitude par les observations de Greenwich ou de Caen, & j'ai trouvé $4^h 24' 56''$ pour la conjonction à Rome; ainsi la différence des méridiens est $40' 38''$ entre Paris & le collège Romain, plus petite seulement d'une seconde que celle que M. Cagnoli a déduite de l'éclipse de 1781, & la même que celle que M. du Séjour a trouvée de l'éclipse de 1764, en prenant un milieu entre le commencement & la fin. M. Méchain avoit trouvé $40' 36''$, par diverses comparaisons; ainsi l'on a bien peu d'incertitude sur la position de cette fameuse ville.

La différence $40' 38''$, se réduit à $40' 32''$, en la rapportant à la coupole de S.^t Pierre du Vatican, qui est non-seulement le lieu le plus considérable de Rome, mais peut-être le point le plus remarquable de l'univers (a).

(a) Lorsque j'ai lu ce Mémoire à l'Académie, on a demandé si la grande pyramide d'Égypte, Sainte-Sophie de Constantinople, &c. ne seroient pas des points encore plus remarquables. Mais quelle différence, quand on considère Rome comme ayant été la capitale de l'empire du monde, & comme étant encore celle du monde chrétien.



M É M O I R E

Sur la période de lumière de l'Étoile Algol.

Par M. DE LA LANDE.

LES variations de lumière de l'étoile β de Persée, appelée *Algol* ou *la tête de Méduse*, avoient été remarquées dans le dernier siècle par Montanari, professeur de Bologne en Italie; mais la régularité de ses variations n'a été reconnue qu'en 1782, à Yorck, par M. le chevalier Goodricke, dont les astronomes regrettent la perte actuellement. Ses observations se trouvent dans les *Transactions philosophiques* de 1783, *page 480*, & de 1784, *page 288*. J'en ai donné l'histoire dans le huitième tome de mes *Ephémérides*, *page 94*.

M. Wurm, à Nürtingen dans le Wurtemberg, a donné des Tables de ces variations comparées aux observations, & avec lesquelles on calcule facilement les retours de lumière. *Ephém. de Berlin*, 1788 & 1789. J'ai entrepris de les vérifier par de nouvelles observations.

Dès la première année, M. Goodricke jugea que la période étoit de $21^h 20^{\frac{3}{4}}$, & dans les *Transactions* de 1784, *page 288*, il trouva $21^h 20^h 49' 3''$; M. Méchain, dès 1783, $21^h 20^h 48' 51''$.

Les Tables calculées par M. Wurm, supposent $21^h 20^h 48' 59''$, *Ephém. de Berlin*, 1788, *page 191*. Il les a comparées avec vingt-quatre observations, depuis 1783 jusqu'à 1785; il n'y en a que deux où l'erreur passe $20''$, ce qui prouve déjà que ces retours sont à peu-près constants.

Le 10 & le 13 octobre 1788, j'ai observé le temps de la plus grande diminution de lumière, & en prenant un milieu entre l'estime de ces deux jours, je trouve que c'étoit

c'étoit le 10 vers 11^h du soir, ce qui fait 10^h 47', temps moyen, exactement comme par les Tables de M. Wurm. Je compare cette observation avec celles de M. Goodricke, en prenant un milieu entre quatre qu'il choisit de préférence, & qui me donnent le 14 janvier 1783 à 9^h 44'; l'intervalle est de 2096 jours 1^h 3', qui, divisé par 731, nombre des périodes, donne 2^j 20^h 49' 0",33 pour chacune. Le 2 novembre j'ai trouvé 8^h 34'; le 22 novembre, 10^h 35'; & le 25 novembre, 7^h 36'; ce qui diffère du résultat précédent de 47', 27' & 15': si l'on suppose 30' pour l'erreur moyenne, la période ne sera plus que de 2^j 20^h 48' 58". Le 9 janvier 1790, j'ai estimé la diminution à 9^h 8', le 1.^{er} février, à 7^h 25', & le 21, à 9^h 40'. Ces observations donnent 2^j 20^h 49' 2"; c'est la quantité à laquelle je m'en tiens actuellement.

Les quatre observations de M. Goodricke dont j'ai fait usage, sont celles-ci, réduites en temps moyen, & au méridien de Paris.

	H.	M.
14 Janvier 1783.	9.	39
31 Janvier	14.	43
6 Février	8.	29
26 Février	9.	57

En partant de la première, & ajoutant la période de 2^j 20^h 49' autant de fois qu'il est nécessaire, je trouve pour les autres, 9', 3' & 10' de plus; ainsi, pour avoir un milieu entre les quatre, j'ajoute 5' à la première, & j'ai 9^h 34'; c'est ainsi qu'il faut l'employer pour qu'elle soit véritablement le résultat des quatre observations.

La plus petite phase dure 20 à 25' suivant M. Wurm, & la diminution totale, 6 heures & demie: ainsi, on est étonné de voir que les observations de M. Goodricke

diffèrent si peu. Il est vrai que celle du 21 mars, $8^h 50'$, diffère de $24'$; mais cela n'est pas surprenant. Au reste, j'ai rejeté celle-là de ma comparaison.

D'après mes observations & la période que je viens d'établir, j'ai calculé une Table des plus petites phases d'Algol pour tous les jours de l'année 1789, afin que les astronomes pussent facilement les observer. Cette Table a été publiée dans le *Guide céleste*, Éphéméride qu'a donné depuis 1787 M. Perny de Ville-neuve, l'un des astronomes établis à l'Observatoire royal en 1785, par la magnificence du Roi, par les soins de M. le baron de Breteuil, & de M. le comte de Cassini, dont le zèle pour l'astronomie mérite notre reconnoissance & nos éloges.

Cette Table une fois faite, peut servir pour l'année suivante, en ajoutant deux jours & trente-six minutes, si l'année suivante est aussi une année commune.

On voit par cette Table, qu'il y a 14 ou 17 jours dans chaque mois où l'on ne peut observer la diminution de lumière d'Algol, parce qu'elle arrive de jour; & comme cette étoile est $1^h 28'$ sous l'horizon, il est difficile au mois de mai de l'observer: elle se couche le 15 mai, à $10^h 38'$, & se lève à minuit & 6'. C'est l'hiver qui est le plus commode pour faire ces observations le soir, l'étoile étant très-élevée.

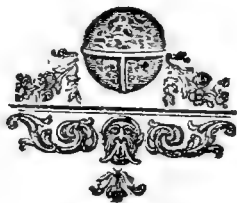
Pour juger de l'uniformité de la période, je prends encore un intervalle moitié plus court, & je choisis les quatre dernières observations de M. Wurm, qui ne diffèrent que de 6 à 7 minutes; en prenant un milieu, je trouve, le 22 janvier 1786, $8^h 20'$ à Paris; mon observation du 10 octobre 1788 en est éloignée de 992 jours $2^h 27'$, qui divisés par 346, donnent 2j $20^h 48' 58''$, 8; ce qui approche plus du résultat de M. Wurm, & diffère de $3''$, 2 du précédent. Ainsi, nous avons lieu de croire que cette révolution est sensiblement uniforme, puisqu'un intervalle de trois ans, & un de six ans, donnent le même résultat.

Les Tables de M. Wurm s'accordent parfaitement avec mes observations de 1788, mais elles diffèrent de 16' de celles de M. Goodricke, qu'elles devroient sur-tout représenter

Il me restoit à donner ici des Tables générales pour calculer en tout temps le moment de la moindre lumière, d'après les résultats de ce Mémoire; mais M. Méchain a bien voulu se charger de les publier dans la *Connoissance Temps de 1792*.

Au temps où ce Mémoire s'imprime, M. Wurm m'a envoyé cinq Observations réduites en temps moyen au Méridien de Paris: 1790, 18 février, 11^h 50'; 21 février, 8^h 40'; 13 mars, 10^h 46'; 5 avril, 9^h 10'; 17 octobre, 8^h 39'; d'après lesquelles il semble qu'il faudroit ôter une demi-heure de l'époque de mes Tables pour 1790. Les Observations nous éclaireront à ce sujet.

Cet habile Observateur m'écrit qu'il a aussi remarqué d'autres étoiles changeantes: il fait remplacer le défaut d'instrumens par une assiduité précieuse à observer des phénomènes qui n'exigent que la simple vue.



M É M O I R E

Sur l'état moyen des Eaux de la Seine , à Paris.

Par M. DE LA LANDE.

ON a souvent parlé dans les Mémoires de l'Académie, de la hauteur moyenne des eaux de la rivière; on a rapporté à ce point des nivellemens & des mesures; mais on a toujours supposé que la hauteur moyenne tenoit un milieu entre la plus grande & la plus petite élévation, & c'est cette notion défectueuse que je me propose de rectifier.

L'état moyen des eaux doit être l'état où elles sont le plus souvent; l'état naturel, indépendant des grandes inondations & des grandes sécheresses, l'état sur lequel on a droit de compter pour la navigation, sauf les accidens passagers, & les événemens extraordinaires.

Pour connoître cette hauteur moyenne, il falloit exclure les grandes hauteurs & les grands abaissemens, tandis que ce sont, au contraire, les seuls dont on ait fait mention, & dont on ait tenu compte jusqu'à présent dans ces sortes de calculs. Enfin, il faut avoir un grand nombre d'observations faites dans toutes les saisons, & prendre le milieu.

Les hauteurs que l'on marque tous les jours à l'échelle du pont de la Tournelle pour le service de la navigation de la rivière, & qui se publient dans le Journal de Paris, offrent un moyen facile de connoître l'état moyen de la rivière. Voici les hauteurs moyennes de chaque mois en 1782 & en 1787, qui suffiront pour donner une idée de celle qui fait l'objet de ce Mémoire. Ces hauteurs sont en pieds, pouces & dixièmes de pouces; elles sont

le résultat des hauteurs de tous les jours, entre lesquelles j'ai pris un milieu. Dans la dernière colonne j'ai mis les hauteurs des différens mois, dans l'ordre des hauteurs de l'eau, pour que l'on voie, par exemple, que le mois de septembre a été dans ces deux années le plus sec, & le mois de mai le plus sujet à la pluie.

MOIS.	1782.		1787.		Mois par ordre des 4 hauteurs.	Hauteurs par un milieu.	
	Pieds.	Pouc.	Pieds.	Pouc.		Pieds.	Pouc.
Janvier. . .	6.	5,4	5.	0,0	Septembre.	1.	2,5
Février. . .	6.	2,9	3.	10,6	Août. . . .	1.	6,4
Mars. . . .	4.	7,0	5.	3,8	Juillet. . .	3.	1,7
Avril. . . .	7.	10,6	5.	10,4	Octobre. .	3.	4,3
Mai.	9.	5,1	9.	3,6	Mars. . . .	4.	11,4
Juin.	5.	4,6	5.	5,7	Février. . .	5.	0,7
Juillet. . .	2.	0,0	4.	3,5	Décembre.	5.	2,0
Août. . . .	1.	5,1	1.	7,6	Juin.	5.	5,2
Septembre.	1.	0,0	1.	5,1	Janvier. . .	5.	8,7
Octobre. .	1.	8,8	4.	11,8	Novembre.	5.	11,5
Novembre.	3.	2,2	8.	8,7	Avril. . . .	6.	10,5
Décembre.	2.	9,7	7.	6,3	Mai.	9.	4,4
Milieu . . .	4.	4,0	5.	4,6			

La hauteur moyenne entre ces deux années, est donc de 4 pieds 10 pouces; c'est à peu-près l'état moyen de la rivière sur l'échelle du pont de la Tournelle, & c'est pour cela que j'ai fait ajouter dans le Journal de Paris, à la hauteur de l'eau pour chaque jour, ces mots, *Hauteur moyenne, 5 pieds.*

L'échelle du pont Royal marque les hauteurs au-dessus du fond de la rivière, au banc de l'Aiguillette, qui est l'endroit où il y a le moins d'eau; elle marque 2 pieds 8 pouces de plus, du moins dans les moyennes eaux;

car la différence n'est que de 1 pied 4 pouces dans les basses eaux ; elle va jusqu'à 3 pieds quand les crues sont fortes & subites : ainsi c'est à 7 pieds 5 pouces de l'échelle du pont Royal , que l'on peut fixer l'état moyen de la rivière.

L'échelle du pont au Change, faite en 1769 , marque 17 pouces de plus que celle du pont de la Tournelle ; ainsi l'état moyen des eaux sur l'échelle du pont au Change , est de 6 pieds 3 pouces.

Mais les hauteurs extrêmes qui ont été observées sur l'échelle du pont Royal, sont 1 pied 10 pouces , & 25 pieds 3 pouces , dont le milieu est de 13 pieds 6 pouces $\frac{1}{2}$; & ce milieu que l'on a quelquefois appelé *hauteur moyenne*, surpasse de 6 pieds la hauteur qui doit réellement s'appeler *hauteur moyenne*. Cette différence fait voir la nécessité des considérations que je viens de rapporter.

En prenant ainsi un plus grand nombre d'années, & en choisissant celles où la quantité de pluie est d'environ 17 pouces , quantité moyenne suivant M. Cotte (*Traité de météorologie*, page 231, 312), on aura plus exactement l'état moyen de la rivière. Il est tombé en 1782 , 22 pouces d'eau (*Journal des Savans*, juin 1783), & la même quantité en 1787 (*Connoissance des Temps*, 1791, p. 360) ; ainsi la hauteur que j'ai trouvée est probablement un peu trop forte. Mais je me contente d'avoir montré l'erreur de la méthode employée jusqu'ici pour avoir la hauteur moyenne de la rivière. Il en est de même des hauteurs de la mer ; le niveau naturel n'est qu'à un tiers de l'intervalle qu'il y a des basses eaux à leur plus grande hauteur , comme je l'ai démontré dans mon *Traité du flux & reflux de la mer* (art. 117) ; il est donc plus bas que le point qui tient le milieu entre les deux hauteurs.

Au sujet des grandes hauteurs de l'eau en 1651, 1658, 1700, 1740, 1749, 1751, 1764, on peut voir M. Bonamy (*Mémoires de l'Acad. des Inscript.* tome XVII, page 675) ; M. Buache (*Mémoires de l'Academie des*

Sciences, 1741, 1742 & 1767, page 508), & M. Deparcieux (*Mém.* 1764, p. 457).

Si la méridienne de l'observatoire royal est de 149 pieds au-dessus du zéro de l'échelle du pont Royal, elle fera de $141 \frac{1}{2}$ pieds au-dessus des moyennes eaux de la Seine; & si l'on suppose avec M. Maraldi (*Mém.* 1703, p. 231), que la méridienne est 276 pieds au-dessus de l'Océan, la pente de la Seine fera de $134 \frac{1}{2}$ pieds. Cependant M. Shuckburgh, qui a fait le trajet de Paris jusqu'à la mer avec un excellent baromètre, ne jugeoit la pente que de 28 pieds (*Philos. transf.* 1777); mais M. le Monnier est persuadé qu'il l'a trop diminuée, & cela est très-vraisemblable.

La différence de niveau entre les deux échelles du pont Royal & du pont de la Tournelle, sur le mur de quai, a été déterminée en 1789 & en 1790 par M. de Prony, avec un excellent niveau. Il a trouvé que les sept pieds de l'échelle du pont de la Tournelle étoient de niveau avec 12 pieds 5 pouces de celle du pont Royal, en sorte que la différence réelle des deux échelles, est 5 pieds 5 pouces. M. Buache ne la croyoit que de 3 pieds 9 pouces. Le 31 janvier 1789, la rivière étoit à 9 pieds 11 pouces au pont Royal, ainsi elle auroit dû être à 4 pieds 6 pouces à la Tournelle; elle y étoit à 7 pieds 1 pouce : donc l'eau étoit plus haute au-dessus du pont de la Tournelle qu'au-dessous du pont Royal, de 2 pieds 7 pouces. Mais la pente ordinaire & générale de la Seine, sur une distance de 1300 toises, est de 1 pied 4 pouces, suivant les anciens nivellemens de Picard; il y avoit donc dans Paris 15 pouces de plus pour la retenue des ponts, ou pour la cataracte effective de l'eau, soutenue par ces obstacles; mais cette quantité varie de deux pieds par les différentes hauteurs & peut-être par les embarras de la rivière, plus ou moins considérables dans un temps que dans l'autre. Dans les moyennes eaux on trouve la pente totale depuis 2 pieds 3 pouces jusqu'à 3 pieds 3 pouces;

le milieu est 2 pieds 9 pouces, ce qui donne 1 pied 5 pouces pour la retenue des ponts, & 2 pieds 8 pouces pour la différence des hauteurs que marquent les deux échelles dans les moyennes eaux.

Il y a sur la seconde pile du pont de la Tournelle ; en partant du nord, & en aval, une autre échelle à laquelle M. de Prony avoit attaché son nivellement ; mais j'ai reconnu qu'elle marque 9 pouces de moins, & j'ai réduit l'opération à celle qui est en amont, sur la culée ou sur le mur de quai, au pied de l'escalier qui est au nord & à l'est, parce que c'est celle-ci où l'on marque tous les matins la hauteur de l'eau pour le bureau de la Ville, telle qu'on l'imprime dans le Journal de Paris. On avoit cessé le 7 novembre 1789, de marquer cette hauteur dans le Journal, mais l'interruption n'a duré que jusqu'au 3 décembre.



THÉORIE

DES SATELLITES DE JUPITER.

Par M. DE LA PLACE.

JE me propose dans cet ouvrage, de donner une théorie complète des perturbations qu'éprouvent les satellites de Jupiter, & de présenter aux astronomes, les ressources que l'analyse peut fournir pour perfectionner les Tables du mouvement de ces astres.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie analytique des mouvemens des Satellites de Jupiter.

I.

Équations générales du mouvement des Satellites de Jupiter.

SOIENT x, y, z , les trois coordonnées rectangles du premier satellite, l'origine des coordonnées étant au centre de gravité de Jupiter, que nous supposerons immobile. Soit r la distance du satellite à ce centre, & m sa masse. Que l'on marque successivement d'un trait, de deux traits & de trois traits, les mêmes quantités, relativement au second, au troisième & au quatrième satellite. Soit de plus, S la masse du Soleil; X, Y, Z , ses trois coordonnées rapportées au centre de Jupiter, & D sa distance à ce centre. Soit encore

$$\lambda = \frac{m'}{\sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}} + \frac{m''}{\sqrt{[(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2]}} + \frac{m'''}{\sqrt{[(x''' - x)^2 + (y''' - y)^2 + (z''' - z)^2]}} + \frac{S}{\sqrt{[(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]}}$$

Mém. 1788. I i

Soit $V + \frac{1}{r}$, la somme de toutes les molécules de Jupiter, divisées par leurs distances au centre du satellite, la masse de Jupiter étant prise pour l'unité. Soient enfin, $V' + \frac{1}{r'}$, $V'' + \frac{1}{r''}$, $V''' + \frac{1}{r'''}$, & $U + \frac{1}{D}$, ces mêmes sommes relativement aux satellites m' , m'' , m''' , & au Soleil. Cela posé.

La force dont le satellite m est animé parallèlement à l'axe des x , en vertu de l'attraction d'une molécule quelconque, se détermine en divisant la masse de cette molécule, par sa distance au centre du satellite m , en différenciant ensuite ce quotient par rapport à x , & divisant cette différence par ∂x . On aura donc, en observant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{x}{r^3} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right),$$

pour la force parallèle à x , qui résulte des attractions de Jupiter, du Soleil, & des trois autres satellites. Mais comme nous considérons le mouvement du satellite m , autour du centre de Jupiter; il faut retrancher de la force précédente, celle qui anime ce centre. Or, en vertu de l'égalité qui existe entre l'action & la réaction, la force accélératrice que communique au centre de gravité de Jupiter, l'action de m , étant multipliée par la masse de cette planète, est égale & directement contraire à la force accélératrice dont le satellite m est animé par l'action de toutes les molécules de Jupiter, multipliée par m ; cette dernière force décomposée parallèlement à l'axe des x , est $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{x}{r^3}$; on aura donc

$$= m. \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{x}{r^3} \right]$$

pour la force dont le centre de gravité de Jupiter est

sollicité parallèlement à l'axe des x , en vertu de l'action de m . Si dans cette quantité, l'on marque successivement d'un trait, de deux traits & de trois traits, les lettres m , V , x & r ; on aura les forces parallèles aux x , dont ce centre est animé par les attractions de m' , m'' , m''' . Enfin, la force parallèle aux x , dont il est animé par l'action du Soleil, est

$$- S. \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{X}{D^3} \right].$$

Si l'on retranche la somme de toutes ces forces qui sollicitent le centre de Jupiter, de la force

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{x}{r^3} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right),$$

on aura la force entière dont le satellite m est animé parallèlement à l'axe des x , dans son mouvement relatif autour de Jupiter. Cette force doit, par les principes

de dynamique, être égale à $\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}$, ∂t étant l'élément du temps que nous supposons constant; on aura donc

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial \partial x}{\partial t^2} + (1 + m) \cdot \left[\frac{x}{r^3} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \\ & + m' \cdot \left[\frac{x'}{r'^3} - \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \right) \right] + m'' \cdot \left[\frac{x''}{r''^3} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial V''}{\partial x''} \right) \right] + m''' \cdot \left[\frac{x'''}{r'''^3} - \left(\frac{\partial V'''}{\partial x'''} \right) \right] \\ & + S. \left[\frac{X}{D^3} - \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

On trouvera de la même manière :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + (1 + m) \cdot \left[\frac{y}{r^3} - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \\ & + m' \cdot \left[\frac{y'}{r'^3} - \left(\frac{\partial V'}{\partial y'} \right) \right] + m'' \cdot \left[\frac{y''}{r''^3} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial V''}{\partial y''} \right) \right] + m''' \cdot \left[\frac{y'''}{r'''^3} - \left(\frac{\partial V'''}{\partial y'''} \right) \right] \\ & + S. \left[\frac{Y}{D^3} - \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + (1 + m) \cdot \left[\frac{z}{r^3} - \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \\
&+ m' \cdot \left[\frac{z'}{r'^3} - \left(\frac{\partial V'}{\partial z'} \right) \right] + m'' \cdot \left[\frac{z''}{r''^3} \right. \\
&\left. - \left(\frac{\partial V''}{\partial z''} \right) \right] + m''' \cdot \left[\frac{z'''}{r'''^3} - \left(\frac{\partial V'''}{\partial z'''} \right) \right] \\
&+ S \cdot \left[\frac{Z}{D^3} - \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Si l'on fait, pour abrégé :

$$\begin{aligned}
R &= m' \cdot \left(\frac{x x' + y y' + z z'}{r'^3} \right) + m'' \cdot \left(\frac{x x'' + y y'' + z z''}{r''^3} \right) \\
&+ m''' \cdot \left(\frac{x x''' + y y''' + z z'''}{r'''^3} \right) + S \cdot \left(\frac{x Z + y Y + z Z}{D^3} \right) \\
&- \lambda - (1 + m) V \\
&- m' \cdot \left[x \cdot \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial V'}{\partial y'} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial V'}{\partial z'} \right) \right] \\
&- m'' \cdot \left[x \cdot \left(\frac{\partial V''}{\partial x''} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial V''}{\partial y''} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial V''}{\partial z''} \right) \right] \\
&- m''' \cdot \left[x \cdot \left(\frac{\partial V'''}{\partial x'''} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial V'''}{\partial y'''} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial V'''}{\partial z'''} \right) \right] \\
&- S \cdot \left[x \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right];
\end{aligned}$$

Les trois équations différentielles précédentes deviendront

$$\left. \begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \partial x}{\partial t^2} + (1 + m) \cdot \frac{x}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right); \\
0 &= \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + (1 + m) \cdot \frac{y}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right); \\
0 &= \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + (1 + m) \cdot \frac{z}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right);
\end{aligned} \right\} (A)$$

I. I.

Si l'on multiplie la première des équations (A) par ∂x , la seconde par ∂y , la troisième par ∂z , & qu'en suite on les ajoute, on aura :

$$0 = \frac{\partial x. \partial \partial x + \partial y. \partial \partial y + \partial z. \partial \partial z}{\partial r^2} + \left(\frac{1+m}{r^3} \right).$$

$$(x \partial x + y \partial y + z \partial z) + \partial x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + \partial y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + \partial z. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right); \text{ or on a, } x \partial x + y \partial y + z \partial z = r \partial r; \text{ de plus, on peut mettre la quantité } \partial x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + \partial y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + \partial z. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

sous cette forme dR , la caractéristique différentielle d , ne se rapportant qu'aux coordonnées x, y, z , du satellite m ; on aura donc en intégrant l'équation précédente,

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial r^2} - 2. \left(\frac{1+m}{r} \right) + \frac{1+m}{a} + 2 \int dR;$$

$\frac{1+m}{a}$ étant une constante arbitraire.

Si l'on multiplie la première des équations (A) par x , la seconde par y , la troisième par z , & que l'on ajoute leur somme à l'intégrale précédente; si l'on observe ensuite que

$$x. \partial \partial x + y. \partial \partial y + z. \partial \partial z + \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \frac{1}{2}. \partial^2. r^2;$$

on aura :

$$0 = \frac{\partial^2. r^2}{\partial r^2} - 2. \left(\frac{1+m}{r} \right) + 2. \left(\frac{1+m}{a} \right) + 4. \int dR + 2. \left[x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \right].$$

En supposant $R = 0$, dans cette équation, on aura la valeur de r , lorsque l'on fait abstraction de la figure de Jupiter, & de l'action du Soleil & des satellites. Dans ce cas, on fait que l'orbite est une ellipse dont a est le demi-grand axe. Soit Δr la variation de r , due à ce que R n'est pas nul; l'équation précédente donnera, en négligeant le carré de Δr ,

$$0 = \frac{\partial^2 (r \delta r)}{\partial s^2} + \frac{(1+m) \cdot r \delta r}{r^3} + 2 \cdot \int dR \\ + x \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

Les équations (A) étant multipliées respectivement par x , y , z , & étant ensuite ajoutées, donnent :

$$0 = \frac{x \cdot \partial \delta x + y \cdot \partial \delta y + z \cdot \partial \delta z}{\partial s^2} + \frac{1+m}{r} \\ + x \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

Si l'on nomme ∂v , l'angle infiniment petit, intercepté entre les deux rayons vecteurs r , & $r + \partial r$, on a

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial r^2} = \partial r^2 + r^2 \partial v^2;$$

$$x \partial \delta x + y \cdot \partial \delta y + z \cdot \partial \delta z = r \partial \delta r - r^2 \partial v^2;$$

on aura donc :

$$0 = \frac{r \partial \delta r - r^2 \partial v^2}{\partial r^2} + \frac{1+m}{r} + x \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) \\ + y \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

Dans le cas du mouvement elliptique où R est nul, cette équation devient

$$0 = \frac{r \partial \delta r - r^2 \partial v^2}{\partial r^2} + \frac{1+m}{r}.$$

Supposons que R augmente r & v , des quantités δr , & δv ; on aura, en négligeant les carrés & les produits de δr & de δv ,

$$0 = \frac{r \cdot \partial \delta r + \delta r \cdot \partial r - 2 r^2 \partial v \cdot \partial \delta v - 2 r \partial v^2 \cdot \delta r}{\partial r^2} \\ - \frac{(1+m) \cdot r \delta r}{r^3} + x \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) \\ + z \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

On a dans l'hypothèse elliptique,

$r^2 \partial v = \partial t. \sqrt{(1+m).a.(1-e^2)}$,
 a étant le demi-grand axe de l'orbite, & ae étant son excentricité; on a de plus, par ce qui précède, lorsque R est nul,

$$\frac{r \partial v^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \partial r}{\partial t^2} + \frac{1+m}{r^2};$$

l'équation différentielle précédente donnera ainsi,

$$\begin{aligned} 2 \partial \delta v. \sqrt{(1+m).a.(1-e^2)} &= \frac{r. \partial \partial \delta r - \delta r. \partial \partial r}{\partial t^2} \\ &- 3. \frac{(1+m).r \delta r}{r^3} + x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) \\ &+ z. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de $\frac{(1+m).r \delta r}{r^3}$, la valeur donnée par l'équation différentielle trouvée ci-dessus, en $r \delta r$, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{2. \partial \delta v}{\partial t} . \sqrt{(1+m).a.(1-e^2)} &= \frac{r. \partial \partial \delta r - \delta r. \partial \partial r}{\partial t^2} \\ &+ 3 \frac{\partial^2 (r \delta r)}{\partial t^2} + 6. \int dR + 4. \left[x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) \right. \\ &+ y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \left. \right]. \end{aligned}$$

Soit nt le moyen mouvement du satellite; on a par la théorie du mouvement elliptique,

$$n^2 = \frac{1+m}{a^3};$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{(1+m).a.(1-e^2)} = n a^2. \sqrt{(1-e^2)};$$

on a ensuite à fort peu-près, $n^2 a^3 = 1$; on aura donc en intégrant l'équation précédente,

$$\delta v = \frac{2r. \partial \delta r + \partial r. \delta r}{a^2. n \partial t} + 3a. \int n \delta t. R + 2a. \int n \delta t. \left[x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \right] \sqrt{(1-e^2)}$$

Si l'on prend pour le plan des coordonnées x & y ; celui de l'orbite primitive de m , z fera de l'ordre des forces perturbatrices; ainsi en négligeant le carré de ces forces, on pourra faire $z = 0$, dans tous les termes dépendans de R . Si l'on nomme ensuite v , l'angle que fait le rayon r , avec l'axe des x , on aura

$$x = r. \cos. v; y = r. \sin. v;$$

mais on a

$$dR = \partial x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + \partial y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right);$$

en substituant pour x & y , leurs valeurs précédentes, on aura

$$dR = \frac{\partial r}{r} \cdot [x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)] \\ + \partial v. [x. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) - y. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)];$$

on a ensuite

$$dR = \partial r. \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right) + \partial v. \left(\frac{\partial R}{\partial v} \right);$$

on aura donc, en comparant ces deux valeurs de dR ,

$$x. \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y. \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) = r. \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right);$$

l'équation différentielle en r & ∂r , & l'expression précédente de ∂v , deviendront ainsi,

$$0 = \frac{\partial \partial (r \partial r)}{\partial r^2} + \frac{(1+m). r \partial r}{r^3} + 2. \int dR + r. \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right); (1).$$

$$\partial v = \frac{2r. \partial \partial r + \partial r. \partial r}{a^2. n \partial s} + \frac{3 a. \sin \partial t. \int dR + 2 a. \sin \partial t. \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)}{\sqrt{(1 - e^2)}}; (2).$$

En joignant à ces deux équations, l'équation différentielle en z , de l'art. I.

$$0 = \frac{\partial \partial z}{\partial r^2} + \frac{(1+m). z}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right); (3).$$

On aura toutes les équations nécessaires pour déterminer les perturbations

les perturbations que le satellite m éprouve, lorsque l'on néglige les carrés & les produits des forces perturbatrices.

I I I.

CONSIDÉRONS présentement la valeur de R . On a vu dans l'art. I, que la fonction $V + \frac{1}{r}$, exprime la somme de toutes les molécules de Jupiter, divisées par leurs distances respectives au centre du satellite m . J'ai donné ailleurs l'expression générale de cette somme, dans le cas où Jupiter est un sphéroïde peu différent d'une sphère; je vais rappeler ici quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu sur cet objet.

Soit μ le cosinus de l'angle que le rayon r fait avec l'axe de rotation de Jupiter, axe qui, pour l'équilibre de cette planète, doit être un de ses axes principaux de rotation. Soit de plus ϖ , l'angle que fait le plan qui passe par cet axe & par le rayon r , avec le plan d'un méridien quelconque, que nous supposons passer par l'un des deux axes principaux situés dans le plan de l'équateur de Jupiter. On pourra représenter le rayon mené du centre de gravité de cette planète à sa surface, par la fonction

$$1 + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$$

$Y^{(i)}$ étant une fonction rationnelle & entière de l'ordre i , de μ , $\sqrt{(1 - \mu^2)}$. $\sin. \varpi$, & $\sqrt{(1 - \mu^2)}$. $\cos. \varpi$, assujettie à l'équation aux différences partielles,

$$0 = \left\{ \frac{\partial. (1 - \mu \mu). \left(\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} \right)}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left(\frac{\partial \partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2} \right)}{1 - \mu \mu} \\ + i. (i + 1). Y^{(i)}.$$

(Voyez les Mémoires de l'Académie pour l'année 1783, page 28). On aura ensuite :

Mém. 1788.

K k

$$V + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{[Y^{(2)} + \frac{1}{2}\varphi \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})]}{r^3} + \frac{Y^{(3)}}{r^4} \\ + \frac{Y^{(4)}}{r^5} + \&c.$$

φ étant le rapport de la force centrifuge à l'attraction de Jupiter, sur l'équateur de cette planète; (*Mémoires de l'Acad. pour l'année 1782, pages 153 & 181*); partant,

$$V = \frac{Y^{(2)} + \frac{1}{2}\varphi \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})}{r^3} + \frac{Y^{(3)}}{r^4} + \frac{Y^{(4)}}{r^5} + \&c.$$

Cette valeur de V se réduit à fort peu-près à son premier terme, si r est un peu considérable relativement au rayon du sphéroïde de Jupiter. D'ailleurs, si cette planète est un ellipsoïde de révolution, comme il est naturel de le supposer, on a $Y^{(3)} = 0$, $Y^{(4)} = 0$, &c. ce qui rend exacte la réduction de V à son premier terme; on peut donc même relativement au premier satellite, supposer

$$V = \frac{Y^{(2)} + \frac{1}{2}\varphi \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})}{r^3}.$$

La fonction $Y^{(2)}$ se réduit par les conditions de l'équilibre, à cette forme,

$$= \rho \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3}) + H \cdot (1 - \mu^2) \cdot \cos. 2\varpi.$$

(*Mémoires de l'Académie pour l'année 1783, page 30*).

Si Jupiter est un solide de révolution, H est nul; mais dans les cas où cette quantité seroit comparable à ρ , il est facile de s'assurer que son influence sur les mouvemens des satellites de Jupiter est insensible, à cause de la rapidité du mouvement de rotation de Jupiter; nous supposons donc $H = 0$, ce qui donne

$$V = - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi) \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})}{r^3}.$$

Les orbites des satellites étant fort peu inclinées à l'équateur de Jupiter, μ est une très-petite quantité dont on peut

négliger le carré ; on pourra donc dans les équations (1) & (2) de l'article précédent, supposer

$$V = \frac{\rho - \frac{1}{3} \varphi}{3 r^3}.$$

Si dans l'expression de V , on change r , successivement dans r' , r'' , r''' , & D , on aura les valeurs de V' , V'' , V''' & U .

Si le rayon de Jupiter diffère très-peu de celui d'un ellipsoïde de révolution, comme cela a lieu pour la Terre, ainsi que je l'ai fait voir dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1783 ; les quantités H , $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, &c. seront insensibles par rapport à ρ , & le rayon de Jupiter sera à très-peu-près égal à $1 - \rho$. ($\mu^2 - \frac{1}{3}$). Au pôle où $\mu = 1$, ce rayon sera $1 - \frac{2}{3} \rho$, & à l'équateur où $\mu = 0$, il sera égal à $1 + \frac{1}{3} \rho$; en sorte que

$\frac{\rho}{1 + \frac{1}{3} \rho}$ sera l'aplatissement de Jupiter, mesuré en parties du demi-diamètre de son équateur. En prenant donc pour unité, ce demi-diamètre, & en négligeant la quantité $-\frac{1}{3} \rho^2$, ρ exprimera l'aplatissement de Jupiter. Il est assez remarquable que la valeur de V soit entièrement indépendante de la constitution intérieure de Jupiter. Comme cette valeur a une grande influence sur les mouvemens des nœuds & des aphélies des orbites des satellites, ces mouvemens doivent donner l'aplatissement de Jupiter, avec une plus grande précision que les mesures astronomiques les plus exactes.

Représentons maintenant par v' , v'' , v''' , Π , les longitudes du second, du troisième & du quatrième satellite, & du Soleil, ces longitudes étant comptées de l'axe des x ; on aura, en négligeant les carrés des inclinaisons de leurs orbites sur celle de m ,

$$x' = r'. \cos. v' ; x'' = r''. \cos. v'' ; x''' = r'''. \cos. v''' ;$$

$$X = D. \cos. \Pi ;$$

$$y' = r'. \sin. v' ; y'' = r''. \sin. v'' ; y''' = r'''. \sin. v''' ;$$

$$Y = D. \sin. \Pi ;$$

K k ij

L'expression de R , de l'article I. deviendra ainsi, en

négligeant les termes multipliés par $\frac{m' \cdot (p - \frac{1}{2} \phi)}{r^3}$,

$\frac{m'' \cdot (p - \frac{1}{2} \phi)}{r'^3}$, $\frac{m''' \cdot (p - \frac{1}{2} \phi)}{r''^3}$, & $\frac{S r \cdot (p - \frac{1}{2} \phi)}{D^3}$,

comme étant insensibles à cause de la petitesse de $p - \frac{1}{2} \phi$,

$$R = - \frac{(1 + m) \cdot (p - \frac{1}{2} \phi)}{3 r^3} + \frac{m' \cdot r}{r'^3} \cdot \cos. (v' - v) \\ + \frac{m'' \cdot r}{r''^3} \cos. (v'' - v) + \frac{m''' \cdot r}{r'''^3} \cos. (v''' - v) \\ + \frac{S r}{D^3} \cdot \cos. (\Pi - v)$$

$$\frac{m'}{\sqrt{[r^3 - 2 r r' \cos. (v' - v) + r'^3]}} - \frac{m''}{\sqrt{[r^3 - 2 r r'' \cos. (v'' - v) + r''^3]}} \\ - \frac{m'''}{\sqrt{[r^3 - 2 r r''' \cos. (v''' - v) + r'''^3]}} - \frac{S}{\sqrt{[r^3 - 2 r D \cos. (\Pi - v) + D^3]}}$$

I V.

*Des inégalités du mouvement des Satellites, indépendantes
des excentricités & des inclinaisons des orbites.*

REPRENONS maintenant l'équation différentielle (1)
de l'article II.

$$0 = \frac{\partial \partial_r (r \partial r)}{\partial r^2} + \frac{(1 + m) \cdot r \partial r}{r^3} + 2 \cdot f d R + r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right); (1)$$

Son intégration introduira deux constantes arbitraires qui rentrent dans celles du mouvement elliptique, & auxquelles on peut par cette raison, se dispenser d'avoir égard. Cependant l'excentricité de l'orbite étant fort petite, on pourra faire usage de cette équation différentielle, pour déterminer la partie elliptique du rayon vecteur qui en dépend; mais alors, il faut conserver

tous les termes dans lesquels $r \delta r$ est multiplié par des constantes dépendantes même des forces perturbatrices, parce que ces termes déterminent le mouvement de l'aphélie.

Si l'on néglige le carré de l'excentricité de l'orbite, la partie constante du rayon r , se réduit dans l'hypothèse elliptique, au demi-grand axe a . Soit δa le terme constant que les forces perturbatrices ajoutent au rayon r , l'équation précédente deviendra ainsi,

$$0 = \frac{\partial^2 (r \delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1+m)}{a^3} \cdot \left(1 - \frac{3 \delta a}{a}\right) \cdot r \delta r \\ + 2 \int dR + r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right).$$

En ne considérant que les termes dépendans de la figure de Jupiter, on a

$$R = - \frac{(1+m) \cdot (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{3 r^3};$$

d'où l'on tire

$$\int dR = R; \quad r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = - 3 R;$$

partant

$$2 \int dR + r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = - R = \frac{(1+m) \cdot (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{3 r^3}.$$

En substituant $a^2 + 2 r \delta r$, au lieu de r^2 , ou, ce qui revient au même, $a + \frac{r \delta r}{a}$, au lieu de r , on aura,

$$2 \int dR + r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{(1+m) \cdot (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{3 a^3} \\ - (1+m) \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^3} \cdot r \delta r.$$

Si l'on ne considère que les termes dépendans de l'action du second satellite, on a :

$$R = \frac{m' r}{r'^2} \cos. (v' - v) - m' \cdot [r^2 - 2 r r' \cos. (v' - v) + r'^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Supposons que la fonction $[r^2 - 2rr'. \cos. (v' - v) + r'^2]^{-\frac{1}{2}}$, développée suivant les cosinus de $v' - v$ & de ses multiples, soit

$$\frac{1}{2}. B^{(0)} + B^{(1)}. \cos. (v' - v) + B^{(2)}. \cos. 2 (v' - v) + B^{(3)}. \cos. 3 (v' - v) + \&c.$$

Nommons $nt + \epsilon$, & $n't + \epsilon'$, les valeurs moyennes de v & de v' , c'est-à-dire, les longitudes moyennes de v & de v' , comptées de l'axe des x ; en substituant au lieu de v & de v' , ces valeurs dans l'expression de R , & en y changeant r & r' , dans a & a' , on aura

$$a \int dR = \frac{2K}{a} - \frac{2nm'}{n-n'} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left(B^{(1)} - \frac{a}{a'^2} \right). \cos. (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ & + B^{(2)}. \cos. 2 (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ & + B^{(3)}. \cos. 3 (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ & + \&c. \end{aligned} \right\}$$

$\frac{K}{a}$ étant une constante ajoutée à l'intégrale $\int dR$. On aura ensuite,

$$r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right) = -m' a \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) \right. \\ & + \left[\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) - \frac{1}{a'^2} \right]. \cos. (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ & + \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right). \cos. 2 (n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ & + \&c. \end{aligned} \right\}$$

$B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. étant fonctions de a & de a' , dans ces deux formules.

Nous étant proposés de conserver les termes dans lesquels r & r' est multiplié par une constante, nous devons ajouter aux seconds membres de ces formules, les termes de ce genre, que renferment $\int dR$, & $r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)$. Or si

dans le terme $-\frac{m'}{2} \cdot B^{(0)}$, de R , on substitue $a + \frac{r \delta r}{a}$, au lieu de r , il en résultera le terme $-m' \cdot \frac{r \delta r}{2a} \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right)$. la fonction $2 \int dR$, contient donc le terme $-m' \cdot \frac{r \delta r}{a} \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right)$. En substituant pareillement $a + \frac{r \delta r}{a}$, au lieu de r , dans la fonction $r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)$, on voit qu'elle contient le terme $-\frac{m' \cdot r \delta r}{2a} \cdot \left[\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) + a \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(0)}}{\partial a^2} \right) \right]$.

Cela posé, si l'on rassemble tous ces termes dans l'équation différentielle (1), & qu'on la divise par a^2 ; si l'on observe de plus que l'on a $n^2 = \frac{1+m}{a^3}$, & si, pour abrégé, on suppose

$$N^2 = n^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{3 \delta a}{a} - \frac{(\rho - \frac{1}{2} \phi)}{a^2} - \frac{m' \cdot a^2}{2} \left[3 \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) + a \left(\frac{\partial \partial B^{(0)}}{\partial a^2} \right) \right] \right\};$$

on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \partial \cdot (r \delta r)}{a^2 \cdot \partial t^2} + N^2 \cdot \frac{r \delta r}{a^2} + 2 n^2 K \\ &+ \frac{n^2 \cdot (\rho - \frac{1}{2} \phi)}{3 a^2} - \frac{m' \cdot n^2 a^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) \\ &- m' \cdot n^2 \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) - \frac{a^2}{a^2} + \frac{2 n}{n - n'} \cdot \right. \\ &\quad \left. (a B^{(1)} - \frac{a^2}{a^2}) \right] \cdot \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - m' \cdot n^2 \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2 \pi}{n - n'} \cdot a B^{(2)} \right] \\
& \quad \text{cof. } 2 \cdot (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\
& - m' \cdot n^2 \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(3)}}{\partial a} \right) + \frac{2 \pi}{n - n'} \cdot a B^{(3)} \right] \\
& \quad \text{cof. } 3 \cdot (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\
& - \&c.
\end{aligned}$$

L'action des autres fatellites, & celle du Soleil, ne feront qu'ajouter à cette équation, & à l'expression de N^2 , des termes semblables à ceux que produit l'action du fatellite m' ; il sera facile de les déterminer par analogie; ainsi nous en ferons abstraction ici, pour simplifier le calcul.

Si l'on intègre l'équation précédente, sans y ajouter de constantes, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{r^{\Delta} r}{a^2} &= - \frac{n^2}{N^2} \cdot \left[2 K + \frac{(p - \frac{1}{4} \varphi)}{3 a^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m' a^2}{2} \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) \right] \\
&\quad - \frac{m' \cdot n^2}{(n - n')^2 - N^2} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) - \frac{a^2}{a^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 \pi}{n - n'} \cdot (a B^{(1)} - \frac{a^2}{a^2}) \right] \cdot \text{cof. } (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\
&\quad - \frac{m' \cdot n^2}{4 \cdot (n - n')^2 - N^2} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2 \pi}{n - n'} \cdot a B^{(2)} \right] \\
&\quad \quad \text{cof. } 2 \cdot (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\
&\quad - \frac{m' \cdot n^2}{9 \cdot (n - n')^2 - N^2} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(3)}}{\partial a} \right) + \frac{2 \pi}{n - n'} \cdot a B^{(3)} \right] \\
&\quad \quad \text{cof. } 3 \cdot (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\
& - \&c.
\end{aligned}$$

La partie constante de cette expression, est ce que nous avons désigné ci-dessus par $\frac{\Delta a}{a}$; on aura donc, en observant que N^2 diffère extrêmement peu de n^2 ,

$$\frac{\delta a}{a} = -2K - \frac{(p - \frac{1}{2}\varphi)}{3a^2} + \frac{m'.a^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right).$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes de $\int dR$, $r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)$, & de $\frac{r \delta r}{a^2}$, dans l'expression de δv , donnée par la formule (2) de l'article I I; si l'on néglige les excentricités, & qu'ainsi l'on suppose $r = a$; on aura, après toutes les réductions,

$$\delta v = nt \cdot \left[3K + \frac{(1+m) \cdot (p - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} - m'.a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) \right]$$

$$\frac{-n.m'}{n-n'} \cdot \left\{ \frac{n}{n-n'} \cdot \left(aB^{(1)} - \frac{a^2}{a'^2} \right) + \frac{2N^2}{(n-n')^2 - N^2} \left[a^2 \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) - \frac{a^2}{a'^2} + \frac{2n}{n-n'} \cdot \left(aB^{(1)} - \frac{a^2}{a'^2} \right) \right] \right\}.$$

$$\text{fin. } (n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$

$$\frac{-n.m'}{2 \cdot (n-n')} \cdot \left\{ \frac{n}{n-n'} \cdot aB^{(2)} + \frac{2N^2}{4 \cdot (n-n')^2 - N^2} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot aB^{(2)} \right] \right\}.$$

$$\text{fin. } 2 \cdot (n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$

$$\frac{-n.m'}{3 \cdot (n-n')} \cdot \left\{ \frac{n}{n-n'} \cdot aB^{(3)} + \frac{2N^2}{9 \cdot (n-n')^2 - N^2} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(3)}}{\partial a} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot aB^{(3)} \right] \right\}.$$

$$\text{fin. } 3 \cdot (n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$

— &c.

Cette expression de δv sera facile à réduire en nombres, lorsque l'on aura déterminé numériquement la valeur précédente de $\frac{r \delta r}{a^2}$.

nt étant supposé représenter le moyen mouvement du satellite m , son coefficient dans la valeur de δv , doit être nul, cequi détermine la constante K ; on aura donc

$$K = - \frac{(1+m) \cdot (p - \frac{1}{2}\varphi)}{3a^2} + \frac{1}{2} \cdot m'.a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right).$$

En substituant cette valeur de K , & celle de $\frac{\delta a}{a}$, dans

l'expression de N^2 , elle deviendra

$$N^2 = n^2 \cdot \left\{ 1 - 2 \cdot \frac{(1+m) \cdot (p - \frac{1}{2}\phi)}{a^2} - m' a^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) + \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 B^{(0)}}{\partial a^2} \right) \right] \right\}.$$

On aura les expressions de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$, $\delta v'$; $\frac{r'' \delta r''}{a''^2}$, $\delta v''$;

$\frac{r''' \delta r'''}{a'''^2}$, $\delta v'''$; en changeant dans les valeurs précédentes

de $\frac{r \delta r}{a^2}$, & de δv , les quantités relatives au premier satellite, dans les quantités semblables relatives au second, au troisième & au quatrième satellite, & réciproquement,

Les rapports qu'ont entr'eux les moyens mouvemens des trois premiers satellites, donnent des valeurs considérables à quelques-uns des termes de ces expressions; ces termes méritent une attention particulière, en ce qu'ils sont la source des principales inégalités observées dans les mouvemens des deux premiers satellites.

V.

LE moyen mouvement du premier satellite de Jupiter, est à fort peu-près double de celui du second, qui lui-même est à très-peu-près double du moyen mouvement du troisième satellite. Il suit de-là que le terme de l'expression de $\frac{r \delta r}{a^2}$, qui dépend de l'angle $2 n' t - 2 n t + 2 \varepsilon - 2 \varepsilon$, doit devenir fort grand par son diviseur $4 (n - n')^2 - N^2$, ou $(2n - 2n' + N)$. $(2n - 2n' - N)$; car N & $2n'$ étant fort peu différens de n , le facteur $2n - 2n' - N$ est très-petit, & donne une valeur considérable au terme dont il s'agit. On voit en même temps, la nécessité de déterminer N avec précision, comme nous l'avons fait; parce que la différence d'avec n , quoique très-petite, devient sensible dans le facteur $2n - 2n' - N$. Le terme $- 2 (1+m) \cdot n^2 \cdot \frac{(p - \frac{1}{2}\phi)}{a^2}$,

de l'expression de N^2 , qui dépend de la figure de Jupiter, surpasse considérablement ceux qui dépendent des actions des satellites, comme on le verra ci-après; nous pouvons

donc supposer sans erreur sensible, $N = n \cdot [1 - \frac{(p - \frac{1}{2}q)}{a^2}]$,

dans le facteur $2n - 2n' - N$, & faire $n = N$ dans tous les autres termes.

La partie de δv , qui dépend de l'angle $2nt - 2n't + 2\epsilon' - 2\epsilon$, est pareillement fort considérable, à cause du diviseur $(2n - 2n' - N)$. $(2n - 2n' + N)$. En supposant donc

$$F = a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a B^{(2)};$$

en faisant ensuite $N = n$, & $2n' = n$, dans le facteur $2n - 2n' + N$; on aura, en n'ayant égard

qu'à la partie de $\frac{r \delta r}{a^2}$, qui a pour diviseur $2n - 2n' - N$;

$$\frac{r \cdot \delta r}{a^2} = - \frac{n \cdot m' \cdot F}{2 \cdot (2n - 2n' - N)} \cdot \cos. 2(nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

On aura dans les mêmes suppositions,

$$\delta v = \frac{n \cdot m' \cdot F}{2n - 2n' - N} \cdot \sin. 2(nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

Cette partie de δv , est la seule inégalité sensible dans le mouvement du premier satellite, & l'observation est en cela conforme à la théorie, puisqu'elle n'indique que cette inégalité.

Si dans la théorie du second satellite, on désigne par N' , la quantité qui correspond à N , dans la théorie du premier; il est aisé de voir que l'expression de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ renfermera le terme

$$\frac{-m \cdot n'^2}{(2n - n')^2 - N'^2} \cdot \left[a'^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) - \frac{a'^2}{a^2} + \frac{2n'}{n' - n} \cdot (a' B^{(1)} - \frac{a'^2}{a^2}) \right] \cdot \cos. (nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

Le diviseur $(n - n')^2 - N'^2$ est égal à $(n - n' - N') \cdot (n - n' + N')$; or N' étant fort peu différent de n' , & n étant peu différent de $2 n'$, le facteur $n - n' - N'$ est très-petit, ce qui donne au terme précédent, une valeur considérable; en supposant donc

$$G = a'^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) - \frac{a'^2}{a^2} - \frac{2 n'}{n - n'} \cdot (a' B^{(1)} - \frac{a'^2}{a^2});$$

en faisant ensuite $n = 2 n'$, & $N' = n'$, dans le facteur $n - n' + N'$; on aura, en n'ayant égard

qu'à la partie de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$, qui a pour diviseur $n - n' - N'$, & qui dépend de l'action du premier satellite,

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \frac{-n' \cdot m \cdot G}{2 \cdot (n - n' - N')} \cdot \cos. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon').$$

on aura dans les mêmes suppositions,

$$\delta v' = \frac{n' \cdot m \cdot G}{n - n' - N'} \cdot \sin. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon').$$

Ces valeurs ne sont relatives qu'à l'action du premier satellite; l'action du troisième produit encore des termes sensibles dans les expressions de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$, & de $\delta v'$.

En effet, le mouvement du second satellite étant à fort peu-près double de celui du troisième, il doit en résulter dans ces expressions, des termes analogues à ceux que l'action du second satellite produit dans les valeurs de

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2}, \text{ \& de } \delta v. \text{ Nommons } B'^{(0)}, B'^{(1)}, B'^{(2)}, \text{ \&c.}$$

relativement au second & au troisième satellite, ce que nous avons désigné par $B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)}, \text{ \&c.}$ relativement au premier & au second; supposons ensuite.

$$F = a'^2 \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'} \right) + \frac{2 n'}{n - n''} \cdot a' \cdot B'^{(2)};$$

nous aurons par l'action du troisième satellite,

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \frac{-n'. m''. F'}{2. (2n' - 2n'' - N')} \cdot \cos. 2 (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'').$$

$$\delta v' = \frac{n'. m''. F'}{2n' - 2n'' - N'} \cdot \sin. 2 (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'').$$

En réunissant ces valeurs aux précédentes, on aura tous les termes sensibles des expressions de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ & de $\delta v'$.

Un rapport très-remarquable qui existe entre les moyens mouvemens des trois premiers satellites, réunit en un seul terme, les deux termes des expressions de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ & de $\delta v'$, dûs aux actions du premier & du troisième satellites. Nous avons observé que le moyen mouvement du premier satellite est à peu-près double de celui du second, qui lui-même est double à peu-près du moyen mouvement du troisième satellite. Il en résulte que le moyen mouvement du premier satellite plus deux fois celui du troisième, est à peu-près égal à trois fois celui du second, ou, ce qui revient au même, que l'on a à peu-près, $n + 2n'' = 3n'$. Cette égalité est tellement approchée, que depuis plus d'un siècle, les observations n'y ont fait apercevoir aucune différence sensible, en sorte que l'on peut rejeter sur les erreurs des Tables, la différence très-petite qu'elles donnent à cet égard. Nous pouvons donc supposer, au moins dans l'espace d'un siècle, $n + 2n'' = 3n'$. Nous verrons dans la suite que cette égalité est rigoureuse.

Les observations donnent encore, à très-peu-près, depuis plus d'un siècle, la longitude moyenne du premier satellite, plus deux fois celle du troisième, moins trois fois celle du second, égale à 180° ; en sorte que dans l'intervalle d'un siècle, on peut supposer

$$n t - 3n' t + 2n'' t + \epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'' = 180^\circ;$$

& par conséquent

$$2 n' t - 2 n'' t + 2 \epsilon' - 2 \epsilon'' = n t - n' t + \epsilon - \epsilon' - 180^d.$$

Nous verrons encore dans la suite que ces égalités sont rigoureuses. Les termes de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ & de $\delta v'$, qui dépendent de l'action du troisième satellite, deviennent ainsi,

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \frac{n'. m'. F'}{2 (n - n' - N')} \cdot \cos. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon').$$

$$\delta v' = \frac{- n'. m'. F'}{n - n' - N'} \cdot \sin. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon').$$

Si l'on réunit ces valeurs à celles qui dépendent de l'action du premier satellite, on aura

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \frac{n'}{2. (n - n' - N')} \cdot [m'' F' - m G] \cdot \cos. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon').$$

$$\delta v' = \frac{- n'}{n - n' - N'} \cdot [m'' F' - m G] \cdot \sin. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon').$$

L'action du second satellite produit dans la théorie du troisième, des termes analogues à ceux que l'action du premier produit dans la théorie du second; en faisant donc

$$G' = a''^2 \cdot \left(\frac{\partial B'^{(1)}}{\partial a''} \right) - \frac{a''^2}{a'^2} - \frac{2 n''}{n' - n''} \cdot [a'' \cdot B'^{(1)} - \frac{a''^2}{a'^2}];$$

on aura

$$\frac{r'' \delta r''}{a''^2} = \frac{- n''. m'. G'}{2. (n' - n'' - N'')} \cdot \cos. (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'').$$

$$\delta v'' = \frac{n''. m'. G'}{n' - n'' - N''} \cdot \sin. (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'').$$

Les valeurs de $\frac{r'' \delta r''}{a''^2}$, & de $\delta v''$, peuvent recevoir encore quelques termes sensibles, de l'action du quatrième satellite; mais son moyen mouvement étant sensiblement moindre que la moitié de celui du troisième satellite,

ces termes doivent être peu considérables ; nous y aurons cependant égard dans la suite.

Considérons présentement la loi des inégalités précédentes, dans les éclipses des satellites. Pour cela, nous donnerons aux valeurs précédentes de δv , $\delta v'$ & $\delta v''$, les formes suivantes :

$$\delta v = (I). \sin. 2 (nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

$$\delta v' = - (II) \sin. (nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

$$\delta v'' = - (III). \sin. (n't - n''t + \epsilon' - \epsilon'').$$

Les coefficients (I), (II), (III), étant positifs, comme il résulte de ce que l'on verra ci-après. Au lieu de rapporter les angles $nt + \epsilon$, $n't + \epsilon'$, $n''t + \epsilon''$, à une ligne fixe, nous pouvons les rapporter à un axe mobile, parce que la position de cet axe disparoît dans les angles $2 (nt - n't + \epsilon - \epsilon')$, $nt - n't + \epsilon - \epsilon'$, & $n't - n''t + \epsilon' - \epsilon''$. Concevons que cet axe mobile soit le rayon vecteur de Jupiter supposé mù uniformément autour du Soleil ; dans ce cas, les angles nt , $n't$, $n''t$, seront les moyens mouvemens synodiques des trois premiers satellites. Concevons de plus, que les angles ϵ & ϵ' soient nuls, c'est-à-dire, qu'à l'origine de t , les deux premiers satellites aient été en conjonction ; l'équation

$nt - 3 n't + 2 n''t + \epsilon - 3 \epsilon' + 2 \epsilon'' = 180^d$,
donnera $\epsilon'' = 90^d$; les expressions de δv , $\delta v'$, $\delta v''$, deviendront ainsi,

$$\delta v = (I). \sin. 2 (nt - n't).$$

$$\delta v' = - (II). \sin. (nt - n't).$$

$$\delta v'' = (III). \cos. (n't - n''t).$$

Dans les éclipses du premier satellite, au moment de la conjonction moyenne, nt est nul ou multiple de 360^d ; soit donc $2n - 2n' = n + \omega$, ou $n - 2n' = \omega$, on aura,

$$\Delta v = (I). \sin. \omega t.$$

Dans les éclipses du second satellite, à l'instant de la conjonction moyenne, $n' t$ est nul ou multiple de 360° ; on aura donc alors

$$\Delta v' = \text{---} (II). \sin. \omega t.$$

Enfin, dans les éclipses du troisième satellite, à l'instant de la conjonction moyenne, $n'' t$ est nul ou multiple de 360° ; on aura donc alors, en vertu de l'équation $n - 2 n' = n' - 2 n''$,

$$\Delta v'' = (III). \cos. \omega t.$$

On voit ainsi que les valeurs de Δv , $\Delta v'$ & $\Delta v''$, dans les éclipses des satellites, dépendent du même angle ωt . La période de ces valeurs est par conséquent la même, & égale à la durée de la révolution synodique du premier satellite, multipliée par $\frac{n}{n - 2 n'}$, $n t$ & $n' t$ étant ici

les moyens mouvemens synodiques des deux premiers satellites. En substituant pour n & n' leurs valeurs, on trouve que cette période est de $437^i 15^h 12'$. Tous ces résultats sont parfaitement conformes aux observations qui ont fait reconnoître les inégalités précédentes, avant qu'elles aient été indiquées par la théorie.

V I.

LA détermination des inégalités précédentes n'a de difficulté, que celle de la formation des quantités $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. & de leurs différences. J'ai donné des formules pour cet objet, dans les *Mémoires de l'Académ. pour l'année 1785*, pag. 64 & suivantes; je vais rappeler ici les principales.

Soit $\frac{a}{a'} = \alpha$, & supposons que l'on ait

$$(1 - 2 \alpha. \cos. \theta + \alpha^2)^{-s} = \frac{1}{2}. b_s^{(0)} + b_s^{(1)}. \cos. \theta + b_s^{(2)}. \cos. 2 \theta + b_s^{(3)}. \cos. 3 \theta + \&c.$$

on aura

on aura généralement

$$b_s^{(i)} = \frac{(i-1) \cdot (1+\alpha^2) \cdot b_s^{(i-1)} - (i+s-2) \cdot \alpha \cdot b_s^{(i-2)}}{(i-s) \cdot \alpha};$$

$$b_{s+1}^{(i)} = \frac{\frac{(i+s)}{s} (1+\alpha^2) \cdot b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{s} \cdot \alpha \cdot b_s^{(i+1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

On pourra, au moyen de ces formules, déterminer

$b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$, &c. $b_{s+1}^{(0)}$, &c. lorsque $b_s^{(0)}$ & $b_s^{(1)}$ seront connus.

On a ensuite :

$$\frac{\partial b_s^{(i)}}{\partial \alpha} = \left[\frac{i + \frac{(i+2s) \cdot \alpha^2}{\alpha \cdot (1-\alpha^2)}}{1} \right] \cdot b_s^{(i)} - \frac{2 \cdot (i-s+1)}{1-\alpha^2} \cdot b_s^{(i+1)}.$$

Cette équation différenciée donnera les différences secondes de $b_s^{(i)}$. Il ne s'agit donc que de déterminer $b_s^{(0)}$ & $b_s^{(1)}$.

Dans la théorie des satellites, $s = \frac{1}{2}$; & l'on aura de cette manière, les valeurs de $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$, & de $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$. On déterminera d'abord les quantités $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ & $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, au moyen des suites.

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2 \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \alpha^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \alpha^6 \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \cdot \alpha^8 + \&c. \right].$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -2 \alpha \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^4 \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^6 - \&c. \right].$$

Ces deux suites sont fort convergentes, & il suffit dans tous les cas, d'en prendre les dix ou onze premiers termes. Lorsque l'on aura ainsi déterminé $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ & $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$,

on aura $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, & $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, au moyen des formules :

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{(1 + \alpha^2) \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + 6 \alpha \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{2 \alpha \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + 3 \cdot (1 + \alpha^2) \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Maintenant, on a généralement :

$$a \cdot B^{(i)} = \alpha b_{\frac{1}{2}}^{(i)}; \quad a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) = \alpha^2 \cdot \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{\partial \alpha};$$

$$a^3 \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a^2} \right) = \alpha^3 \cdot \frac{\partial \partial b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{\partial \alpha^2}; \quad \&c.$$

Quant aux différences partielles de $B^{(i)}$ prises relativement à a' , on observera que $B^{(i)}$ est une fonction homogène de a & de a' , de la dimension — 1; or on a par la nature de ce genre de fonctions,

$$a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a'} \right) = - B^{(i)} - a \cdot \left(\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a} \right);$$

d'où il est aisé de conclure les valeurs de $a a'$,

$$\left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a \cdot \partial a'} \right), \quad a'^2 \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a'^2} \right), \quad \&c. \quad \text{on pourra donc}$$

ainsi déterminer les valeurs de $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. & de leurs différences prises, soit relativement à a , soit relativement à a' .

V I I.

Des inégalités du mouvement des Satellites, dépendantes des excentricités des orbites.

CONSIDÉRONS présentement les parties du rayon vecteur & de la longitude des satellites, qui dépendent

des excentricités des orbites. Pour cela nous reprendrons l'équation (1) de l'article II, en la mettant sous cette forme :

$$0 = \frac{\partial \partial (r \delta r)}{a^2 \cdot \partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot r \delta r}{a^3 \cdot r^3} + \frac{2 \int d R + r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)}{a^2}.$$

Les termes dans lesquels $r \delta r$ est multiplié par une constante, & ceux qui dépendent du sinus & du cosinus de l'angle $n t + \epsilon$, méritent une attention particulière, en ce qu'ils déterminent les variations de l'aphélie & de l'excentricité de l'orbite; nous allons donc les discuter avec soin. Les termes dans lesquels $r \delta r$ est multiplié par une constante, ont été déjà déterminés dans l'art. IV; pour avoir ceux qui dépendent du sinus & du cosinus de l'angle $n t + \epsilon$, considérons la partie

$$\frac{m' \cdot r \cdot \cos. (v' - v)}{r'^2} = m' \cdot B^{(1)} \cdot \cos. (v' - v)$$

de la fonction R ; si l'on y substitue $a' + \frac{r' \delta r'}{a'}$, au lieu de r' , $\delta r'$ étant ici la partie de r' qui dépend de l'excentricité de l'orbite du satellite m' , cette substitution produira la quantité

$$= \frac{m' \cdot r' \delta r'}{a'^2} \cdot \left[\frac{2 a}{a'^2} + a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] \cdot \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon);$$

or, en nommant ϵ' l'excentricité de l'orbite de m' , & ϖ' la longitude de son aphélie, on a, comme l'on fait, aux quantités près de l'ordre ϵ'^2

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \epsilon' \cdot \cos. (n' t + \epsilon' - \varpi');$$

la quantité précédente donnera par conséquent un terme dépendant du cosinus de l'angle $n t + \epsilon - \varpi'$; nous ne conserverons ici que ce terme.

Dans l'orbite elliptique, v' est égal à $n' t + \epsilon' - 2 \epsilon' \cdot \sin. (n' t + \epsilon' - \varpi')$, ou ce qui revient

au même, à $n' t + \epsilon' + \frac{2 \partial \cdot r' \partial^2 r'}{a'^2 \cdot n' \partial t}$; en substituant cette valeur dans la fonction

$\frac{m' r}{r'^2} \cos. (v' - v) - m' \cdot B^{(1)} \cdot \cos. (v' - v)$;
il en résultera le terme

$-\frac{2 m' \cdot \partial \cdot r' \partial^2 r'}{a'^2 \cdot n' \partial t} \cdot \left[\frac{a}{a'^2} - B^{(1)} \right] \cdot \sin. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon)$;
nous ne retiendrons encore dans ce terme, que la partie qui dépend de l'angle $n t + \epsilon - \omega'$.

On s'assurera facilement que les termes précédens sont les seuls qui dans le développement de la fonction R , dépendent du sinus & du cosinus de l'angle $n t + \epsilon$, du moins en n'ayant égard qu'aux premières puissances des excentricités; de plus, on a évidemment, en n'ayant égard qu'à ces termes, $\int d R = R$; partant

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int d R + r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right) &= -\frac{m' \cdot r' \partial^2 r'}{a'^2} \cdot \left[\frac{6 a}{a'^2} + 2 a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right. \\ &\quad \left. + a a' \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a \cdot \partial a'} \right) \right] \cdot \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\ &= -\frac{2 m' \cdot \partial \cdot r' \partial^2 r'}{a'^2 \cdot n' \partial t} \cdot \left[\frac{3 a}{a'^2} - 2 B^{(1)} - a \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) \right] \cdot \\ &\quad \sin. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon); \end{aligned}$$

l'équation différentielle en $\frac{r \partial^2 r}{a^2}$, deviendra ainsi, en n'y considérant que les termes multipliés par $r \partial^2 r$, & par le sinus & le cosinus de l'angle $n t + \epsilon$, & en y substituant n^2 , au lieu de $\frac{r}{a^3}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 \cdot (r \partial^2 r)}{a'^2 \cdot n' \partial t} + N^2 \cdot \frac{r \partial^2 r}{a^2} - m' n^2 \cdot \frac{r' \partial^2 r'}{a'^2} \cdot \\ &\quad \left[\frac{6 a^2}{a'^2} + 2 a a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) + a^2 a' \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a \cdot \partial a'} \right) \right] \cdot \\ &\quad \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \end{aligned}$$

$$- \frac{2 m' n^2 \cdot \partial \cdot r' \partial r'}{a'^2 \cdot n' \partial t} : \left[\frac{3 a^2}{a'^2} - 2 a B^{(1)} - a^2 \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) \right] \cdot \sin. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon).$$

Supposons

$$\frac{r \partial r}{a^2} = h \cdot \cos. (n t + \epsilon - g t - \Gamma);$$

$$\frac{r' \partial r'}{a'^2} = h' \cdot \cos. (n' t + \epsilon' - g t - \Gamma);$$

g étant un très-petit coefficient dépendant des forces perturbatrices. En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle précédente, & en négligeant les carrés & les produits des forces perturbatrices, la comparaison des coefficients de $\cos. (n t + \epsilon - g t - \Gamma)$, donnera en mettant pour N^2 , la valeur trouvée dans l'article IV.

$$\begin{aligned} 0 = h \left\{ \frac{g}{n} - \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} - \frac{m'}{2} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \cdot a^3 \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(0)}}{\partial a^2} \right) \right] \right\} \\ - \frac{1}{2} m' h' \cdot \left[2 a \cdot B^{(1)} + a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) + a a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} a^2 a' \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a \partial a'} \right) \right] . \end{aligned}$$

Pour donner à cette équation la forme la plus simple dont elle est susceptible, nous observerons que l'on a par l'article précédent,

$$a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) = -B^{(1)} - a \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right);$$

d'où l'on tire,

$$a' \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a \partial a'} \right) = -2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) - a \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a^2} \right).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, & en y mettant, au lieu de $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, & de leurs différences

178 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
relatives à a , les valeurs déterminées par l'*art. précédent*,
on aura :

$$0 = h. \left\{ \frac{g}{n} - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi)}{a^3} - \frac{m'. \alpha^3}{2} \cdot \left[\frac{\partial b^{\frac{1}{2}(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2} \alpha. \frac{\partial \partial b^{\frac{1}{2}(0)}}{\partial a^2} \right] \right\} \\ - \frac{1}{2} m' h'. \left[\alpha. b^{\frac{1}{2}(1)} - \alpha^2. \frac{\partial b^{\frac{1}{2}(1)}}{\partial a} - \frac{1}{2} \alpha^3. \frac{\partial \partial b^{\frac{1}{2}(1)}}{\partial a^2} \right].$$

Si l'on substitue au lieu de $\frac{\partial b^{\frac{1}{2}(0)}}{\partial a}$, $\frac{\partial \partial b^{\frac{1}{2}(0)}}{\partial a^2}$, $b^{\frac{1}{2}(1)}$,

$\frac{\partial b^{\frac{1}{2}(1)}}{\partial a}$ & $\frac{\partial \partial b^{\frac{1}{2}(1)}}{\partial a^2}$, leurs valeurs en $b^{\frac{1}{2}(0)}$, & $b^{\frac{1}{2}(1)}$, qu'il est facile de conclure des formules de l'*art. précédent*, on trouvera

$$\alpha^2. \frac{\partial b^{\frac{1}{2}(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2} \alpha^3. \frac{\partial \partial b^{\frac{1}{2}(0)}}{\partial a^2} = - \frac{3 \alpha^2. b^{\frac{1}{2}(1)}}{2. (1 - \alpha^2)^2}; \\ \alpha b^{\frac{1}{2}(1)} - \alpha^2. \frac{\partial b^{\frac{1}{2}(1)}}{\partial a} - \frac{1}{2} \alpha^3. \frac{\partial \partial b^{\frac{1}{2}(1)}}{\partial a^2} = \frac{\frac{3}{2} \alpha^2. b^{\frac{1}{2}(0)} + 3 \alpha. (1 + \alpha^2). b^{\frac{1}{2}(1)}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Soit maintenant T , la durée d'une année Julienne; nT fera le moyen mouvement du satellite m , dans cet intervalle; multiplions l'équation précédente entre h & h' par nT , & supposons $gT = f$, en sorte que f soit le mouvement de l'aphélie durant une année Julienne; supposons encore

$$(0) = \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi)}{a^3} \cdot nT; \\ (0, 1) = - \frac{3 m'. nT}{4} \cdot \frac{\alpha^2. b^{\frac{1}{2}(1)}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

$$\overline{[0,1]} = - \frac{3 m' \cdot n T}{2} \cdot \frac{\left[\frac{\alpha^2}{2} \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + \alpha \cdot (1 + \alpha^2) \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \right]}{(1 - \alpha^2)^2};$$

l'équation entre h & h' , prendra cette forme très-simple,

$$0 = h \cdot [f - (0) - (0,1)] + \overline{[0,1]} \cdot h'.$$

Il est visible que les actions des satellites m'' , m''' , sur m , ajoutent au second membre de cette équation, des termes analogues à ceux que produit l'action de m' . Soient donc

$(0,2)$ & $\overline{[0,2]}$, ce que deviennent $(0,1)$ & $\overline{[0,1]}$, lorsque

l'on y change m' & a' dans m'' & a'' ; soient pareillement

$(0,3)$ & $\overline{[0,3]}$, ce que deviennent les mêmes quantités,

lorsque l'on y change m' & a' dans m''' & a''' ; enfin, nommons h'' & h''' , ce que devient h relativement à m'' & m''' ; on aura, en vertu des actions réunies de Jupiter & des satellites,

$$0 = h \cdot [f - (0) - (0,1) - (0,2) - (0,3)] \\ + \overline{[0,1]} \cdot h' + \overline{[0,2]} \cdot h'' + \overline{[0,3]} \cdot h''.$$

L'action du Soleil sur le satellite m , ajoute encore un terme au second membre de cette équation. Pour le déterminer, nous considérerons le Soleil comme un satellite de Jupiter. Dans ce cas, si l'on nomme D' la moyenne distance de Jupiter au Soleil, on aura $\alpha = \frac{a}{D'}$, & les

valeurs de $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ & $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$ de l'article précédent deviendront,

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2 \cdot \left[1 + \frac{a^2}{4 D'^2} + \&c. \right]; b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = - \frac{a}{D'} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{8 D'^2} - \&c. \right].$$

La distance D' étant incomparablement plus grande que a , nous pouvons négliger les termes divisés par D'^4 ; la fonction $(0,1)$ devient ainsi, en y changeant m' dans S , & a' dans D'

$$(0,1) = \frac{{}_3S.nT}{4} \cdot \frac{a^3}{D^3};$$

& la fonction $[\overline{0,1}]$ est nulle. Soit présentement MT le moyen mouvement fidéral de Jupiter, on aura à très-peu près, $M^2 = \frac{S}{D^3}$; on a ensuite $n^2 = \frac{1}{a^3}$; on aura donc, relativement au Soleil,

$$(0,1) = \frac{{}_3M^2.T}{4n};$$

nous désignerons cette dernière fonction par $[\overline{0}]$. On aura, cela posé, en vertu des actions réunies de Jupiter, des Satellites & du Soleil,

$$0 = h \cdot \{f - (0) - [\overline{0}] - (0,1) - (0,2) - (0,3)\}; (i) \\ + [\overline{0,1}] \cdot h' + [\overline{0,2}] \cdot h'' + [\overline{0,3}] \cdot h'''.$$

Si l'on considère pareillement les perturbations du mouvement de m' , il est visible qu'il en résultera une nouvelle équation semblable à la précédente, & qui s'en déduit en y changeant les quantités relatives à m , dans celles qui sont relatives à m' , & réciproquement. Soient

$$(1), [\overline{1}], (1,0), [\overline{1,0}], (1,2), [\overline{1,2}], (1,3), [\overline{1,3}] \text{ ce} \\ \text{que deviennent } (0), [\overline{0}], (0,1), [\overline{0,1}], (0,2), [\overline{0,2}], \\ (0,3), [\overline{0,3}], \text{ en vertu de ces changemens; on aura,}$$

$$0 = h' \cdot \{f - (1) - [\overline{1}] - (1,0) - (1,2) - (1,3)\}; (i') \\ + [\overline{1,0}] \cdot h + [\overline{1,2}] \cdot h'' + [\overline{1,3}] \cdot h'''.$$

Si l'on désigne semblablement par $(2), [\overline{2}], (2,1), [\overline{2,1}], (2,0), [\overline{2,0}], (2,3), [\overline{2,3}]$, ce que deviennent les quantités

quantités (0) , $\overline{0}$, $(0,1)$, $\overline{0,1}$, $(0,2)$, $\overline{0,2}$, $(0,3)$, $\overline{0,3}$, lorsque l'on y change ce qui est relatif à m , dans ce qui est relatif à m'' , & réciproquement; si l'on désigne encore par (3) , $\overline{3}$, $(3,1)$, $\overline{3,1}$, $(3,2)$, $\overline{3,2}$, $(3,0)$, $\overline{3,0}$, ce que deviennent les mêmes quantités, lorsque l'on y change ce qui est relatif à m , dans ce qui est relatif à m''' , & réciproquement, on aura les deux équations

$$0 = h'' \{ f - (2) - \overline{2} - (2,0) - (2,1) - (2,3) \}; (i'') \\ + \overline{2,0} \cdot h + \overline{2,1} \cdot h' + \overline{2,3} \cdot h''$$

$$0 = h''' \{ f - (3) - \overline{3} - (3,0) - (3,1) - (3,2) \}; (i''') \\ + \overline{3,0} \cdot h + \overline{3,1} \cdot h' + \overline{3,2} \cdot h''.$$

Il existe entre les fonctions $(0,1)$ & $(1,0)$, $(0,2)$ & $(2,0)$, &c. des rapports remarquables qui peuvent servir à déterminer ces fonctions les unes par les autres. On a, par ce qui précède,

$$(0,1) = -\frac{3m' \cdot nT}{4} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

On a ensuite, par l'article précédent,

$$(a^2 - 2aa' \cdot \cos. \theta + a'^2)^{\frac{1}{2}} = a'.$$

$$\left[\frac{1}{2} \cdot b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \cdot \cos. \theta + b_{-\frac{1}{2}}^{(2)} \cdot \cos. 2\theta + \&c. \right].$$

Supposons qu'en développant le premier membre de cette équation, suivant les cosinus de l'angle θ & de ses multiples, on ait la série, $\frac{1}{2} \cdot (a, a') + (a, a')^1 \cdot \cos. \theta + \&c.$ on aura

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{(a, a')}{a'}; b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{(a, a')^1}{a'}, \&c.$$

$$\text{partant, } (0,1) = -\frac{3 m' n T}{4} \cdot \frac{a^2 a' (a, a')^2}{(a'^2 - a^2)^2}.$$

En changeant dans cette expression de $(0,1)$, les quantités m', n, a & a' , dans m, n', a' & a , on aura l'expression de $(1,0)$; mais $(a, a')^2$ reste toujours le même après ce changement; on aura donc

$$(1,0) = -\frac{3 m n' T}{4} \cdot \frac{a'^2 a (a, a')^2}{(a'^2 - a^2)^2} ;$$

d'où l'on tire

$$(0,1) \cdot m n' a' = (1,0) \cdot m' n a.$$

$$\text{On a } n = \frac{1}{\sqrt{(a^3)}}, n' = \frac{1}{\sqrt{(a'^3)}};$$

$$\text{partant, } (0,1) \cdot m \sqrt{a} = (1,0) \cdot m' \sqrt{a'}.$$

On aura donc $(1,0)$, au moyen de $(0,1)$, en multipliant cette dernière quantité par $\frac{m}{m'} \cdot \sqrt{a}$.

Il est clair que l'on aura pareillement les relations suivantes,

$$\begin{aligned} (0,2) \cdot m \cdot \sqrt{a} &= (2,0) \cdot m'' \sqrt{a''}; & (0,3) \cdot m \cdot \sqrt{a} &= (3,0) \cdot m''' \sqrt{a'''}; \\ (1,2) \cdot m' \cdot \sqrt{a'} &= (2,1) \cdot m'' \sqrt{a''}; & (1,3) \cdot m' \cdot \sqrt{a'} &= (3,1) \cdot m''' \sqrt{a'''}; \\ (2,3) \cdot m'' \cdot \sqrt{a''} &= (3,2) \cdot m''' \sqrt{a'''} \end{aligned}$$

On s'assurera d'une manière semblable, que les mêmes relations subsistent entre $[0,1]$, & $[1,0]$; $[0,2]$, & $[2,0]$, &c. en sorte que l'on peut dans les relations précédentes, changer les crochets ronds en crochets carrés.

Si dans les équations (i) , (i') , (i'') , (i''') , on élimine les arbitraires h, h', h'', h''' ; on aura une équation en f du quatrième degré. On aura de plus les valeurs de h', h'', h''' , au moyen de h , sous cette forme.

$$h' = \mathcal{C}' \cdot h; \quad h'' = \mathcal{C}'' \cdot h; \quad h''' = \mathcal{C}''' \cdot h;$$

\mathcal{C}' , \mathcal{C}'' , \mathcal{C}''' étant des fonctions de f , & la constante h étant arbitraire,

Soient f , f_1 , f_2 , f_3 , les quatre racines de l'équation en f ; on aura par la nature des équations linéaires,

$$\frac{r \delta r}{a^2} = h. \cos. (nt + e - ft - \Gamma) + h_1. \cos. (nt + e - f_1 t - \Gamma_1) \\ + h_2. \cos. (nt + e - f_2 t - \Gamma_2) + h_3. \cos. (nt + e - f_3 t - \Gamma_3);$$

h , h_1 , h_2 , h_3 , Γ , Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 étant des constantes arbitraires,

& t désignant ici le nombre des années juliennes écoulées depuis l'époque où l'on fixe l'origine du temps.

Si l'on nomme \mathcal{C}'_1 , \mathcal{C}''_1 , \mathcal{C}'''_1 ; \mathcal{C}'_2 , \mathcal{C}''_2 , \mathcal{C}'''_2 ; \mathcal{C}'_3 , \mathcal{C}''_3 , \mathcal{C}'''_3 ; ce que deviennent \mathcal{C}' , \mathcal{C}'' , \mathcal{C}''' , lorsqu'on y change successivement f dans f_1 , f_2 , f_3 , on aura

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \mathcal{C}'_1. h. \cos. (n' t + e' - f t - \Gamma) + \mathcal{C}'_1. h_1. \cos. (n' t + e' - f_1 t - \Gamma_1) \\ + \mathcal{C}'_2. h_2. \cos. (n' t + e' - f_2 t - \Gamma_2) + \mathcal{C}'_3. h_3. \cos. (n' t + e' - f_3 t - \Gamma_3); \\ \frac{r'' \delta r''}{a''^2} = \mathcal{C}''_1. h. \cos. (n'' t + e'' - f t - \Gamma) + \mathcal{C}''_1. h_1. \cos. (n'' t + e'' - f_1 t - \Gamma_1) \\ + \mathcal{C}''_2. h_2. \cos. (n'' t + e'' - f_2 t - \Gamma_2) + \mathcal{C}''_3. h_3. \cos. (n'' t + e'' - f_3 t - \Gamma_3); \\ \frac{r''' \delta r'''}{a'''^2} = \mathcal{C}'''_1. h. \cos. (n''' t + e''' - f t - \Gamma) + \mathcal{C}'''_1. h_1. \cos. (n''' t + e''' - f_1 t - \Gamma_1) \\ + \mathcal{C}'''_2. h_2. \cos. (n''' t + e''' - f_2 t - \Gamma_2) + \mathcal{C}'''_3. h_3. \cos. (n''' t + e''' - f_3 t - \Gamma_3);$$

Toutes ces expressions sont complètes, puisqu'elles renferment deux fois autant d'arbitraires qu'il y a d'équations différentielles du second ordre en $r \delta r$, $r' \delta r'$, $r'' \delta r''$, $r''' \delta r'''$.

La formule (2) de l'article II donne, en négligeant

le carré des excentricités & leur produit par les forces perturbatrices,

$$\delta v = 2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{r \delta r}{a^2} \right)}{n \partial t};$$

d'où il suit que f étant très-petit relativement à n , on aura l'expression de δv correspondante à l'expression précédente de $\frac{r \delta r}{a^2}$, en changeant dans celle-ci les cosinus en sinus, & en la multipliant par -2 . Les mêmes opérations sur les valeurs de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$, $\frac{r'' \delta r''}{a''^2}$, $\frac{r''' \delta r'''}{a'''^2}$, donneront les valeurs correspondantes de $\delta v'$, $\delta v''$ & $\delta v'''$.

On peut considérer ces différentes valeurs, comme étant relatives à des orbes elliptiques, dont les excentricités & les positions des aphélies seroient variables; en comparant les valeurs données par cette supposition, à celles que nous venons de trouver, on aura facilement les variations des excentricités & des aphélies. Tout se réduit donc à former & à résoudre les équations (i) , (i') , (i'') & (i''') ; mais nous verrons dans la suite que ces équations sont incomplètes, & que les rapports qui existent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, leur ajoutent de nouveaux termes sensibles, quoique dépendans des carrés & des produits des forces perturbatrices.

V I I I.

LE moyen mouvement du premier Satellite étant, à fort peu-près, double de celui du second; & le moyen mouvement du second étant, à fort peu-près, double de celui du troisième; il est visible que les termes qui dépendent des angles $nt - 2n't + \epsilon - 2\epsilon'$, $n't - 2n''t + \epsilon' - 2\epsilon''$, & qui subissent deux intégrations, doivent considérablement augmenter par ces intégrations; il est donc important de les

déterminer avec soin. Si l'on considère les équations (1) & (2) de l'article II, on voit que les termes dont il s'agit résultent dans l'expression de Δv , de la double intégrale $3 a \int n \partial t . \int \partial R$. Pour les obtenir, considérons d'abord la partie

$$\frac{m' . r . \cos. (v' - v)}{r'^2} = m' . B^{(1)} . \cos. (v' - v),$$

de l'expression de R , donnée dans l'article II. Si l'on y substitue $a' . [1 + h' . \cos. (n' t + \epsilon' - f t - \Gamma)]$, au lieu de r' , & $n' t + \epsilon' - 2 h' . \sin. (n' t + \epsilon' - f t - \Gamma)$, au lieu de v' , il en résultera le terme

$$= m' h' . \left[\frac{2 a}{a'^2} - B^{(1)} + \frac{1}{2} a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] . \\ \cos. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma).$$

On a par l'article V,

$$G = a'^2 . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) = \frac{2 n'}{n - n'} . a' . B^{(1)} + \left(\frac{2 n'}{n - n'} - 1 \right) . \frac{a'^2}{a^2};$$

or n étant à très-peu-près égal à $2 n'$, $4 a^3$ diffère très-peu de a'^3 , & par conséquent $\frac{a'^2}{a^2}$, diffère peu de

$\frac{4 a}{a'}$; on pourra donc sans erreur sensible, substituer

$$\frac{G}{2 a'} , \text{ au lieu de } \frac{2 a}{a'^2} - B^{(1)} + \frac{1}{2} a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right); \text{ le}$$

terme précédent devient ainsi

$$= \frac{m' . G . h'}{2 a'} . \cos. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma).$$

Considérons maintenant le terme $= m' . B^{(2)} . \cos. 2 (v' - v)$, de l'expression de R . Si l'on y substitue $a . [1 + h . \cos. (n t + \epsilon - f t - \Gamma)]$, au lieu de r , & $n t + \epsilon - 2 h . \sin. (n t + \epsilon - f t - \Gamma)$, au lieu de v ; il en résultera le terme

$$- \frac{m' h}{2} \cdot \left[a \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + 4 B^{(2)} \right] \cdot \cos. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma).$$

On a par l'art. V,

$$F = a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2 n}{n - n'} \cdot a \cdot B^{(2)};$$

d'où il suit que n étant à fort peu-près égal à $2 n'$, on peut substituer $\frac{F}{a}$, au lieu de $a \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + 4 B^{(2)}$; le terme précédent se réduit par cette substitution, à celui-ci,

$$- \frac{m' \cdot F h}{2 a} \cdot \cos. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma).$$

On s'assurera facilement que si l'on n'a égard qu'à l'action du satellite m' , la fonction R ne renferme point d'autres termes dépendans de l'angle $n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon'$, & que l'action du Soleil & des autres satellites sur m , n'en produit point de semblables, en ayant même égard au rapport qui existe entre les moyens mouvemens des trois premiers satellites, & dont nous avons parlé dans l'article V. En ne considérant donc que les termes affectés du double signe intégral, & qui dépendent de l'angle $n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon'$, & en négligeant les carrés des excentricités des orbites, l'équation (2) de l'art. II donnera

$$\delta v = \frac{- 3 n^2 m'}{2 \cdot (n - 2 n' + f)^2} \cdot \left[F h + \frac{a}{a'} \cdot G h' \right].$$

$$\sin. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma).$$

Il est facile d'en conclure la partie de $\delta v'$ qui dépend du même angle. Pour cela, nous observerons que si l'on réunit les deux valeurs de δv & de $\delta v'$ qui résultent de la formule (2) de l'article II: si l'on n'a égard qu'aux termes qui renferment de doubles intégrales, & que l'on néglige les carrés des excentricités des orbites, on aura

$$\frac{\delta v}{a n m'} + \frac{\delta v'}{a' n' m} = 3 \int dt. \left[\frac{dR}{m'} + \frac{d'R'}{m} \right];$$

R' étant ce que devient R relativement au second satellite, & la caractéristique différentielle d' , se rapportant aux seules coordonnées de ce Satellite.

Si dans l'expression de R , de l'article *I*, on n'a égard qu'à l'action de Jupiter & du Satellite m' , on aura, en négligeant le produit de m' par V' , & les différences partielles,

$$\int \frac{dR}{m'} = - \frac{(1+m).V}{m'} + \int \frac{(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z)}{r'^3} \\ - \int d. [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}};$$

or, on a à très-peu-près,

$$\frac{x'}{r'^3} = - \frac{\partial \delta x'}{\partial r'^2}; \quad \frac{y'}{r'^3} = - \frac{\partial \delta y'}{\partial r'^2}; \quad \frac{z'}{r'^3} = - \frac{\partial \delta z'}{\partial r'^2};$$

partant,

$$\int \frac{dR}{m'} = - \frac{(1+m).V}{m'} - \int \left[\frac{\partial x. \partial \delta x' + \partial y. \partial \delta y' + \partial z. \partial \delta z'}{\partial r'^2} \right] \\ - \int d. [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

On trouvera de la même manière, en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter & du Satellite m sur m' ,

$$\int \frac{d.R'}{m} = - \frac{(1+m').V'}{m} - \int \left[\frac{\partial x'. \partial \delta x + \partial y'. \partial \delta y + \partial z'. \partial \delta z}{\partial r'^2} \right] \\ - \int d'. [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}};$$

partant,

$$\int \left[\frac{dR}{m'} + \frac{d'R'}{m} \right] = - \frac{(1+m).V}{m'} - \frac{(1+m').V'}{m} - \int \left[\frac{\partial x. \delta x' + \partial y. \delta y' + \partial z. \delta z'}{\partial r'^2} \right] \\ - [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur, dans l'expression précédente

de $\frac{\delta v}{a n m'} + \frac{\delta v'}{a' n' m}$; il est visible qu'il ne peut en résulter de termes divisés par $(n - 2 n' + f)^2$; en n'ayant donc égard qu'aux termes qui ont ce diviseur, on aura,

$$\frac{\delta v}{a n m'} + \frac{\delta v'}{a' n' m} = 0;$$

& par conséquent,

$$\delta v' = - \frac{a' n' m}{a n m'} \cdot \delta v = - \frac{a' m}{2 a m'} \cdot \delta v;$$

à cause de $n = 2 n'$ à très-peu-près. Partant,

$$\delta v' = \frac{3 n'^2 \cdot m}{(n - 2 n' + f)^2} \cdot \frac{a'}{a} \cdot [F h + \frac{a}{a'} \cdot G h'] \cdot \sin. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma).$$

Le second satellite étant relativement au troisième, ce que le premier est relativement au second; on aura la partie de $\delta v'$ qui dépend de l'angle $n' t - 2 n'' t + \epsilon' - 2 \epsilon'' + f t + \Gamma$, en changeant dans l'expression précédente de δv , les quantités $m', n, n', \epsilon, \epsilon', a, a', F, G, h$ & h' dans $m'', n', n'', \epsilon', \epsilon'', a', a'', F', G', h'$ & h'' ; ce qui donne

$$\delta v' = - \frac{3 m'' \cdot n'^2}{2 \cdot (n' - 2 n'' + f)^2} \cdot [F' h' + \frac{a'}{a''} \cdot G' h''] \cdot \sin. (n' t - 2 n'' t + \epsilon' - 2 \epsilon'' + f t + \Gamma).$$

On peut réunir dans un seul terme les deux parties de $\delta v'$, au moyen des relations données dans l'article V, entre les moyens mouvemens & les époques des longitudes moyennes des trois premiers Satellites; on a en vertu de ces relations,

$$n' - 2 n'' = n - 2 n'; \quad n' t - 2 n'' t + \epsilon' - 2 \epsilon'' \\ = n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' - 180^\circ;$$

on aura ainsi, après cette réunion,

$$\delta v' = \frac{3 n'^2}{(n - 2 n' + f)^2} \cdot \left\{ \frac{m a'}{a} \cdot (F h + \frac{a}{a'} \cdot G h') \right. \\ \left. + \frac{m''}{2} \cdot (F' h' + \frac{a'}{a''} \cdot G' h'') \right\} \cdot \sin. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma).$$

Enfin,

Enfin, la partie de $\delta v'$ due à l'action du premier Satellite sur le second, donnera pour la valeur correspondante de $\delta v''$, due à l'action du second satellite sur le troisième,

$$\delta v'' = - \frac{3 m' . n'^2}{(n - 2 n' + f)^2} \cdot \frac{a''}{a'} \cdot [F' h' + \frac{a'}{a''} . G' h''] .$$

fin. $(n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon'' + f t + \Gamma)$.

Ces valeurs de δv , $\delta v'$ & $\delta v''$ sont les seuls termes sensibles, parmi ceux qui dépendent à la fois des excentricités des orbites & des forces perturbatrices. Il est clair que les racines f_1, f_2, f_3 , de l'équation en f , donneront des termes semblables dans les expressions de δv , $\delta v'$, $\delta v''$; & que pour avoir les valeurs complètes de ces quantités, il faut réunir ensemble ces différens termes.

I X.

Des inégalités des Satellites, qui dépendent de l'action du Soleil.

IL est facile de conclure des formules que nous avons données précédemment, les perturbations des satellites, qui dépendent de leur élongation au Soleil; mais la lenteur du mouvement de Jupiter dans son orbite, donne une valeur sensible à quelques inégalités dépendantes de l'action du Soleil, & d'une espèce différente de celles que nous avons considérées jusqu'ici. Nous allons donc examiner particulièrement les inégalités des Satellites, dues à l'action du Soleil, en les tirant immédiatement des équations différentielles de l'*art. II*.

Si l'on n'a égard qu'à l'action du Soleil, on a par l'*article I*,

$$R = S \cdot \frac{(x \cdot X + y \cdot Y + z \cdot Z)}{D^3} = S \cdot [D^2 - 2(xX + yY + zZ) + r^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

En réduisant cette expression de R en série, & en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{D^4}$, on aura

Mém. 1788.

$$R = \frac{S}{2D^2} \cdot [r^2 - 3 \cdot \frac{(x.X + y.Y + z.Z)^2}{D^2}] - \frac{S}{D}.$$

Si l'on néglige les carrés des inclinaisons des orbites, & qu'ainsi l'on suppose,

$$X = D \cdot \cos. \Pi; \quad Y = D \cdot \sin. \Pi;$$

$$x = r \cdot \cos. v; \quad y = r \cdot \sin. v;$$

ou aura

$$R = -\frac{S}{D} - \frac{Sr^2}{4D^3} \cdot [1 + 3 \cdot \cos. 2(v - \Pi)];$$

& l'équation différentielle (1) de l'article II deviendra

$$0 = \frac{\partial \partial \cdot (r \partial r)}{\partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot r \partial r}{r^3} - \frac{S}{2} \int d. \left[\frac{r^2}{D^3} + \frac{3 \cdot r^2}{D^3} \cdot \cos. 2(v - \Pi) \right] \\ - \frac{Sr^2}{2D^3} \cdot [1 + 3 \cdot \cos. 2(v - \Pi)].$$

Si dans cette équation, on substitue au lieu de Π , la longitude moyenne du Soleil vu de Jupiter, & qui est égale à $180^\circ + Mt - A$, $Mt + A$ étant la longitude moyenne de Jupiter; si l'on substitue encore $a \cdot [1 + h \cdot \cos. (nt + \epsilon - ft - \Gamma)]$, au lieu de r ; & $nt + \epsilon - 2h \cdot \sin. (nt + \epsilon - ft - \Gamma)$, au lieu de v : on aura un terme dépendant de l'angle $nt + \epsilon - 2Mt - 2A + ft + \Gamma$, & qui acquérant, par l'intégration, un très-petit diviseur, peut devenir sensible, quoique multiplié par h ; il est donc nécessaire d'y avoir égard. Ainsi, en négligeant M , relativement à n ; en nommant D' la moyenne distance de Jupiter au Soleil, & en observant que l'on a, à très-peu-près, $M^2 = \frac{S}{D'^3}$, l'équation différentielle précédente deviendra

$$0 = \frac{\partial \partial \cdot (r \partial r)}{a^3 \cdot \partial t^2} + M^2 \cdot \frac{r \partial r}{a^2} - \frac{1}{2} M^2 - 3 M^2 \cdot \cos. 2(nt - Mt + \epsilon - A) \\ - 9 M^2 \cdot h \cdot \cos. (nt - 2Mt + ft + \epsilon - 2A + \Gamma).$$

Nous n'aurons égard dans la valeur de $\frac{r \delta r}{a^2}$, qu'aux termes qui dépendent des deux angles $2nt - 2Mt + 2\varepsilon - 2A$, & $nt - 2Mt + ft + \varepsilon - 2A + \Gamma$, parce que nous avons déjà considéré dans les *articles précédens*, les termes de cette valeur, qui sont constans, & ceux qui contribuent aux variations de l'excentricité & de l'aphélie. Cela posé, on aura, en intégrant l'équation précédente, & en négligeant M, f & $N - n$ vis-à-vis de n ,

$$\frac{r \delta r}{a^2} = - \frac{M^2}{n^2} \cdot \cos. 2 (nt - Mt + \varepsilon - A) \\ + \frac{9 \cdot M^2 \cdot h}{2 n \cdot (2M + N - n - f)} \cdot \cos. (nt - 2Mt + ft + \varepsilon - 2A + \Gamma).$$

Si l'on substitue cette valeur dans la formule (2) de l'article II, on trouvera, en n'ayant égard qu'aux mêmes argumens,

$$\delta v = \frac{11}{8} \cdot \frac{M^2}{n^2} \cdot \sin. (2nt - 2Mt + 2\varepsilon - 2A) \\ - \frac{9 M^2 h}{n \cdot (2M + N - n - f)} \cdot \sin. (nt - 2Mt + ft + \varepsilon - 2A + \Gamma).$$

La valeur de δv renferme encore un terme sensible dépendant de l'excentricité de l'orbite de Jupiter. En effet, si dans le terme $-\frac{S r^2}{4 D^3}$ de l'expression de R , on substitue au lieu de D , la valeur D' . [$1 + E \cdot \cos. (Mt + A - B)$], E étant l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & B étant la longitude de son aphélie; ce terme deviendra

$$-\frac{M^2 \cdot r^2}{4} \cdot [1 - 3 E \cdot \cos. (Mt + A - B)].$$

La partie $2 a n f \partial t \cdot r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)$ de l'expression de δv de l'article II, produira donc le terme

$$\frac{3 M}{n} \cdot E \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

En rassemblant ces différens termes, on aura par l'action du Soleil,

$$\Delta v = \frac{11. M^2}{8. n^2} \cdot \sin. (2nt - 2Mt + 2\epsilon - 2A) \\
- \frac{9 M^2 \cdot h}{n \cdot (2M + N - n - f)} \cdot \sin. (nt - 2Mt + ft + \epsilon - 2A + \Gamma) \\
+ \frac{3M}{n} \cdot E \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

Le premier de ces termes répond à la variation dans la théorie de la Lune; le second terme répond à l'évection, & le troisième terme répond à l'équation annuelle.

L'action du Soleil sur les Satellites, produit encore dans leurs mouvemens, des inégalités sensibles dépendantes des variations séculaires de l'orbite & de l'équateur de Jupiter; ces inégalités sont analogues à celle que j'ai reconnue dans le moyen mouvement de la Lune, & dont j'ai donné les loix & la cause dans nos Mémoires pour l'année 1786: on pourra les déterminer par l'analyse dont j'ai fait usage dans les Mémoires cités; mais comme dans l'intervalle de deux ou trois siècles, elles se confondent avec les moyens mouvemens des Satellites, il est présentement inutile d'y avoir égard.

X.

Du mouvement des Satellites en latitude.

POUR déterminer ce mouvement, nous reprendrons l'équation (3) de l'article II.

$$0 = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot z}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

Si l'on néglige les produits de trois dimensions de z & de z' , & celui de V' par m' ; on aura par l'article I, en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter & du Satellite m' ,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) = \frac{m' z'}{r^3} - \frac{m' \cdot (z' - z)}{[r^2 - 2rr' \cdot \cos. (v' - v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}} - (1+m) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Pour déterminer $(\frac{\partial V}{\partial z})$, nous observerons que l'on a, par l'article III,

$$V = - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi) \cdot (\mu^2 - \frac{1}{2})}{r^3}.$$

Supposons que z , soit ce que devient z , dans la supposition où le Satellite m feroit mû sur le plan même de l'équateur de Jupiter, on aura $z - z_1 = r\mu$; & par conséquent

$$V = - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi) \cdot (z - z_1)^2}{r^3} + \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi)}{3r^3};$$

ce qui donne, en observant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, & en négligeant les termes de l'ordre z^3 ,

$$(\frac{\partial V}{\partial z}) = \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi) \cdot (2 \cdot z_1 - 3 \cdot z)}{r^3},$$

l'équation différentielle en z deviendra ainsi,

$$0 = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot z}{r^3} \cdot [1 + 3 \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi)}{r^2}] - 2 \frac{(1+m) \cdot (\rho - \frac{1}{2}\phi) \cdot z_1}{r^3} \\ + \frac{m' z'}{r^3} + \frac{m' \cdot (z - z')}{[r^2 - 2rr' \cdot \cos(v' - v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous négligerons ici les termes dépendans à la fois des excentricités & des inclinaisons des orbites; nous supposerons conséquemment dans l'équation précédente,

$$r = a + \delta r; r' = a'; v = nt + \epsilon; v' = n't + \epsilon';$$

nous supposerons ensuite, $z = rs$; $z_1 = rs_1$; $z' = r's'$; en sorte que s & s' seront les sinus des latitudes des Satellites m & m' au-dessus du plan fixe, sinus que l'on pourra confondre avec les latitudes elles-mêmes, à cause de leur petitesse; s_1 sera la latitude de la projection du Satellite m sur le plan de l'Équateur. Cela posé, l'équation différentielle précédente se changera dans la suivante, en y substituant

$$n^2, \text{ au lieu de } \frac{1+m}{a^3},$$

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + n^2 s \cdot \left[1 - 3 \frac{\partial^2 r}{a} + 3 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \right] \\
& + \frac{2 \partial s \cdot \partial \cdot \partial^2 r}{a \partial t^2} + \frac{s \cdot \partial \partial \cdot \partial^2 r}{a \partial t^2} - \frac{2 n^2 \cdot (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot s, \\
& + \frac{n^2 \cdot m' a^2}{a'^2} \cdot s' + \frac{n^2 \cdot m' \cdot a^3 \cdot (s - \frac{a' s'}{a})}{[a^2 - 2 a a' \cdot \cos.(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) + a'^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Nous suivrons pour déterminer s , s_1 , s' , le même procédé qui nous a servi dans l'article VII, à déterminer $\frac{r \partial^2 r}{a^2}$, $\frac{r' \partial^2 r'}{a'^2}$, &c. Ainsi nous n'aurons d'abord égard qu'aux termes qui dépendent du sinus & du cosinus de l'angle $n t + \epsilon$. Pour cela, il faut conserver dans l'équation différentielle les termes dans lesquels s & s_1 sont multipliés par des constantes; il faut retenir encore ceux dans lesquels s' est multiplié par $\cos.(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon)$, parce que le produit de ces deux quantités donne un terme dépendant de l'angle $n t + \epsilon$.

Maintenant, si l'on suppose $\frac{a}{a'} = \alpha$, on a par l'art. VI,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(a^2 - 2 a a' \cdot \cos.(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) + a'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a'^3} \cdot \\
& \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(0)} + b_{\frac{1}{2}}^{(1)} \cdot \cos.(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\ & + b_{\frac{1}{2}}^{(2)} \cdot \cos. 2 (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) + \&c. \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

l'équation différentielle en s , deviendra donc,

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + n^2 s \cdot \left[1 - 3 \frac{\partial^2 a}{a} + 3 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} + \frac{m' a^2}{2} \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(0)} \right] \\
& - 2 n^2 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot s_1 \\
& - n^2 \cdot m' \cdot a^2 \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(1)} \cdot s' \cdot \cos.(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon).
\end{aligned}$$

Or on a par l'art. IV,

$$\frac{3 \delta a}{a} = \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot m' \cdot a^2 \cdot \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial a};$$

partant,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \delta s}{\partial t^2} + n^2 s \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} + \frac{1}{2} \cdot m' a^2 \cdot \left(a b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial a} \right) \right] \\ &\quad - 2 n^2 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot s_1 - n^2 m' a^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}} \cdot s' \cdot \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon). \end{aligned}$$

Pour intégrer cette équation différentielle, supposons,

$$s = l \cdot \sin. (n t + \epsilon + p t - \Lambda);$$

$$s' = l' \cdot \sin. (n' t + \epsilon' + p t - \Lambda);$$

$$s_1 = L \cdot \sin. (n t + \epsilon + p t - \Lambda);$$

la comparaison des coefficients de $\sin. (n t + \epsilon + p t - \Lambda)$, donnera,

$$\begin{aligned} 0 &= l \cdot \left[\frac{p}{n} - \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} - \frac{1}{2} m' a^2 \cdot \left(a b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial a} \right) \right] \\ &\quad + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot L + \frac{m' a^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}} \cdot l'}{4}. \end{aligned}$$

On trouvera facilement par l'art. VI,

$$a b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial a} = - \frac{3 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{(1 - a^2)^2} = b^{(1)}_{\frac{1}{2}};$$

en multipliant donc par $n T$, l'équation précédente entre $l, l' \& L$, T étant la durée d'une année julienne; on aura

$$\begin{aligned} 0 &= l \cdot \left[p T - \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot n T + \frac{3 m' n T}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{(1 - a^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot n T L - \frac{3 m' n T}{4} \cdot \frac{a^2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{(1 - a^2)^2} \cdot l'. \end{aligned}$$

On a par l'art. VII,

$$\frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot n T = (0); \quad - \frac{3 m' n T}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{(1 - a^2)^2} = (0, 1);$$

ainsi, en supposant $p T = q$, on aura

$$0 = l. [q - (0) - (0,1)] + (0) L + (0,1) . l',$$

L'action des Satellites m'' , m''' , & celle du Soleil, ajoutent à cette équation, des termes analogues à ceux que produit l'action de m' , & l'on trouvera comme dans l'article VII, que si l'on nomme l'' , l''' & L' , relativement aux Satellites m'' , m''' & au Soleil, ce que l & l' sont relativement à m & m' , on aura en vertu des actions réunies de Jupiter, des Satellites & du Soleil,

$$0 = l. [q - (0) - \overline{0} - (0,1) - (0,2) - (0,3)] + (0) . L \\ + (0,1) . l' + (0,2) l'' + (0,3) l''' + \overline{0} . L' ; (k).$$

On trouvera de la même manière

$$0 = l'. [q - (1) - \overline{1} - (1,0) - (1,2) - (1,3)] + (1) . L \\ + (1,0) . l + (1,2) l'' + (1,3) . l''' + \overline{1} . L' ; (k')$$

$$0 = l''. [q - (2) - \overline{2} - (2,0) - (2,1) - (2,3)] + (2) . L \\ + (2,0) . l + (2,1) . l' + (2,3) . l''' + \overline{2} . L' ; (k'')$$

$$0 = l'''. [q - (3) - \overline{3} - (3,0) - (3,1) - (3,2)] + (3) . L \\ (3,0) . l + (3,1) . l' + (3,2) . l'' + \overline{3} . L' ; (k''')$$

Il existe encore entre les quantités l , l' , l'' , l''' , L , L' & q , d'autres équations qu'il est nécessaire de considérer. La valeur de L' dépend du déplacement de l'orbite de Jupiter; or, il est clair que les Satellites & la figure de Jupiter, ne peuvent influer que d'une manière insensible sur ce déplacement. Ainsi les équations qui déterminent L' , sont indépendantes de l , l' , l'' , l''' , & nous pouvons supposer $L' = 0$, lorsque nous déterminerons les valeurs des quantités précédentes, relatives à l'action de Jupiter & des Satellites.

La valeur de L dépend du déplacement de l'équateur de Jupiter;

Jupiter ; or ce plan change en vertu des actions réunies du Soleil & des Satellites ; L dépend donc des quantités l, l', l'', l''' & L' . Je trouve, par une analyse qu'il seroit trop long d'exposer ici, que si l'on suppose

$$E = \frac{3\chi \cdot f \square \cdot R^2 \cdot \partial R}{2 \cdot f \square \cdot R^4 \cdot \partial R},$$

χ étant le rapport de la durée de la rotation de Jupiter à la durée de sa révolution sidérale, \square étant la densité d'une couche de Jupiter dont le rayon est R , & les intégrales étant prises depuis $R = 0$, jusqu'à R égal au rayon de l'équateur de Jupiter, que nous prendrons pour unité de distance ; on a

$$\bullet = qL - E \cdot (p - \frac{1}{2}q) \cdot MT \cdot (L - L') - \frac{n \cdot a \sqrt{a} \cdot E}{M} \cdot \left\{ \begin{array}{l} m \cdot (0) \cdot \sqrt{a} \cdot (L - l) \\ + m' \cdot (1) \cdot \sqrt{a'} \cdot (L - l') \\ + m'' \cdot (2) \cdot \sqrt{a''} \cdot (L - l'') \\ + m''' \cdot (3) \cdot \sqrt{a'''} \cdot (L - l''') \end{array} \right\} \cdot (k^{xy})$$

équation dans laquelle on doit observer que T est la durée d'une année Julienne ; que MT est le moyen mouvement fidéral de Jupiter dans cet intervalle ; & que $\frac{n}{M}$ est le rapport de la durée d'une révolution fidérale de Jupiter, à la durée d'une révolution fidérale du Satellite m .

Considérons d'abord les valeurs de l, l', l'', l''' , qui sont relatives au déplacement de l'orbite & de l'équateur de Jupiter. Pour cela, nous donnerons aux équations $(k), (k'), (k''), (k''')$, les formes suivantes,

$$\begin{aligned} \bullet &= (L - l) \cdot [q - (0) - \overline{[0]} - (0,1) - (0,2) - (0,3)] - qL \\ &\quad + (0,1) \cdot (L - l') + (0,2) \cdot (L - l'') + (0,3) \cdot (L - l''') + \overline{[0]} \cdot (L - L'), \\ \circ &= (L - l') \cdot [q - (1) - \overline{[1]} - (1,0) - (1,2) - (1,3)] - qL \\ &\quad + (1,0) \cdot (L - l) + (1,2) \cdot (L - l'') + (1,3) \cdot (L - l''') + \overline{[1]} \cdot (L - L'), \\ \circ &= (L - l'') \cdot [q - (2) - \overline{[2]} - (2,0) - (2,1) - (2,3)] - qL \\ &\quad + (2,0) \cdot (L - l) + (2,1) \cdot (L - l') + (2,3) \cdot (L - l''') + \overline{[2]} \cdot (L - L'). \end{aligned}$$

$$0 = (L - l''). [q - (3) - \overline{3}] - (3,0) - (3,1) - (3,2) - qL \\ + (3,0) \cdot (L - l) + (3,1) \cdot (L - l') + (3,2) \cdot (L - l'') + \overline{3} \cdot (L - l').$$

Si l'on substitue dans ces équations, au lieu de qL , la valeur donnée par l'équation (k^{iv}) , on aura quatre équations entre les indéterminées, $L - l$, $L - l'$, $L - l''$, $L - l'''$, $L - l'$, & q .

Supposons maintenant que la valeur de q soit relative au déplacement de l'orbite de Jupiter & au mouvement moyen des équinoxes de son équateur. Cette valeur est considérablement plus petite que (0), (1), (2), (3), (0.1), &c. parce que l'orbite & les équinoxes de Jupiter meurent avec beaucoup plus de lenteur que les orbites des Satellites, comme on le verra ci-après. On peut donc alors négliger q vis-à-vis de (0), (1), &c. On peut encore négliger sans erreur sensible, vis-à-vis des mêmes quantités, & même relativement à

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \text{ \& } \overline{3},$$

les quantités suivantes $E. (\rho - \frac{1}{2} \varphi) . MT; \frac{\pi a \sqrt{a}}{M} .$

$E. m. (0) . \sqrt{a}; \frac{\pi a \sqrt{a}}{M} . E. m'. (1) . \sqrt{a'}, \text{ \&c. Cela posé, si l'on fait }$

$$\begin{aligned} L - l &= v . (L - l'); \\ L - l' &= v' . (L - l'); \\ L - l'' &= v'' . (L - l'); \\ L - l''' &= v''' . (L - l'); \end{aligned}$$

on aura pour déterminer v, v', v'', v''' , les quatre équations suivantes,

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \nu \cdot [(0) + \overline{0} + (0,1) + (0,2) + (0,3)] \\
 &\quad - (0,1) \cdot \nu' - (0,2) \cdot \nu'' - (0,3) \cdot \nu''' - \overline{0} . \\
 0 &= \nu' \cdot [(1) + \overline{1} + (1,0) + (1,2) + (1,3)] \\
 &\quad - (1,0) \cdot \nu - (1,2) \cdot \nu'' - (1,3) \cdot \nu''' - \overline{1} . \\
 0 &= \nu'' \cdot [(2) + \overline{2} + (2,0) + (2,1) + (2,3)] \\
 &\quad - (2,0) \cdot \nu - (2,1) \cdot \nu' - (2,3) \cdot \nu''' - \overline{2} . \\
 0 &= \nu''' \cdot [(3) + \overline{3} + (3,0) + (3,1) + (3,2)] \\
 &\quad - (3,0) \cdot \nu - (3,1) \cdot \nu' - (3,2) \cdot \nu'' - \overline{3} .
 \end{aligned} \right\} ; (L)$$

La latitude du Satellite m au-dessus de l'orbite de Jupiter, est égale à $\Sigma \cdot (l - L') \cdot \sin. (nt + \epsilon + pt - \Lambda)$; la caractéristique intégrale Σ servant ici à désigner la somme de tous les termes de la forme $(l - L') \cdot \sin. (nt + \epsilon + pt - \Lambda)$ qui entrent dans l'expression de la latitude du Satellite au-dessus de l'orbite de Jupiter. Si l'on n'a égard qu'aux termes qui dépendent du déplacement de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, on a $L - l = \nu \cdot (L - L')$, & par conséquent $l - L' = (1 - \nu) \cdot (L - L')$; ainsi, en n'ayant égard qu'à ces termes, on aura

$$\Sigma \cdot (l - L') \cdot \sin. (nt + \epsilon + pt - \Lambda) = (1 - \nu) \cdot \Sigma \cdot (L - L') \cdot \sin. (nt + \epsilon + pt - \Lambda).$$

Si le Satellite m étoit mû dans le plan de l'équateur de Jupiter, sa latitude au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter seroit $\Sigma \cdot (L - L') \cdot \sin. (nt + \epsilon + pt - \Lambda)$; l'expression $(1 - \nu) \cdot \Sigma \cdot (L - L') \cdot \sin. (nt + \epsilon + pt - \Lambda)$ de la latitude du Satellite au-dessus de l'orbite de Jupiter, est donc la même que si le Satellite étoit mû sur un plan qui passeroit entre les plans de l'équateur & de l'orbite de Jupiter, par la commune intersection de ces deux derniers

plans, & dont l'inclinaison sur le plan de l'orbite seroit à l'inclinaison de l'équateur sur l'orbite, dans le rapport de $1 - \nu$, à l'unité. Soit donc Ψ l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur le plan de son orbite, & I la longitude de son nœud ascendant sur cette orbite, cette longitude étant rapportée à l'axe fixe des x ; la latitude du Satellite m , au-dessus de l'orbite de Jupiter, sera, en n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent du déplacement de l'équateur & de l'orbite de cette planète,

$$(1 - \nu) \cdot \Psi \cdot \sin. (nt + \epsilon - I).$$

Considérons les valeurs de l, l', l'', l''' & q , qui dépendent de l'action de Jupiter & de ses Satellites; la valeur de q est alors beaucoup plus grande que les quantités $E \cdot (\rho - \frac{1}{2}\phi) \cdot MT$,

$$\frac{n a \sqrt{a}}{M} \cdot E \cdot m \cdot (0) \cdot V(a), \text{ \&c. ; ainsi la valeur de } L \text{ est,}$$

en vertu de l'équation (k^{iv}) , extrêmement petite; d'où il suit que le mouvement de l'équateur de Jupiter dépendant du mouvement des orbites des Satellites, est insensible. On peut donc dans les équations (k) , (k') , (k'') , (k''') , supposer $qL = 0$, & $L' = 0$; si de plus on y suppose,

$$l' = \lambda l, l'' = \lambda' l, l''' = \lambda'' l;$$

on aura quatre équations entre les indéterminées $\lambda, \lambda', \lambda''$ & q , d'où l'on tirera q , au moyen d'une équation du quatrième degré. Soient q, q_1, q_2, q_3 , les quatre racines de cette équation, & désignons par

$$\lambda_1, \lambda_1', \lambda_1''; \lambda_2, \lambda_2', \lambda_2''; \lambda_3, \lambda_3', \lambda_3'';$$

ce que deviennent $\lambda, \lambda', \lambda''$, lorsque l'on y change successivement q , dans q_1, q_2 & q_3 ; supposons enfin que s, s', s'', s''' , au lieu d'exprimer comme ci-dessus, les latitudes des Satellites m, m', m'', m''' , au-dessus du plan fixe, expriment leurs latitudes au-dessus de l'orbite de Jupiter, latitudes qu'il nous importe de connoître

dans le calcul des éclipses ; nous aurons

$$\begin{aligned}
 s = & (1 - v) \cdot \Psi \cdot \sin. (nt + \epsilon - I) \\
 & + l \cdot \sin. (nt + \epsilon + qt - \Lambda) \\
 & + l_1 \cdot \sin. (nt + \epsilon + q_1 t - \Lambda_1) \\
 & + l_2 \cdot \sin. (nt + \epsilon + q_2 t - \Lambda_2) \\
 & + l_3 \cdot \sin. (nt + \epsilon + q_3 t - \Lambda_3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s' = & (1 - v) \cdot \Psi \cdot \sin. (n' t + \epsilon' - I) \\
 & + \lambda \cdot l \cdot \sin. (n' t + \epsilon' + qt - \Lambda) \\
 & + \lambda_1 \cdot l_1 \cdot \sin. (n' t + \epsilon' + q_1 t - \Lambda_1) \\
 & + \lambda_2 \cdot l_2 \cdot \sin. (n' t + \epsilon' + q_2 t - \Lambda_2) \\
 & + \lambda_3 \cdot l_3 \cdot \sin. (n' t + \epsilon' + q_3 t - \Lambda_3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s'' = & (1 - v'') \cdot \Psi \cdot \sin. (n'' t + \epsilon'' - I) \\
 & + \lambda' \cdot l \cdot \sin. (n'' t + \epsilon'' + qt - \Lambda) \\
 & + \lambda'_1 \cdot l_1 \cdot \sin. (n'' t + \epsilon'' + q_1 t - \Lambda_1) \\
 & + \lambda'_2 \cdot l_2 \cdot \sin. (n'' t + \epsilon'' + q_2 t - \Lambda_2) \\
 & + \lambda'_3 \cdot l_3 \cdot \sin. (n'' t + \epsilon'' + q_3 t - \Lambda_3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s''' = & (1 - v''') \cdot \Psi \cdot \sin. (n''' t + \epsilon''' - I) \\
 & + \lambda'' \cdot l \cdot \sin. (n''' t + \epsilon''' + qt - \Lambda) \\
 & + \lambda''_1 \cdot l_1 \cdot \sin. (n''' t + \epsilon''' + q_1 t - \Lambda_1) \\
 & + \lambda''_2 \cdot l_2 \cdot \sin. (n''' t + \epsilon''' + q_2 t - \Lambda_2) \\
 & + \lambda''_3 \cdot l_3 \cdot \sin. (n''' t + \epsilon''' + q_3 t - \Lambda_3).
 \end{aligned}$$

t étant ici le nombre des années Juliennes écoulées depuis l'époque où l'on fixe l'origine du temps.

Les valeurs de l , Λ ; l_1 , Λ_1 ; l_2 , Λ_2 ; l_3 , Λ_3 , sont constantes & arbitraires ; mais les valeurs de Ψ & de I , changent par le mouvement de l'orbite & des points

équinoxiaux de Jupiter. Pour déterminer ces variations, nous observerons que l'on a par ce qui précède,

$$\Psi. \sin. I = - \Sigma. (L - L'). \sin. (qt - \Lambda);$$

$$\Psi. \cos. I = \Sigma. (L - L'). \cos. (qt - \Lambda);$$

ce qui donne

$$\frac{\partial. (\Psi \sin. I)}{\partial t} = - \Sigma q. (L - L'). \cos. (qt - \Lambda).$$

$$\frac{\partial. (\Psi. \cos. I)}{\partial t} = - \Sigma q. (L - L'). \sin. (qt - \Lambda).$$

Mais si l'on nomme Ψ' l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur le plan fixe, & I' , la longitude de son nœud ascendant sur ce plan, on a

$$\Psi'. \sin. I' = - \Sigma. L'. \sin. (qt - \Lambda);$$

$$\Psi'. \cos. I' = - \Sigma. L'. \cos. (qt - \Lambda);$$

ce qui donne

$$\frac{\partial. (\Psi'. \sin. I')}{\partial t} = - \Sigma q. L'. \cos. (qt - \Lambda);$$

$$\frac{\partial. (\Psi'. \cos. I')}{\partial t} = - \Sigma q. L'. \sin. (qt - \Lambda);$$

de plus, le système des équations (k) , (k') , (k'') , (k''') & (k^{iv}) , donne pour qL , une expression de cette forme,

$$qL = C. (L - L');$$

on aura donc

$$\frac{\partial. (\Psi. \sin. I)}{\partial t} = - C. \Psi. \cos. I - \frac{\partial. (\Psi'. \sin. I')}{\partial t};$$

$$\frac{\partial. (\Psi. \cos. I)}{\partial t} = C. \Psi. \sin. I - \frac{\partial. (\Psi'. \cos. I')}{\partial t};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial. \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi'}{\partial t} . \cos. (I' - I) + \Psi'. \frac{\partial I'}{\partial t} . \sin. (I' - I)$$

$$\Psi. \frac{\partial I}{\partial t} = - C \Psi - \frac{\partial \Psi'}{\partial t} . \sin. (I' - I) - \Psi'. \frac{\partial I'}{\partial t} . \cos. (I' - I)$$

exprimant le nombre des années Juliennes écoulées depuis l'origine du temps. Au moyen de ces équations, on aura les variations différentielles de Ψ & de I , par celles de Ψ' , I' , qui sont données par la théorie de Jupiter; on pourra donc ainsi déterminer les variations séculaires du nœud & de l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur son orbite. Pour déterminer \mathcal{C} , l'équation (k^{iv}) donne

$$\mathcal{C} = E. \left(\rho - \frac{1}{2} \varphi \right) . MT + \frac{n a V(a)}{M} . E.$$

$$\left[m v. (0) . V(a) + m' v'. (1) . V(a') + m'' v''. (2) . V(a'') \right. \\ \left. + m''' v'''. (3) . V(a''') \right].$$

Si l'on multiplie les quatre équations (L) respectivement par $m V(a)$, $m' V(a')$, $m'' V(a'')$, $m''' V(a''')$, & qu'ensuite on les ajoute, on aura en vertu des relations trouvées dans l'art. VII, entre les quantités $(0,1)$ & $(1,0)$, $(0,2)$ & $(2,0)$, &c.

$$m v. (0) . V(a) + m' v'. (1) . V(a') + m'' v''. (2) . V(a'') \\ + m''' v'''. (3) . V(a''')$$

$$= m \overline{[0]} . V(a) . (1 - v) + m' . \overline{[1]} . V(a') . (1 - v') \\ + m'' . \overline{[2]} . V(a'') . (1 - v'') + m''' . \overline{[3]} . V(a''') . (1 - v''');$$

on a ensuite, par l'art. VII,

$$\overline{[0]} . V(a) = \frac{3 M^2 T}{4 n} . V(a) = \frac{3 M^2 T}{4} . a^2,$$

& l'on trouvera des expressions semblables pour $\overline{[1]}$.

$V(a')$, $\overline{[2]} . V(a'')$, &c. on aura, cela posé, cette expression fort simple de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \frac{3 E . MT}{4} . \left\{ \begin{array}{l} \left(\rho - \frac{1}{2} \varphi \right) + m . (1 - v) . a^2 + m' . (1 - v') . a'^2 \\ + m'' . (1 - v'') . a''^2 + m''' . (1 - v''') . a'''^2 \end{array} \right\}.$$

X I.

CONSIDÉRONs présentement les inégalités périodiques du mouvement des Satellites en latitude. Pour cela, nous reprendrons l'équation différentielle en s , de l'article précédent,

$$0 = \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + n^2 s \cdot \left[1 - \frac{3 \partial^2 r}{a} + \frac{3 \cdot (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \right] \\ + \frac{2 \partial s \cdot \partial \partial^2 r}{a \partial t^2} + \frac{s \cdot \partial \partial \cdot \partial^2 r}{a \partial t^2} - 2 n^2 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot s_1 \\ + \frac{n^2 \cdot m' \cdot a^2}{a'^2} \cdot s' + \frac{n^2 \cdot m' \cdot a^2 \cdot [s - \frac{a' s'}{a}]}{[a^2 - 2 a a' \cdot \cos(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) + a'^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'orbite primitive de m , alors s sera de l'ordre des forces perturbatrices, & en négligeant les produits de deux dimensions de ces forces, l'équation précédente deviendra

$$0 = \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + N^2 \cdot s - 2 n^2 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \cdot s, \\ + \frac{n^2 \cdot m' \cdot a^2}{a'^2} \cdot s' - \frac{n^2 \cdot m' \cdot a^2 \cdot a' \cdot s'}{[a^2 - 2 a a' \cdot \cos(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) + a'^2]^{\frac{1}{2}}},$$

s' étant ici la latitude de m' au-dessus de l'orbite primitive de m , & N^2 étant égal au coefficient constant de s , dans l'équation différentielle en s , en sorte que nous pourrions supposer à fort peu-près ici,

$$N = n \cdot \left[1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \right].$$

Cela posé, les termes de l'équation différentielle, qui dépendent de l'angle $3 n t - 4 n' t + 3 \epsilon - 4 \epsilon'$, acquièrent un grand diviseur par les intégrations, & peuvent par-là devenir sensibles. En n'ayant égard qu'à ces termes, la fonction

$$\frac{- n^2 \cdot m' \cdot a^2 \cdot a' \cdot s'}{[a^2 - 2 a a' \cdot \cos(n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) + a'^2]^{\frac{1}{2}}}$$

devient

devient

$$- n^2 m' \cdot \frac{a^2}{a'^2} \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(3)} \cdot s' \cdot \cos. 3 (n t - n' t + \epsilon - \epsilon');$$

$$\text{or on a } s' = (l' - l) \cdot \sin. (n' t + \epsilon' + q t - \Lambda);$$

la fonction précédente donnera donc le terme

$$\frac{n^2 m' a^2}{2 a'^2} \cdot (l' - l) \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(3)} \cdot \sin. (3 n t - 4 n' t + 3 \epsilon - 4 \epsilon' - q t + \Lambda).$$

En le substituant dans l'équation différentielle en s , on aura après les intégrations,

$$s = \frac{n^2 m' a^2 \cdot (l' - l) \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(3)} \cdot \sin. (3 n t - 4 n' t + 3 \epsilon - 4 \epsilon' - q t + \Lambda)}{2 a'^2 \cdot [(3 n - 4 n' - q)^2 - N^2]}.$$

Il est clair que les différentes valeurs de q , & de $l' - l$, donneront dans l'expression de s , autant de termes semblables au précédent.

Le diviseur $(3 n - 4 n' - q)^2 - N^2$ est égal à $(3 n - 4 n' - N - q) \cdot (3 n - 4 n' + N - q)$. q étant fort petit relativement à n , N étant très-peu différent de n , & n étant à peu-près égal à $2 n'$; le facteur $3 n - 4 n' - N - q$, est fort petit, & le facteur $3 n - 4 n' + N - q$, est à peu-près égal à $2 n$; en sorte que le diviseur précédent se réduit à peu-près à $2 n \cdot (3 n - 4 n' - N - q)$; ce qui donne

$$s = \frac{n' a^2 n \cdot (l' - l) \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(3)} \cdot \sin. (3 n t - 4 n' t + 3 \epsilon - 4 \epsilon' - q t + \Lambda)}{4 a'^2 \cdot (3 n - 4 n' - N - q)}.$$

Ces inégalités de s surpassent considérablement toutes les autres qui résultent de l'action des Satellites sur m , à cause de la petitesse du diviseur $3 n - 4 n' - N - q$; ce sont par conséquent les seules dues à cette action, auxquelles il soit nécessaire d'avoir égard; mais l'action du Soleil produit dans la valeur de s , une inégalité que

Mém. 1788.

Q q

la petitesse de son diviseur peut rendre sensible. Pour la déterminer, nous observerons que la fonction

$$-n^2 \cdot m' \cdot a^2 \cdot a' \cdot s'$$

$$[a^2 - 2aa' \cdot \cos. (n't - nt + \epsilon - \epsilon') + a'^2]^{\frac{1}{2}}$$

devient relativement au Soleil,

$$- \frac{n^2 \cdot S \cdot a^2 \cdot s'}{D'^2} \cdot [1 + \frac{3a}{D'} \cdot \cos. (nt - Mt + \epsilon - A)];$$

$$\text{or on a ici } s' = (L' - l) \cdot \sin. (Mt + A + qt - \Lambda);$$

on a de plus, $n^2 \cdot a^3 = 1$ & $\frac{S}{D'^3} = M^2$; la fonction précédente donnera donc le terme

$$\frac{3}{2} : M^2 \cdot (L' - l) \cdot \sin. (nt - 2Mt + \epsilon - 2A - qt + \Lambda);$$

en le substituant dans l'équation différentielle en s , on aura après les intégrations,

$$s = \frac{3 M^2 \cdot (L' - l) \cdot \sin. (nt - 2Mt + \epsilon - 2A - qt + \Lambda)}{2 \cdot [(n - 2M - q)^2 - N^2]};$$

or on a

$$(n - 2M - q)^2 - N^2 = (n - 2M - N - q) \cdot (n - 2M + N - q).$$

Le facteur $n - 2M - N - q$, est très-petit, & le facteur $n - 2M + N - q$, est à fort peu-près égal à $2n$; en réunissant donc les parties périodiques de s , qui sont dues à l'action des Satellites & du Soleil, & qui peuvent être sensibles, on aura

$$s = \frac{m' \cdot a^2 \cdot n \cdot (l' - l) \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot \sin. (3nt - 4n't + 3\epsilon - 4\epsilon' - qt + \Lambda)}{4a'^2 \cdot (3n - 4n' - N - q)} + \frac{3 M^2 \cdot (L' - l) \cdot \sin. (nt - 2Mt + \epsilon - 2A - qt + \Lambda)}{4n \cdot (n - 2M - N - q)}.$$

Cette valeur de s est la partie périodique de la latitude du Satellite m , au-dessus de son orbite primitive; il est clair qu'en l'ajoutant à la valeur de s , déterminée dans

l'article précédent; on aura l'expression complète de la latitude du premier Satellite au-dessus de l'orbite de Jupiter. On déterminera la valeur de $b_{\frac{1}{2}}^{(3)}$ au moyen de la formule

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{7 \cdot (1 + a^2) \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(3)} - 14 a \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{(1 - a^2)^2},$$

qu'il est aisé de conclure des formules de l'art. VI.

Considérons de la même manière les inégalités périodiques du mouvement en latitude du second Satellite, au-dessus du plan de son orbite primitive. L'équation différentielle en s , deviendra relativement au second Satellite, en n'ayant égard qu'à l'action du premier;

$$0 = \frac{\partial \partial s'}{\partial t^2} + N'^2 \cdot s' - \frac{2 n'^2 \cdot (\rho - \frac{1}{2} \phi)}{a'^2} \cdot s',$$

$$+ \frac{n'^2 \cdot m a'^2}{a^2} \cdot s' - \frac{n'^2 \cdot m a'^2 \cdot a \cdot s}{[a^2 - 2 a a' \cdot \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) + a'^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

N' étant à très-peu-près égal à n' . $[1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \phi)}{a'^2}]$.

Les termes de cette équation différentielle, qui dépendent de l'angle $2 n t - 3 n' t + 2 \epsilon - 3 \epsilon'$, acquièrent un grand diviseur par les intégrations, & méritent par cette raison d'être conservés. En ne considérant que ces termes, on trouvera

$$s' = \frac{m a \cdot n' \cdot (1 - l') \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{4 a' \cdot (2 n - 3 n' - N' - q)} \cdot \sin. (2 n t - 3 n' t + 2 \epsilon - 3 \epsilon' - q t + \Lambda).$$

L'action du troisième Satellite ajoute encore à l'expression de s' , un terme qui peut devenir sensible par son grand diviseur, & qui est analogue à celui que l'action de m' sur m , produit dans l'expression de s ; en nommant donc $b_{\frac{1}{2}}^{(3)}$, ce que devient $b_{\frac{1}{2}}^{(3)}$, relativement au second & au

troisième Satellite, on aura pour la partie de s' , dépendante de l'action de m'' ,

$$s' = \frac{m'' a'^2 . n' . (l' - l') . b'^{\frac{(3)}{2}} . \sin . (3 n' t - 4 n'' t + 3 \epsilon' - 4 \epsilon'' - q t + \Lambda)}{4 a'^2 . (3 n' - 4 n'' - N' - q)} .$$

On a par l'art. IV,

$$2 n - 3 n' = 3 n' - 4 n'' ;$$

$$\begin{aligned} & \sin . (2 n t - 3 n' t + 2 \epsilon - 3 \epsilon' - q t + \Lambda) \\ & = \sin . (3 n' t - 4 n'' t + 3 \epsilon' - 4 \epsilon'' - q t + \Lambda) ; \end{aligned}$$

on pourra donc ainsi réduire dans un seul, les deux termes de l'expression de s' , qui dépendent de l'action du premier & du troisième Satellite; & en y joignant le terme qui dépend de l'action du Soleil, on aura pour l'expression complète des inégalités périodiques du mouvement du second Satellite en latitude,

$$\begin{aligned} s' = n' . & \frac{\left[\frac{m . a}{a'} . (l - l') . b'^{\frac{(3)}{2}} + m'' . \frac{a'^2}{a'^2} . (l' - l') . b'^{\frac{(3)}{2}} \right]}{4 . (2 n - 3 n' - N' - q)} . \\ & \sin . (2 n t - 3 n' t + 2 \epsilon - 3 \epsilon' - q t + \Lambda) : \\ & + \frac{3 M^2 . (L' - l') . \sin . (n' t - 2 M t + \epsilon' - 2 A - q t + \Lambda)}{4 n' . (n' - 2 M - N' - q)} . \end{aligned}$$

On trouvera de la même manière, pour la partie périodique de s'' , qui peut être sensible,

$$\begin{aligned} s'' = & \frac{m^a a' . n'' . (l' - l') . b'^{\frac{(3)}{2}}}{4 a'' . (2 n' - 3 n'' - N'' - q)} . \\ & \sin . (2 n' t - 3 n'' t + 2 \epsilon' - 3 \epsilon'' - q t + \Lambda) \\ & + \frac{3 M^2 . (L' - l') . \sin . (n'' t - 2 M t + \epsilon'' - 2 A - q t + \Lambda)}{4 n'' . (n'' - 2 M - N'' - q)} ; \end{aligned}$$

N'' pouvant être supposé à très-peu-près égal à

$$n'' . \left[1 + \frac{(p - \frac{1}{2} \phi)}{a'^2} \right] .$$

Enfin, on aura pour la partie périodique sensible de s''' ,

$$s''' = \frac{3 M^2 \cdot (L' - l''') \cdot \sin. (n''' t - 2 M t + \epsilon''' - 2 A - q t + \Lambda)}{4 n''' \cdot (n''' - 2 M - N'' - q)};$$

N''' pouvant être supposé à très-peu-près égal à

$$n'' \cdot \left[1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a''^2} \right].$$

XII.

De la durée des Éclipses des Satellites.

Nous n'observons point immédiatement le mouvement des Satellites de Jupiter autour de cette planète; leur élongation vue de la Terre est si petite, que les plus légères erreurs dans les observations en produisent de plusieurs degrés dans leurs mouvemens jovicentriques; mais leurs éclipses offrent un moyen incomparablement plus exact pour déterminer ces mouvemens, & c'est à l'observation de ces phénomènes, que nous devons la connoissance de leurs inégalités. Jupiter projette derrière lui, relativement au Soleil, un cône d'ombre dans lequel les Satellites se plongent près de leur conjonction; les orbites des trois premiers Satellites sont toujours inclinées à l'orbite de Jupiter, de manière que ces Satellites s'éclipsent à chaque révolution; mais le quatrième cesse souvent de s'éclipser, & cela joint à la durée de sa révolution, rend ses éclipses plus rares que celles des autres Satellites.

Un Satellite disparoit à nos yeux avant qu'il soit entièrement plongé dans l'ombre de Jupiter. Sa lumière affoiblie par la pénombre, & parce que son disque s'enfonce de plus en plus dans l'ombre de la planète, devient insensible avant qu'il soit totalement éclipsé. Au moment où nous cessons de le voir, son centre est donc à une certaine distance du cône d'ombre de Jupiter, & si l'on conçoit à cette distance, un nouveau cône d'ombre qui ait le même axe que le cône réel, & qui s'appuie comme lui sur

Jupiter; l'entrée du Satellite dans ce cône fictif, & sa sortie, détermineront pour nous son immersion & son émerfion.

Ce cône fictif n'est pas le même pour tous les Satellites; il dépend de leur distance apparente à Jupiter, de l'aptitude plus ou moins grande à réfléchir la lumière dont jouissent les parties du disque que nous voyons les dernières dans l'immersion, & celles que nous voyons les premières dans l'émerfion; il dépend des distances de Jupiter au Soleil & à la Terre, distances qui par leurs variations, changent l'intensité de la lumière que nous recevons des Satellites; enfin, il peut dépendre des variations de l'atmosphère de Jupiter. La plus grande durée des éclipses d'un Satellite ne peut donc point nous faire connoître exactement celles des autres Satellites; mais la comparaison de ces durées doit nous éclairer sur l'influence des diverses causes que nous venons d'indiquer. La force des instrumens dont se sert l'observateur, l'élévation de Jupiter sur l'horizon, la pureté de l'atmosphère terrestre, font varier encore les cônes d'ombre fictifs. Toutes ces causes répandent de l'incertitude sur les observations des éclipses des Satellites, & principalement sur celles du troisième & du quatrième. Heureusement, on peut observer assez fréquemment l'immersion & l'émerfion de ces deux Satellites, dans les mêmes éclipses, ce qui donne l'instant de leur conjonction d'une manière assez précise, & indépendante de la plupart des causes dont nous venons de parler.

Maintenant, soit $2a$ la plus grande largeur du cône d'ombre fictif d'un Satellite, dans la partie où il est traversé par ce Satellite; soit au moment de la conjonction, Z la hauteur du Satellite au-dessus de l'orbite de Jupiter, & r sa distance au centre de cette planète; si dans cet instant on fait passer par le centre du Satellite, un plan perpendiculaire à l'orbite de Jupiter & à l'axe du cône d'ombre, la section de ce cône par ce plan fera, à fort peu-près, une ellipse semblable au méridien de Jupiter dont on

peut supposer ici l'équateur confondu avec le plan de son orbite, à cause du peu d'inclinaison respective de ces deux plans. Il résulte de l'*art. III*, que le rayon de l'équateur de Jupiter étant pris pour unité, son demi-petit axe est à fort peu-près $1 - \rho$; ainsi α sera le demi-grand axe de la section précédente, & $(1 - \rho) \cdot \alpha$ sera son demi-petit axe. Soient x, y, z , les trois coordonnées du Satellite au moment de son émerfion, le plan des x & des y étant celui de l'orbite de Jupiter, & l'axe des x étant l'axe même du cône d'ombre; on aura à très-peu-près,

$$(1 - \rho)^2 \cdot (\alpha^2 - y^2) = z^2.$$

La valeur de α dans cette équation, n'est pas rigoureusement la même que la plus grande largeur de la section qui passe par le Satellite au moment de son émerfion, mais la différence est insensible, comme nous le verrons bientôt.

Nommons v_1 , l'angle décrit autour de Jupiter par le Satellite, depuis sa conjonction jusqu'à son émerfion, en vertu de son mouvement synodique; le rayon vecteur r , variant fort peu dans cet intervalle, on aura

$$y^2 + (Z - z)^2 = r^2 \cdot \sin. v_1^2;$$

mais on a à très-peu-près,

$$z = Z + \sin. v_1 \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial v} \right);$$

en négligeant donc les quantités de l'ordre $Z^2 \cdot \sin. v_1^2$, on aura $y^2 = r^2 \cdot \sin. v_1^2$, & par conséquent,

$$(1 - \rho)^2 \cdot (\alpha^2 - r^2 \cdot \sin. v_1^2) = Z^2 + 2Z \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial v} \right) \cdot \sin. v_1;$$

d'où l'on tire,

$$\sin. v_1 = - \frac{Z \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial v} \right)}{(1 - \rho)^2 \cdot r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{Z}{(1 - \rho) \cdot r} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{Z}{(1 - \rho) \cdot r} \right)}.$$

s étant le sinus de la latitude du Satellite au-dessus de l'orbite de Jupiter, à l'instant de la conjonction, on a $Z = rs$; on aura donc

$$\sin. v_i = - \frac{s \cdot \frac{\partial s}{(1-\rho)^2 \cdot \partial v}} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{s}{1-\rho}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{s}{1-\rho}\right)};$$

cette expression prise avec le signe $+$, indique le sinus de l'arc décrit par le Satellite, en vertu de son mouvement synodique, depuis la conjonction jusqu'à l'émergence; avec le signe $-$, cette expression indique le sinus de ce même arc, depuis l'immersion jusqu'à la conjonction, pris négativement.

Soit T le temps que le Satellite emploie à décrire la demi-largeur α , du cône d'ombre, en vertu de son moyen mouvement synodique; & t le temps qu'il met à décrire l'angle v_i ; la vitesse angulaire du Satellite étant $\frac{\partial v}{\partial t}$,

nous ferons $\frac{\partial v}{\partial t} = 1 - X$, X étant une très-petite quantité. De plus, a étant la moyenne distance du Satellite à Jupiter, $\frac{\alpha}{a}$ est le sinus de l'angle sous lequel la demi-largeur α seroit vue à cette distance; soit ζ cet angle, on aura à très-peu-près,

$$t = \frac{T \cdot v_i}{\zeta} \cdot (1 + X).$$

Si l'on substitue dans cette expression, au lieu de v_i , son sinus qui en diffère très-peu; au lieu de $\sin. v_i$, la valeur précédente, & ζ au lieu de $\frac{\alpha}{a}$; on aura

$$t = T \cdot (1 + X) \cdot \left\{ \frac{s \cdot \frac{\partial s}{\partial v}}{(1-\rho)^2 \cdot \zeta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{s}{(1-\rho) \cdot \zeta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{s}{(1-\rho) \cdot \zeta}\right)} \right\}.$$

Si l'on

Si l'on n'a égard qu'aux équations du centre des Satellites, on a, comme l'on fait, $r = a. (1 + \frac{1}{2} X)$. Il résulte encore de l'article V, qu'en ayant égard aux principales inégalités des Satellites, la même équation subsiste toujours; on aura donc à très-peu-près,

$$t = T. (1 + X). \left\{ \frac{-s. \frac{\partial s}{\partial v}}{(1 - \rho)^2. c} \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} X + \frac{s}{(1 - \rho). c}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} X - \frac{s}{(1 - \rho). c}\right)} \right\}.$$

Si l'on nomme t' , la durée entière de l'éclipse, on aura,

$$t' = 2 T. (1 + X). \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} X + \frac{s}{(1 - \rho). c}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} X - \frac{s}{(1 - \rho). c}\right)};$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{(1 - \rho). c. \sqrt{[4 T^2. (1 + X) - t'^2]}}{2 T. (1 + X)}.$$

Cette équation servira à déterminer les constantes arbitraires que renferme l'expression de s , au moyen des durées observées des éclipses.

Les durées des éclipses des Satellites étant un des points les plus importans de leur théorie, nous allons discuter particulièrement les formules précédentes. La demi largeur α du cône d'ombre, aux points où il est traversé par le Satellite, doit varier avec les distances du Satellite à Jupiter & de Jupiter au Soleil. Soit j le diamètre de Jupiter, & S celui du Soleil; la distance du centre de Jupiter au sommet du cône d'ombre sera $\frac{j D}{S - j}$; le diamètre de la section de ce cône, par un plan perpendiculaire à son axe, & qui passe par le centre du Satellite, sera donc

$$j. \left[1 - \frac{(S - j)}{j} \cdot \frac{r}{D} \right]. \text{ Soit } r = a + \delta r;$$

$$D = D' + \delta D, \text{ } a \text{ \& } D' \text{ étant les moyennes distances}$$

Mém. 1788.

R r

du Satellite à Jupiter & de Jupiter au Soleil ; il est clair que la variation de 2α , due aux variations de r & de D , fera

$$(\mathcal{S} - j) \cdot \left(\frac{a \cdot \delta D}{D^2} - \frac{\delta r}{D'} \right).$$

Pour avoir la variation qui en résulte dans la durée $2T$, nous observerons que cette quantité exprimant la durée entière de l'éclipse du Satellite, lorsqu'il est dans ses nœuds, elle est à fort peu-près proportionnelle à

$j \cdot \left[1 - \frac{(\mathcal{S} - j)}{j} \cdot \frac{a}{D'} \right]$; la variation de $2T$, correspondante à celle de 2α , fera donc à fort peu-près

$$2T \cdot \frac{(\mathcal{S} - j)}{j} \cdot \left(\frac{a \cdot \delta D}{D^2} - \frac{\delta r}{D'} \right),$$

la fraction $\frac{(\mathcal{S} - j)}{j} \cdot \frac{a}{D'}$, étant fort petite, & pouvant être négligée vis-à-vis de l'unité. Considérons d'abord le terme

$$2T \cdot \frac{(\mathcal{S} - j)}{j} \cdot \frac{a \cdot \delta D}{D^2}.$$

δD est égal à D' , multiplié par l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & par le cosinus de son anomalie moyenne ; & si l'on nomme A' cette anomalie, on aura

$$\delta D = 0,0480767 \cdot D' \cdot \cos A'.$$

Le diamètre de Jupiter réduit à la moyenne distance du Soleil à la Terre, est de $203''$, à fort peu-près, & celui du Soleil observé à la même distance, est de $1924''$; le terme précédent devient ainsi,

$$2T \cdot 0,40759 \cdot \frac{a}{D'} \cdot \cos A'.$$

Relativement au quatrième Satellite,

$$2T = 4^h 46' = 17160''.$$

La plus grande élongation du quatrième Satellite, réduite à la moyenne distance de Jupiter au Soleil, a été trouvée

par Pound, de $8' 16''$, ce qui donne $\frac{a}{D} = \text{tang. } 8' 16''$; le terme précédent devient ainsi, $16'',8 \cdot \cos. A'$; c'est la quantité qu'il faut ajouter à la valeur moyenne de $2 T$.

Il faut corriger encore cette valeur par cette considération, que le temps employé à décrire 2α est proportionnel à cette quantité divisée par la vitesse angulaire synodique du Satellite. Cette vitesse est $\frac{\partial v_1}{\partial t}$, & elle est égale à $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \Pi}{\partial t}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ étant la vitesse angulaire de Jupiter autour du Soleil; en substituant pour $\frac{\partial v}{\partial t}$ sa valeur moyenne n , & pour $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ sa valeur approchée $M \cdot (1 - 2 E \cdot \cos. A')$, E étant l'excentricité de l'orbite de Jupiter, on aura

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = n - M + 2 E M \cdot \cos. A';$$

le terme $2 T$ fera donc proportionnel à

$$\frac{2 \alpha}{n - M + 2 E M \cdot \cos. A'};$$

il faudra par conséquent ajouter à la valeur moyenne de $2 T$ la quantité

$$- 2 T \cdot \frac{2 M}{n - M} \cdot E \cdot \cos. A'.$$

Cette quantité pour le quatrième Satellite, est égale à $- 6'',4 \cdot \cos. A'$; en l'ajoutant à $+ 16'',8 \cos. A'$, on aura $+ 10'',4 \cos. A'$ pour la correction que la valeur de $2 T$ doit subir à raison de l'excentricité de l'orbite de Jupiter; mais les erreurs des observations étant beaucoup plus grandes que cette correction, on peut se dispenser d'y avoir égard. Cette correction est insensible relativement aux autres Satellites.

Quant au terme

$$- 2 T. \frac{(S-j)}{j} \cdot \frac{\delta r}{D'},$$

on trouvera qu'en y substituant les valeurs de δr , que nous donnerons dans la suite, cette correction est insensible.

Les variations de l'angle \mathcal{C} sont très-sensibles vers les limites où le quatrième Satellite commence & cesse de s'éclipser, mais les observations de ces durées étant fort incertaines, il est inutile, dans l'expression de ces durées, d'avoir égard aux changemens que \mathcal{C} reçoit de la variation des distances de Jupiter au Soleil.

Nous avons supposé dans ce qui précède, que la largeur de la section du cône d'ombre par un plan perpendiculaire à son axe, & qui passe par le Satellite au moment de son émerfion, étoit à peu-près la même que la largeur de la section qui passe par le Satellite au moment de sa conjonction. Le plan de la section est dans le premier cas, plus rapproché de Jupiter que dans le second cas, d'une quantité égale au produit de la distance du Satellite à Jupiter, par le sinus versé de l'arc qu'il décrit depuis sa conjonction jusqu'à son émerfion. En nommant q ce sinus, la correction de la valeur de $2 T$, relative à cette différence de largeur des deux sections, sera

$$+ 2 T. \left(\frac{S-j}{j} \right) \cdot \frac{a \cdot q}{D'},$$

& l'on trouve qu'elle est insensible.

Nous avons encore dans ce qui précède, confondu l'arc v , avec son sinus; mais on a à très-peu-près $v = \sin. v$, $+ \frac{1}{6} \cdot \sin. v^3$. Il en résulte que la valeur précédente de t' doit être multipliée par $1 + \frac{1}{6} \cdot \sin. v^2$. Relativement au premier Satellite, v , est d'environ 9 degrés, ce qui rend sensible le produit de t' par $\frac{1}{6} \cdot \sin. v^2$; mais cette erreur est corrigée en grande partie, par la supposition que nous

avons faite de $\frac{a}{a} = \mathcal{C}$, car $\frac{a}{a} = \sin. \mathcal{C}$; nous aurions dû par conséquent supposer $\frac{a}{a} = \mathcal{C} - \frac{1}{6} \cdot \sin. \mathcal{C}^3$, ce qui revient à peu-près à multiplier la valeur de t' par $1 - \frac{1}{6} \cdot \sin. \mathcal{C}^2$, parce que le terme $\frac{-s^2}{(1-\rho)^2 \cdot \mathcal{C}^2}$ compris sous le radical de l'expression de t' étant une petite fraction dans la théorie du premier Satellite, on peut négliger son produit par $\frac{1}{6} \cdot \sin. \mathcal{C}^2$. La valeur de t' , déterminée par la formule précédente, doit donc être multipliée par $1 + \frac{1}{6} \cdot \sin. v_1^2 - \frac{1}{6} \cdot \sin. \mathcal{C}^2$. L'arc v , différant toujours fort peu de \mathcal{C} relativement au premier Satellite, le produit de t' par $\frac{1}{6} (\sin. v_1^2 - \sin. \mathcal{C}^2)$ est insensible. On voit ainsi que les expressions précédentes de t & de t' ont la précision convenable, & peuvent être employées dans la théorie des quatre Satellites, sans crainte d'aucune erreur sensible, sur-tout si l'on prend pour s la latitude même du Satellite.

X I I I.

Des inégalités des Satellites, dependantes des carrés & des produits des forces perturbatrices.

Nous n'avons eu égard jusqu'à présent, qu'aux inégalités des Satellites qui dépendent de la première puissance des forces perturbatrices; mais les rapports qui existent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, donnent une valeur sensible à plusieurs inégalités dépendantes des carrés & des produits de ces forces: c'est dans les inégalités de cet ordre, qu'il faut chercher la cause des deux rapports singuliers dont nous avons fait mention dans l'article V, & qui consistent, 1.^o en ce que le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troisième, est égal à trois fois le moyen mouvement du second Satellite; 2.^o en ce que la longitude moyenne du

premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement & constamment égale à 180 degrés. Ces deux théorèmes sont donnés par les observations d'une manière si approchée, qu'il y a tout lieu de croire qu'ils sont rigoureux, & que l'on doit rejeter sur l'incertitude des tables des Satellites, la différence très-petite qu'elles offrent à cet égard. Il est contre toute vraisemblance de supposer qu'à l'origine, les trois premiers Satellites aient été placés exactement aux distances que ces théorèmes exigent : il est donc extrêmement probable qu'ils sont le résultat de l'action mutuelle des Satellites ; & comme les premières puissances de leurs forces attractives ne donnent aucun terme d'où ils puissent résulter, il est naturel d'en chercher la cause dans les carrés & les produits de ces forces. Nous allons donc déterminer avec soin toutes les inégalités de cet ordre, qui peuvent influer d'une manière sensible sur le mouvement des Satellites.

Considérons les deux équations suivantes auxquelles nous sommes parvenus dans l'article II.

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial^2 \cdot r^2}{\partial t^2} - 2 \cdot \frac{(1+m)}{r} + 2 \cdot \frac{(1+m)}{a} + 4 \cdot \int dR \\
 &+ 2 \cdot \left[x \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \right]; \\
 0 &= \frac{r \cdot \partial \partial r - r^2 \partial v^2}{\partial r^2} + \frac{(1+m)}{r} + x \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) \\
 &+ z \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

Supposons qu'en vertu des perturbations, r se change dans $r + \delta r + \delta' r$, r étant dans cette dernière quantité, le rayon vecteur relatif au mouvement elliptique, δr étant la partie du rayon vecteur, due à la première puissance des forces perturbatrices, & $\delta' r$ étant la partie de ce rayon, due aux carrés & aux produits de ces forces. Supposons encore que ∂v se change dans $\partial v + \partial \cdot \delta v + \partial \cdot \delta' v$, ∂v étant dans cette dernière quantité, relatif

au mouvement elliptique, $\partial \Delta v$ étant la partie de ∂v due à la première puissance des forces perturbatrices, & $\partial . \Delta' v$ étant la partie de ∂v due aux carrés & aux produits de ces forces. Si l'on substitue pour r & ∂v ces valeurs dans les deux équations différentielles précédentes, & si l'on observe que par la nature du mouvement elliptique & des fonctions Δr & $\partial . \Delta v$, les termes indépendans des forces perturbatrices, & ceux qui ne dépendent que de la première puissance de ces forces, doivent disparaître d'eux-mêmes, on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 . (r \Delta' r + \frac{1}{2} . \Delta' r^2)}{\partial t^2} + \frac{(1+m) . r . \Delta' r}{r^3} - \frac{(1+m) . \Delta' r^2}{r^3} \\ &+ 2 . \int d . R + x . \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) . \\ &\quad r . \partial \partial . \Delta' r + \Delta' r . \partial \partial r + \Delta' r . \partial \partial . \Delta' r - 2 r^2 \partial v . \partial \Delta' v - 2 r \Delta' r . \partial v^2 \\ &- r^2 (\partial \Delta' v)^2 - 4 r \partial v . \Delta' r . \partial \Delta' v - \Delta' r^2 \partial v^2 \\ 0 &= \frac{\partial^2 . (r \Delta' r + \frac{1}{2} . \Delta' r^2)}{\partial t^2} \\ &- \frac{(1+m) . r . \Delta' r}{r^3} + \frac{(1+m) . \Delta' r^2}{r^3} + x . \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) \\ &+ y . \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) , \end{aligned}$$

en observant de ne conserver dans les fonctions $\int d R$ & $x . \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)$, que les termes dépendans des carrés & des produits des forces perturbatrices.

Les propriétés du mouvement elliptique donnent

$$\begin{aligned} \frac{r^2 . \partial v}{\partial t} &= V [(1+m) . a . (1 - e^2)] ; \\ \frac{r . \partial v^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial \partial r}{\partial t^2} + \frac{1+m}{r^2} ; \end{aligned}$$

en substituant ces valeurs dans la seconde des deux équations différentielles précédentes, & en y mettant, au lieu de $\frac{(1+m) . r . \Delta' r}{r^3}$, la valeur tirée de la première,

ou aura

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \delta' v}{\delta t} \cdot \sqrt{[(1 + m) \cdot a \cdot (1 - c^2)]} \\
= & \frac{\partial \cdot (r \cdot \partial \cdot \delta' r - \delta' r \cdot \partial r)}{\delta t^2} + 3 \cdot \frac{\partial^2 \cdot (r \delta' r + \frac{1}{2} \cdot \delta' r^2)}{\delta t^2} \\
& - \frac{2 \cdot (1 + m) \cdot \delta' r^2}{r^3} + 6 \cdot \int dR + 4 \cdot [x \cdot (\frac{\partial R}{\partial x}) \\
& + y \cdot (\frac{\partial R}{\partial y}) + z \cdot (\frac{\partial R}{\partial z})] \\
& + \frac{\delta' r \cdot \partial \cdot \delta \cdot \delta' r - r^2 \cdot (\partial \cdot \delta' v)^2 - 4 r \partial v \cdot \delta' r \cdot \partial \delta' v - \partial v^2 \cdot \delta' r^2}{\delta t^2}
\end{aligned}$$

Considérons dans cette expression de $\frac{\partial \cdot \delta' v}{\partial t}$, les termes qui dépendent de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t$. Il est visible que les termes de ce genre renfermés dans la différentielle dR , acquièrent par l'intégration, le diviseur $n - 3 n' + 2 n''$, dans l'intégrale $\int dR$. Il en résulte dans l'expression de $\frac{\partial \cdot \delta' v}{\partial t}$, des termes dépendans du même angle, & qui ont le même diviseur; ce qui donne dans $\delta' v$, des termes qui ayant pour diviseur $(n - 3 n' + 2 n'')^2$, peuvent devenir très-considérables, & méritent une grande attention. Analysons ces différens termes.

Il est clair par la seule inspection de l'équation différentielle en $r \delta' r$, que $\delta' r$ renferme des termes dépendans de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t$, & qui ont pour diviseur $n - 3 n' + 2 n''$; on peut s'assurer encore qu'en négligeant les carrés & les produits des excentricités des orbites, $\delta' r$ ne contient point de termes qui aient pour diviseur $(n - 3 n' + 2 n'')^2$; en substituant les termes de son expression, qui ont pour diviseur $n - 3 n' + 2 n''$, dans la fonction, $\frac{\partial (r \partial \cdot \delta' r - \delta' r \cdot \partial r)}{\delta t^2}$, ce diviseur disparaît; on peut donc négliger cette fonction dans l'expression

l'expression de $\frac{\partial \cdot \delta' v}{\partial t}$. On peut négliger par la même raison, la fonction $\frac{3 \cdot \partial^2 (r \delta' r + \frac{1}{2} \cdot \delta' r^2)}{\partial t^2}$.

La fonction $4 \cdot [x \cdot (\frac{\partial R}{\partial x}) + y \cdot (\frac{\partial R}{\partial y}) + z \cdot (\frac{\partial R}{\partial z})]$, contient des termes dépendans de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t$; mais ces termes n'ayant point pour diviseur $n - 3 n' + 2 n''$, ils disparaissent devant ceux du même genre, que renferme l'intégrale $\int d R$, & qui ont ce diviseur.

La fonction

$$-\frac{2 \cdot (1+m) \cdot \delta' r^2}{r^3} + \frac{\delta' r \cdot \partial \delta' r - r^2 \cdot (\partial \delta' v)^2 - 4 r \cdot \partial v \cdot \delta' r \cdot \partial \delta' v - \delta' r^2 \cdot \partial v^2}{\partial t^2}$$

ne renferme aucun terme qui ait pour diviseur $n - 3 n' + 2 n''$, puisque les termes de ce genre ne se rencontrent point dans les expressions de $\delta' r$ & de $\delta' v$. Dans la théorie du second satellite, cette fonction devient

$$-\frac{2 \cdot (1+m') \cdot \delta' r^2}{r^3} + \frac{\delta' r \cdot \partial \delta' r - r^2 \cdot (\partial \delta' v')^2 - 4 r \cdot \partial v' \cdot \delta' r \cdot \partial \delta' v' - \delta' r^2 \cdot \partial v'^2}{\partial t^2}$$

On a vu dans l'*art. V*, que la valeur de $\delta' r$ est composée de deux termes, dont le premier dépend du cosinus de l'angle $n t - n' t + \epsilon - \epsilon'$, & a pour diviseur $n - n' - N'$, & dont le second dépend du cosinus de l'angle $2 n' t - 2 n'' t + 2 \epsilon' - 2 \epsilon''$, & a pour diviseur $2 n' - 2 n'' - N''$: il suit de-là que $\delta' r^2$ contient un terme dépendant du cosinus de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t + \epsilon - 3 \epsilon' + 2 \epsilon''$, & qui a pour diviseur $(n - n' - N') \cdot (2 n' - 2 n'' - N'')$. Ce diviseur étant très-petit, ce terme devient assez sensible pour y avoir égard. On trouvera pareillement que $\frac{(\partial \cdot \delta' v)^2}{\partial t^2}$

renferme un terme semblable, ayant le même diviseur, & que la même chose a lieu pour les différens termes

Mém. 1788.

S f

de la fonction précédente; mais on doit observer que l'on a, à-très-peu-près, par l'*art. V*,

$$\frac{\partial \mathcal{A} v'}{\partial t} = - \frac{2 n' \cdot \mathcal{A} r'}{a'}; \quad \frac{\partial \partial \mathcal{A} r'}{\partial t^2} = - n'^2 \cdot \mathcal{A} r';$$

en substituant ces valeurs dans la fonction précédente,

$$\& \text{ en y faisant } r' = a'; \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = n'; \quad \frac{1+m'}{a'^3} = n'^3;$$

on trouvera qu'elle se réduit à zéro.

On voit ainsi qu'en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t$, & qui ont pour diviseur $n - 3 n' - 2 n''$, & en négligeant les carrés & les produits des excentricités des orbites; l'expression de $\frac{\partial \cdot \mathcal{A} v}{\partial t}$ se réduit à la suivante :

$$\frac{\partial \cdot \mathcal{A} v}{\partial t} = \frac{3 \cdot \int d R}{\sqrt{(1+m) \cdot a}};$$

d'où l'on tire, en négligeant m vis-a-vis de l'unité, & en observant que $n^2 = \frac{1}{a^3}$,

$$\frac{\partial \partial \cdot \mathcal{A} v}{\partial t^2} = \frac{3 a n \cdot d R}{\partial t}.$$

Développons maintenant les différens termes de $d R$, qui dépendent de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t + \epsilon - 3 \epsilon' + 2 \epsilon''$; & pour abrégér, désignons cet angle par ϕ . Si l'on n'a égard qu'à l'action du second Satellite sur le premier, on a par l'*art. IV*,

$$R = - \frac{m'}{2} \cdot B^{(0)} + m' \cdot \left(\frac{r}{r'^2} - B^{(1)} \right).$$

$$\cos. (v' - v) - m' B^{(2)} \cdot \cos. 2 (v' - v) - \&c.$$

Le terme $m' \cdot \left(\frac{r}{r'^2} - B^{(1)} \right) \cdot \cos. (v' - v)$ de cette expression de R , produit dans $d R$, la fonction différentielle,

$$m'. \partial r. \left[\frac{1}{r^2} - \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r} \right) \right]. \cos. (v' - v)$$

$$+ m'. \partial v. \left(\frac{r}{r^2} - B^{(1)} \right). \sin. (v' - v).$$

Il faut substituer dans cette fonction, au lieu de r , r' , v & v' , les quantités $a + \frac{r \delta r}{a}$, $a' + \frac{r' \delta r'}{a'}$, $nt + \epsilon + \delta v$, & $nt + \epsilon' + \delta v'$. La substitution de $a + \frac{r \delta r}{a}$, au lieu de r , & de $nt + \epsilon + \delta v$, au lieu de v , ne donnera aucun terme dépendant de l'angle ϕ ; il faudroit pour cela, que $\frac{r \delta r}{a}$ & δv , renfermassent des termes dépendans de l'angle $2 n' t - 2 n'' t + 2 \epsilon' - 2 \epsilon''$; parce que ces termes, en se combinant avec ceux qui dépendent de l'angle $nt - n' t + \epsilon - \epsilon'$, dans la fonction précédente, en produiroient d'autres dépendans de l'angle ϕ ; or il est visible par l'*art. IV*, que les valeurs de $\frac{r \delta r}{a}$ & de δv , ne renferment point de termes dépendans de l'angle $2 n' t - 2 n'' t + 2 \epsilon' - 2 \epsilon''$; leur substitution dans la fonction différentielle précédente ne donnera donc point de termes dépendans de l'angle ϕ .

Il n'en est pas de même de la substitution de $a' + \frac{r' \delta r'}{a'}$, au lieu de r' , & de $nt + \epsilon' + \delta v'$, au lieu de v' . En faisant cette substitution dans le terme $m' \partial v. \left(\frac{r}{r^2} - B^{(1)} \right). \sin. (v' - v)$, il en résulte les deux termes suivans,

$$- m'. n \partial t. \frac{r' \delta r'}{a'^2} . \left[\frac{2 a}{a'^2} + a'. \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right].$$

$$\sin. (n' t - nt + \epsilon' - \epsilon)$$

S f ij

$$+ m' . n \partial t . \delta v' . \left(\frac{a}{a'^2} - B^{(1)} \right) .$$

$$\cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) .$$

On a par l'article V, en vertu de l'action du troisième Satellite,

$$\frac{r' \delta' v'}{a'^2} = \frac{-n' . m' . F'}{2 . (n - n' - N')} . \cos. 2 (n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon') ;$$

$$\delta v' = \frac{-n' m' F'}{n - n' - N'} . \sin. 2 (n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon') ;$$

ces valeurs substituées dans les deux termes précédens, donnent le terme

$$\frac{-n n' . m' . m'' . F'}{2 . (n - n' - N')} . \left[\frac{2 a}{a'^2} - B^{(1)} + \frac{1}{2} a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] . \partial t . \sin. \varphi .$$

On a par l'art. V,

$$\frac{G}{2 a'} = \frac{2 a}{a'^2} - B^{(1)} + \frac{1}{2} a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) ;$$

le terme précédent deviendra ainsi, en y substituant $2 n'$, au lieu de n qui en diffère très-peu,

$$- \frac{n'^2 . m' . m'' . F' . G . \delta t . \sin. \varphi}{2 a' . (n - n' - N')} .$$

Ce terme acquiert une valeur sensible, par son très-petit diviseur $n - n' - N'$.

En discutant de la même manière les autres termes de l'expression de R , qui dépendent de l'action de m' , on trouvera qu'ils ne produisent aucun terme sensible dépendant de l'angle φ ; on trouvera pareillement que les termes de R qui dépendent de l'action des Satellites m'' , m''' , du Soleil & de la figure de Jupiter, ne produisent aucun terme sensible du même genre; on aura donc, en n'ayant égard qu'à ces termes, & en changeant n dans $2 n'$,

$$\frac{\partial \partial . \delta' v'}{\partial t^2} = - \frac{3 a n'^3 . m' . m'' . F' G . \sin. \varphi}{a' . (n - n' - N')} .$$

Relativement au second Satellite, on a

$$\frac{\partial \partial \delta' v'}{\partial t^2} = \frac{3 a' n' . d' R'}{\partial t^2} ,$$

R' étant ce que devient R par rapport à ce Satellite, & la caractéristique différentielle d' , se rapportant aux seules coordonnées du même Satellite. Si l'on n'a égard qu'à l'action de m sur m' , on a

$$R' = -\frac{m}{2} \cdot B^{(0)} + m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)} \right) \cdot \cos. (v' - v) \\ - m B^{(2)} \cdot \cos. 2 (v' - v) - \&c.$$

Le terme $m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)} \right) \cdot \cos. (v' - v)$ de cette expression de R' , produit dans $d' R'$ la fonction différentielle

$$m \partial r' \cdot \left[\frac{1}{r^2} - \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r'} \right) \right] \cdot \cos. (v' - v) \\ - m \partial v' \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)} \right) \cdot \sin. (v' - v),$$

& cette fonction développée renferme la suivante,

$$m \cdot \frac{\partial (r' \partial r')}{a'^2} \cdot \left[\frac{a'}{a^2} - a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] \cdot \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\ - m n' \partial t \cdot \frac{r' \partial r'}{a'^2} \cdot \left[\frac{a'}{a^2} - a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] \cdot \sin. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\ - m \partial \cdot \partial v' \cdot \left(\frac{a'}{a^2} - B^{(1)} \right) \cdot \sin. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \\ - m n' \partial t \cdot \partial v' \cdot \left(\frac{a'}{a^2} - B^{(1)} \right) \cdot \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon).$$

En substituant pour $\frac{r' \partial r'}{a'^2}$ & $\partial v'$, leurs valeurs dues à l'action du troisième Satellite, & que nous avons données ci-dessus; en observant de plus que $2 n' - 2 n''$ est très-peu différent de n' ; on trouvera que la fonction précédente renferme la quantité

$$\frac{n'^3 \cdot m \cdot m'' \cdot F'}{n - n' - N'} \cdot \left[\frac{a'}{2a^2} - B^{(1)} + \frac{1}{2} a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] \cdot \partial t \cdot \sin. \varphi;$$

mais on a à très-peu-près, $n^2 = 4n'^2$, & par conséquent $4a^3 = a'^3$, ou $\frac{a'}{2a^2} = \frac{2a}{a'^2}$; le terme précédent deviendra ainsi

$$\frac{n'^3 \cdot m \cdot m'' \cdot F' G \cdot \partial t \cdot \sin. \varphi}{2a' \cdot (n - n' - N')}.$$

On s'assurera facilement que ce terme est le seul sensible que produise la partie de $d' R'$ relative à l'action du premier Satellite.

La partie de R' relative à l'action du troisième Satellite, est

$$R' = -\frac{1}{2} \cdot m'' \cdot B'^{(0)} + m'' \cdot \left(\frac{r'}{r'^2} - B'^{(1)} \right) \cdot \cos. (v'' - v') - m'' \cdot B'^{(2)} \cdot \cos. 2(v'' - v') - \&c.$$

Si l'on n'a égard qu'au terme $-m'' B'^{(2)} \cdot \cos. 2(v'' - v')$ de cette expression, on aura

$$d' R' = -m'' \cdot \partial r' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial r'} \right) \cdot \cos. 2(v'' - v') \\ - 2m'' \cdot B'^{(2)} \partial v' \cdot \sin. 2(v'' - v').$$

Cette fonction différentielle renferme la suivante,

$$-m'' \cdot \frac{\partial (r' \partial r')}{a'^2} \cdot a' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'} \right) \cdot \cos. 2(n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon') \\ - 2m'' \cdot n' \partial t \cdot \frac{r' \cdot \partial r'}{a'^2} \cdot a' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'} \right) \cdot \sin. 2(n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon') \\ - 2m'' \cdot B'^{(2)} \cdot \partial \delta v' \cdot \sin. 2(n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon') \\ + 4m'' \cdot B'^{(2)} \cdot n' \partial t \cdot \delta v' \cdot \cos. 2(n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon').$$

Mais par l'article V, l'action de m sur m' donne

$$\frac{r' \partial r'}{a'^2} = -\frac{n' m G}{2 \cdot (n - n' - N')} \cdot \cos. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon');$$

$\delta v' = \frac{n' m \cdot G}{n - n' - N'} \cdot \sin. (n t - n' t + \epsilon - \epsilon') ;$
la fonction différentielle précédente donnera ainsi le terme

$\frac{n'^2 \cdot m \cdot m'' \cdot G}{2 \cdot (n - n' - N')} \cdot [2 B'^{(2)} + \frac{1}{2} a' \cdot (\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'})] \cdot \partial t \cdot \sin. \varphi ,$
en observant que $n - n' = n''$ à fort peu-près. Or on a par l'art, V,

$$F' = a'^2 \cdot (\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}) + \frac{2 n'}{n' - n''} \cdot a' \cdot B'^{(2)} ;$$

on aura donc à très-peu-près ,

$$\frac{F'}{2 a'} = 2 B'^{(2)} + \frac{1}{2} a' \cdot (\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}) ,$$

ce qui change le terme précédent dans celui-ci ,

$$\frac{n'^2 \cdot m \cdot m'' \cdot F' G}{4 a' \cdot (n - n' - N')} \cdot \partial t \cdot \sin. \varphi .$$

On s'assurera facilement que ce terme est le seul sensible que produise la partie de $d' R'$ relative à l'action du troisième Satellite. Enfin, on trouvera que ni l'action de Jupiter, ni celles du quatrième Satellite & du Soleil, ne produisent aucun terme de ce genre dans la valeur de $d' R'$, en sorte qu'en réunissant les deux termes relatifs à l'action du premier & du troisième Satellite, on aura

$$d' R' = \frac{3 n'^2 \cdot m \cdot m'' \cdot F' G}{4 a' \cdot (n - n' - N')} \cdot \partial t \cdot \sin. \varphi ;$$

d'où l'on tire ,

$$\frac{\partial \delta d' v'}{\partial t^2} = \frac{9 n'^3 \cdot m \cdot m'' \cdot F' G \cdot \sin. \varphi}{4 \cdot (n - n' - N')} ,$$

Il nous reste présentement à considérer la valeur de

$$\frac{\partial \delta d' v''}{\partial t^2} . \text{ On a }$$

$$\frac{\partial \delta d' v''}{\partial t^2} = \frac{3 a'' \cdot n'' \cdot d'' R''}{\partial t} ;$$

R'' étant ce que devient R , relativement au troisième satellite, & la caractéristique différentielle d'' étant uni-

quement relative aux coordonnées de ce satellite. Si l'on n'a égard qu'à l'action du second satellite sur le troisième, on a

$$R'' = - \frac{m'}{2} \cdot B'^{(0)} + m' \cdot \left(\frac{r''}{r^2} - B'^{(1)} \right) \cdot \cos. (v'' - v') - m' \cdot B'^{(2)} \cdot \cos. 2 (v'' - v') - \&c.$$

En ne considérant que le terme $-m' \cdot B'^{(2)} \cdot \cos. 2 (v'' - v')$ de cette expression, on aura

$$d'' \cdot R'' = - m' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial r''} \right) \cdot \partial r'' \cdot \cos. 2 (v'' - v') + 2 m' \cdot B'^{(2)} \cdot \partial v'' \cdot \sin. 2 (v'' - v').$$

Cette fonction différentielle renferme celle-ci,

$$2 m' \cdot \frac{r' \delta r'}{a'^2} \cdot a' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'} \right) \cdot n'' \partial t \cdot \sin. 2 (n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon') - 4 m' \cdot \delta v' \cdot n'' \partial t \cdot B'^{(2)} \cdot \cos. 2 (n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon').$$

En substituant pour $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ & $\delta v'$, les parties de ces valeurs qui sont dues à l'action de m sur m' ; la fonction précédente donnera cette quantité,

$$\frac{-n' \cdot m \cdot m' \cdot G}{2 \cdot (n - n' - N')} \cdot \left[a' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'} \right) + 4 B'^{(2)} \right] \cdot n'' \partial t \cdot \sin. \phi \\ = \frac{-n' \cdot m \cdot m' F' \cdot G}{2 a' (n - n' - N')} \cdot n'' \partial t \cdot \sin. \phi.$$

On s'assurera aisément que ce terme est le seul sensible que produise la partie de $d'' R''$ relative à l'action du second satellite, & que les actions de Jupiter, du Soleil, du premier & du quatrième satellite, n'en produisent point de la même nature, qui soient sensibles; on aura donc en observant que $n' = 2 n''$ à fort peu-près,

$$\frac{\partial \delta d' \cdot v''}{\partial t^2} = \frac{3 a'' \cdot n'^3 \cdot m \cdot m' \cdot F' G \cdot \sin. \phi}{8 a' \cdot (n - n' - N')}.$$

Quant à la valeur de $\frac{\partial \delta d' \cdot v''}{\partial t^2}$, elle ne renferme point

de termes

de termes semblables. Cela posé, on aura

$$\frac{\partial \partial . \mathcal{N} . (\dot{v} - 3 v' + 2 v'')}{\partial t^2} = - \frac{3 n'^3 . F' G}{n - n' - N'} .$$

$$\left(\frac{a}{a'} . m' m'' + \frac{9}{4} . m m'' + \frac{a''}{4 a'} . m m' \right) . \sin . \varphi .$$

Dans le second membre de cette équation, φ est égal à $n t - 3 n' t + 2 n'' t + \epsilon - 3 \epsilon' + 2 \epsilon''$; or cette dernière quantité ne diffère de $v - 3 v' + 2 v''$ que par des termes qui dépendent soit des excentricités & des inclinaisons des orbites, soit des forces perturbatrices; en négligeant donc ces termes, nous pouvons supposer $\varphi = v - 3 v' + 2 v''$: dans ce cas,

$\partial \partial . \mathcal{N} . (v - 3 v' + 2 v'') = \partial \partial \varphi$; ainsi, en faisant, pour abrégér,

$$k = - \frac{3 n' F' G}{n - n' - N'} . \left(\frac{a}{a'} . m' m'' + \frac{9}{4} . m m'' + \frac{a''}{4 a'} . m m' \right);$$

on aura

$$\frac{\partial \partial \varphi}{\partial t^2} = k . n'^2 . \sin . \varphi .$$

X I V.

L'ÉQUATION précédente donne, en l'intégrant;

$$\partial t = \frac{\pm \partial \varphi}{\sqrt{(c - 2 k . n'^2 . \cos . \varphi)}} ,$$

c étant une constante arbitraire dont la valeur peut donner lieu à trois cas différens que nous allons considérer.

1.^o La constante c peut surpasser $2 k n'^2$, abstraction faite du signe; alors elle est nécessairement positive; l'angle $\pm \varphi$ croît indéfiniment & devient successivement égal à une, deux, trois, &c. circonférences.

2.^o La constante c peut être moindre que $2 k n'^2$, k étant positif. Dans ce cas, le radical $\sqrt{(c - 2 k . n'^2 \cos . \varphi)}$ devient imaginaire, lorsque l'angle $\pm \varphi$ est égal à zéro, à une, deux, &c. circonférences; il ne peut donc alors qu'osciller autour de 180^d, en sorte que sa valeur moyenne est 180^d.

Mém. 1788.

T t

3.^o La constante c peut être moindre que $-2kn'^2$, k étant négatif. Dans ce cas, le radical $\sqrt{(c - 2kn'^2 \cdot \cos. \varphi)}$ devient imaginaire, lorsque $\pm \varphi'$ est égal à 180° , & en général à un nombre impair de demi-circonférences; l'angle φ ne peut donc alors qu'osciller autour de zéro, en sorte que sa valeur moyenne est nulle. Voyons lequel de ces trois cas a lieu dans la nature.

Nous trouverons dans la suite que k est une quantité positive; ainsi le troisième cas n'existe point, & l'angle φ doit ou croître indéfiniment, ou osciller autour de 180° . Supposons $\varphi = 180^\circ \pm \varpi$; le signe de ϖ étant le même que celui du radical $\sqrt{(c - 2kn'^2 \cdot \cos. \varphi)}$, on aura

$$\partial t = \frac{\partial \varpi}{\sqrt{(c + 2kn'^2 \cdot \cos. \varpi)}}.$$

Si les angles φ & ϖ croissent indéfiniment, c est positif & plus grand que $2kn'^2$; on a donc dans l'intervalle compris depuis $\varpi = 0$, jusqu'à $\varpi = 90^\circ$, $\partial t < \frac{\partial \varpi}{n' \cdot \sqrt{(2k)}}$,

& par conséquent $t < \frac{\varpi}{n' \sqrt{(2k)}}$; ainsi le temps t que l'angle ϖ emploieroit à parvenir de zéro à 90° , seroit moindre que $\frac{90^\circ}{n' \cdot \sqrt{(2k)}}$. Nous verrons dans la suite que ce temps

est au-dessous d'une année : or, depuis la découverte des Satellites, cet angle a toujours paru nul, ou du moins très-petit; il ne croît donc point indéfiniment, il ne fait qu'osciller autour de zéro, en sorte que sa valeur moyenne est nulle. C'est ce que l'observation confirme; & en cela, elle fournit une nouvelle preuve de l'action mutuelle des satellites de Jupiter.

De-là résultent plusieurs conséquences intéressantes.

L'équation $v - 3v' + 2v'' = 180^\circ \pm \varpi$, donne, en égalant séparément les quantités qui ne sont pas périodiques, $nt - 3n't + 2n''t + \epsilon = 3\epsilon' + 2\epsilon'' = 180^\circ$,

d'où l'on tire $n - 3 n' + 2 n'' = 0$; ainsi, 1.^o le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troisième, est rigoureusement égal à trois fois celui du second. 2.^o La longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement & constamment égale à 180^d . Nous avons déjà remarqué dans l'article V, que ces deux théorèmes sont donnés d'une manière extrêmement approchée par les observations; nous pouvons maintenant assurer qu'ils sont rigoureux.

On a vu dans l'article V, que les inégalités du second Satellite, produites par l'action du premier & du troisième, se réunissent en vertu de ces théorèmes, dans un seul terme qui forme la grande inégalité que les observations ont indiquée dans le mouvement du second Satellite; ces inégalités seront donc toujours réunies, & il n'est point à craindre que, dans la suite des siècles, elles se séparent.

Sans l'action mutuelle des Satellites, les deux équations $n - 3 n' + 2 n'' = 0$; $\varepsilon - 3 \varepsilon' + 2 \varepsilon'' = 180^d$, n'auroient aucune liaison entre elles; d'ailleurs il faudroit supposer qu'à l'origine, les époques & les moyens mouvemens des Satellites ont été ordonnés de manière à satisfaire à ces équations, ce qui est infiniment peu vraisemblable, & dans ce cas même, la force la plus légère, telle que l'attraction des planètes & des comètes, auroit fini par changer ces rapports; mais l'action réciproque des Satellites fait disparaître ces invraisemblances, & donne de la stabilité aux rapports précédens. En effet, on a par ce qui précède, à l'origine du mouvement,

$$\frac{\partial v}{n' \partial t} - \frac{3 \cdot \partial v'}{n' \partial t} + \frac{2 \partial v''}{n' \partial t} = \pm \sqrt{\frac{c}{n'^2}} \\ - 2 k \cos. (\varepsilon - 3 \varepsilon' + 2 \varepsilon''),$$

c étant moindre que $2 k \cdot n'^2$; il suffit donc pour l'exactitude des théorèmes précédens, qu'à l'origine, la fonction

$\frac{\partial v}{n' \partial t} = \frac{3 \cdot \partial v'}{n' \partial t} + \frac{2 \partial v''}{n' \partial t}$, ait été comprise entre les limites,

$$+ 2 \sqrt{k} \cdot \sin. \frac{1}{2} (\epsilon - 3 \epsilon' + 2 \epsilon''), \text{ \& } \\ - 2 \sqrt{k} \cdot \sin. \frac{1}{2} \cdot (\epsilon - 3 \epsilon' + 2 \epsilon'');$$

\& pour la stabilité de ces théorèmes, il suffit que les attractions étrangères laissent toujours la fonction précédente dans ces limites.

Les observations nous apprennent que l'angle ϖ est très-petit, \& qu'ainsi l'on peut, sans erreur sensible, supposer $\cos. \varpi = 1 - \frac{1}{2} \varpi^2$; soit donc $\frac{c + 2 k n'^2}{k n'^2} = \mathcal{C}$, \mathcal{C} étant arbitraire à cause de l'arbitraire c qu'il renferme; l'équation différentielle entre ϖ \& t donnera

$$\varpi = \mathcal{C} \cdot \sin. [n' t \cdot \sqrt{k} + A],$$

A étant une nouvelle arbitraire.

Le mouvement des Satellites de Jupiter étant déterminé par douze équations différentielles du second ordre, leur théorie doit renfermer vingt-quatre constantes arbitraires. Quatre de ces constantes sont relatives aux moyens mouvemens des Satellites, ou à leurs moyennes distances; quatre sont relatives aux époques des longitudes moyennes; huit dépendent des excentricités \& des aphélies, \& huit autres dépendent des inclinaisons \& des nœuds des orbites. Les théorèmes précédens établissent deux relations entre les moyens mouvemens \& les époques des longitudes moyennes des Satellites, ce qui réduit à vingt-deux ces vingt-quatre arbitraires; c'est pour y suppléer que l'expression de ϖ renferme deux nouvelles arbitraires.

Si l'on reprend les valeurs de $\frac{\partial \partial s' v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial \partial s' v'}{\partial t^2}$ \& $\frac{\partial \partial s' v''}{\partial t^2}$, trouvées dans l'article précédent, on voit qu'elles ont des rapports constans entr'elles \& avec la

valeur de $\frac{\partial \partial \omega}{\partial t^2}$, en sorte que si l'on fait

$$\delta' v = P \cdot \sin. [n' t \sqrt{k} + A],$$

on aura

$$\delta' v' = -\frac{3 a' m}{4 a m'} \cdot P \cdot \sin. [n' t \sqrt{k} + A]$$

$$\delta' v'' = \frac{a'' m}{8 a m''} \cdot P \cdot \sin. [n' t \sqrt{k} + A];$$

de plus, comme on a $\delta' v - 3 \delta' v' + 2 \delta' v'' = 180^\circ \pm \omega$;

on aura

$$\epsilon = \pm P \cdot \left(1 + \frac{2 a' m}{4 a m'} + \frac{a'' m}{4 a m''} \right).$$

Les trois premiers Satellites de Jupiter sont donc assujettis à une inégalité dépendante de l'angle $n' t \sqrt{k} + A$; les observations peuvent seules fixer la quantité & l'instant où elle est nulle. Cette inégalité mérite une attention particulière de la part des astronomes; on peut la considérer comme une libration des mouvemens des trois premiers Satellites, en vertu de laquelle ces mouvemens oscillent sans cesse autour des rapports précédens, & par cette raison, nous la désignerons dans la suite sous le nom de *libration des satellites de Jupiter*.

Nous avons observé dans l'article *IX*, que les mouvemens des Satellites de Jupiter sont assujettis à des inégalités considérables dépendantes des variations séculaires de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, & l'on peut croire que ces inégalités peuvent à la longue, changer les rapports trouvés ci-dessus entre les époques & les longitudes moyennes des trois premiers Satellites. Nous allons faire voir que ces rapports subsistent toujours, malgré ces inégalités séculaires qui se coordonnent sans cesse de manière à y satisfaire, en sorte que l'inégalité séculaire du premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est constamment égale à zéro. Pour cela, nommons Ψ , Ψ' , Ψ'' , les inégalités séculaires du

premier, du second & du troisième Satellite, qui auroient lieu sans leur action mutuelle, quelle qu'en soit la cause, soit que ces inégalités dépendent des variations séculaires de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, soit qu'elles viennent de la résistance d'un fluide éthéré; il en résultera dans la fonction différentielle $\partial\partial v - 3\partial\partial v' + 2\partial\partial v''$, la quantité $\partial\partial\Psi - 3\partial\partial\Psi' + 2\partial\partial\Psi''$, & l'équation différentielle en φ , que nous avons trouvée dans l'article précédent, deviendra

$$\frac{\partial\partial\varphi}{\partial t^2} = kn'^2 \cdot \sin.\varphi + \frac{\partial\partial\Psi}{\partial t^2} - \frac{3 \cdot \partial\partial\Psi'}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial\partial\Psi''}{\partial t^2}.$$

Si l'on fait $\varphi = 180^\circ + \omega$, & que l'on suppose ω très-petit, on aura

$$\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} + k \cdot n'^2 \omega = \frac{\partial\partial\Psi - 3 \cdot \partial\partial\Psi' + 2 \cdot \partial\partial\Psi''}{\partial t^2};$$

or, les quantités Ψ , Ψ' , Ψ'' étant supposées varier avec une extrême lenteur, en sorte que la période de leurs variations embrasse un grand nombre de siècles, la partie de $\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2}$ relative à ces quantités, sera très-petite par rapport à $kn'^2\omega$, parce que la période de l'angle $n't \cdot \sqrt{k}$, n'est, comme on le verra ci-après, que d'un petit nombre d'années; on aura donc, en n'ayant égard qu'à la partie de ω qui dépend des quantités Ψ , Ψ' & Ψ'' ,

$$\omega = \frac{\partial\partial\Psi - 3 \cdot \partial\partial\Psi' + 2 \cdot \partial\partial\Psi''}{kn'^2 \cdot \partial t^2}.$$

Cette partie de ω est insensible, parce que Ψ , Ψ' , Ψ'' croissant avec une extrême lenteur, leurs différences secondes divisées par $kn'^2 \cdot \partial t^2$, sont à très-peu-près nulles; on peut donc supposer $\omega = 0$, en n'ayant égard qu'à ces quantités, & alors les théorèmes énoncés précédemment sur les moyens mouvemens & sur les longitudes moyennes des trois premiers Satellites, subsistent en entier.

Voyons maintenant comment les inégalités séculaires

des trois premiers Satellites se coordonnent entr'elles. Si l'on suppose

$$b = \frac{1}{1 + \frac{9 a' m}{4 a m'} + \frac{a'' m}{4 a m''}},$$

on aura par l'*art. précédent*,

$$\frac{\partial \partial v}{\partial t^2} = -b k n'^2 \cdot \varpi + \frac{\partial \partial \Psi}{\partial t^2}.$$

En substituant pour ϖ la valeur précédente, on aura

$$\frac{\partial \partial v}{\partial t^2} = (1 - b) \cdot \frac{\partial \partial \Psi}{\partial t^2} + 3 b \cdot \frac{\partial \partial \Psi'}{\partial t^2} - 2 b \cdot \frac{\partial \partial \Psi''}{\partial t^2};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$v = (1 - b) \cdot \Psi + 3 b \cdot \Psi' - 2 b \cdot \Psi''.$$

On trouvera pareillement

$$v' = \frac{3 a' m \cdot b}{4 a m'} \cdot \Psi + \left(1 - \frac{9 a' m}{4 a m'} \cdot b\right) \cdot \Psi' + \frac{3 a' m}{2 a m'} \cdot b \cdot \Psi'';$$

$$v'' = -\frac{a'' \cdot m}{8 a \cdot m''} \cdot b \Psi + \frac{3 a'' \cdot m}{8 a m''} \cdot b \cdot \Psi' + \left(1 - \frac{a'' m}{4 a m''} \cdot b\right) \cdot \Psi'';$$

d'où l'on voit que l'on a, en vertu de ces valeurs, $v - 3 v' + 2 v'' = 0$; ainsi les inégalités séculaires des trois premiers Satellites qui, sans leur action mutuelle, seroient respectivement égales à Ψ , Ψ' & Ψ'' , se changent dans les précédentes, & n'altèrent point les rapports établis ci-dessus.

La libration des Satellites lie donc entre eux les mouvemens, les époques & les inégalités séculaires des trois premiers Satellites; elle modifie encore d'une manière très-sensible, celles de leurs inégalités qui croissent avec une grande lenteur. Nous avons trouvé dans l'*art. IX*, que l'action du Soleil produit dans l'expression de v , le terme

$$\frac{3 M}{2} \cdot E \cdot \sin. (M t + A - B);$$

l'expression de $\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}$ contient donc le terme $-\frac{3 M^3}{2}$.

$E \cdot \sin. (Mt + A - B)$. Les expressions de $\frac{\partial \partial v'}{\partial t^2}$

& de $\frac{\partial \partial v''}{\partial t^2}$, contiennent des termes semblables qui n'en diffèrent que par le diviseur n qui se change successivement dans n' & n'' ; on aura ainsi, par l'article précédent, en n'ayant égard qu'à ces termes

$$\frac{\partial \partial \varphi}{\partial t^2} = k n'^2 \cdot \sin. \varphi - 3 M^3 \cdot E \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''} \right) \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

Or on a, en vertu de l'équation, $n - 3 n' + 2 n'' = 0$;

$$\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''} = \frac{6 \cdot (n' - n'')^2}{n \cdot n' \cdot n''};$$

de plus, n étant à fort peu-près égal à $2 n'$, & n'' étant à peu-près égal à $\frac{1}{2} n'$, on a

$$\frac{6 \cdot (n' - n'')^2}{n \cdot n' \cdot n''} = \frac{3}{2 n'};$$

en supposant donc $\varphi = 180^\circ + \omega$, & ω très-petit, on aura

$$\frac{\partial \partial \omega}{\partial t^2} + k n'^2 \cdot \omega = - \frac{9 \cdot M^3 \cdot E}{2 n'} \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

Si l'on intègre cette équation, en faisant abstraction des constantes arbitraires auxquelles nous avons eu égard dans ce qui précède, on aura

$$\omega = \frac{9 M^3 \cdot E}{2 n' \cdot (M^2 - k n'^2)} \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

Maintenant on a par l'article précédent

$$\frac{\partial \partial v}{\partial t^2} = - b k n'^2 \omega - \frac{3 M^3 \cdot E}{n} \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

En substituant, au lieu de ω , sa valeur précédente, on trouvera, après avoir intégré, que l'expression de v renferme l'inégalité

$$\frac{3 M E}{2 n'} \cdot \left(1 + \frac{3 b k \cdot n'^2}{M^2 - k n'^2} \right) \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

On trouvera

On trouvera de la même manière que l'expression de v' renferme l'inégalité

$$\frac{3ME}{n'} \cdot \left[1 - \frac{9d'm \cdot b k \cdot n'^2}{8am' \cdot (Mt^2 - kn'^2)} \right] \cdot \sin.(Mt + A - B),$$

& que l'expression de v'' , renferme l'inégalité

$$\frac{6ME}{n'} \cdot \left[1 + \frac{3a''m \cdot b k n'^2}{32am' \cdot (Mt^2 - kn'^2)} \right] \cdot \sin.(Mt + A - B).$$

M^2 étant moindre que kn'^2 , comme on le verra dans la suite, il en résulte que la libration des Satellites a une influence sensible sur l'inégalité qui dépend de l'angle $Mt + A - B$.

J'ai déjà donné dans les *Mémoires de l'Académie pour l'année 1784*, les résultats précédens sur la libration des trois premiers satellites de Jupiter. J'y suis parvenu par une méthode différente de celle que je viens d'exposer : l'accord de ces deux méthodes peut servir à les confirmer mutuellement.

X V.

LES inégalités de δv , $\delta v'$, $\delta v''$, qui ont pour diviseur $(n - 2n' + f)^2$, & celles des rayons vecteurs qui ont pour diviseur $n - 2n' + f$, produisent dans les équations qui déterminent les excentricités & les aphélies des orbites, des termes qui, quoique dépendans des carrés & des produits des masses perturbatrices, sont cependant sensibles, à cause du diviseur $(n - 2n' + f)^2$, dont ils sont affectés. Pour les déterminer, nous allons d'abord déterminer la partie du rayon vecteur r , qui a pour diviseur $n - 2n' + f$.

Reprenons pour cela, l'équation différentielle (1) de l'article II.

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r \delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1 + m) \cdot r \delta r}{r^3} + 2 \cdot f dR + r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right).$$

L'intégrale $f dR$ produit un terme qui a pour diviseur $n - 2n' + f$, & qui est multiplié par le cosinus de l'angle $nt - 2n't + \epsilon - 2\epsilon' + ft + \Gamma$. Nous avons

Mém. 1788.

U u

trouvé dans l'*art. VIII*, qu'il en résulte dans l'expression de δv , un terme dépendant du sinus du même angle, & qui est donné par la double intégrale $3 a \int n d t . \int d R$; en nommant donc Q le coefficient de ce sinus, coefficient dont nous avons donné la valeur dans l'*article VIII*, on aura

$$\frac{2 (n - 2 n' + f)}{3 a n} \cdot Q . \cos . (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma),$$

pour le terme de $2 \int d R$, qui dépend de l'angle $n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + f t + \Gamma$.

Nous avons vu dans l'*art. V*, que si l'on n'a égard qu'aux termes indépendans des excentricités, & qui ont pour diviseur $2 n - 2 n' - N$, on a

$$\frac{r \delta r}{a^2} = \frac{-n m' . F}{2 . (2 n - 2 n' - N)} \cdot \cos . 2 (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon).$$

N étant à très-peu-près égal à $n - f$, on aura

$$\frac{r \delta r}{a^2} = \frac{-n m' . F}{2 . (n - 2 n' + f)} \cdot \cos . 2 (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon);$$

en substituant donc dans l'équation différentielle en $r \delta r$, au lieu de r , la quantité $a . [1 + h . \cos . (n t + \epsilon - \varpi)]$, ϖ étant supposé égal à $f t + \Gamma$; en observant d'ailleurs

que l'on a à fort peu - près, $\frac{1}{a^3} = n^2$, & que le coefficient de $r \delta r$ est N^2 par l'*art. IV*; enfin, en ne conservant que les termes dépendans des excentricités des orbites, qui ont pour diviseur $n - 2 n' + f$ on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta^2 (r \delta r)}{a^2 . \delta t^2} + N^2 \cdot \frac{r \delta r}{a^2} \\ &+ \frac{3 n^3 . m' . F . h}{4 . (n - 2 n' + f)} \cdot \cos . (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + \varpi) \\ &- \frac{2 n . (n - 2 n' + f)}{3} \cdot Q . \cos . (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + \varpi); \\ &- \frac{3 n^3 . m' . F . h}{4 . (n - 2 n' + f)} \cdot \cos . (3 n t - 2 n' t + 3 \epsilon - 2 \epsilon' - \varpi). \end{aligned}$$

Si, pour abrégér, on fait

$$K = \frac{-3 n m' F h}{4 \cdot (n - 2 n' + f)} - \frac{2 \cdot (n - 2 n' + f)}{3 n} \cdot Q;$$

$$L = \frac{n m' F h}{4 \cdot (n - 2 n' + f)};$$

on aura a très-peu-près,

$$\frac{r \delta^2 r}{a^2} = K. \cos. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + \varpi) \\ + L. \cos. (3 n t - 2 n' t + 3 \epsilon - 2 \epsilon' - \varpi).$$

En supposant ensuite

$$H = \frac{-n m' F}{2 \cdot (n - 2 n' + f)},$$

on aura pour la partie entière de $\frac{r \delta^2 r}{a^2}$, qui a pour diviseur $n - 2 n' + f$,

$$H. \cos. 2 (n t - n' t + \epsilon - \epsilon') \\ + K. \cos. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + \varpi) \\ + L. \cos. (3 n t - 2 n' t + 3 \epsilon - 2 \epsilon' - \varpi).$$

Reprenons maintenant l'équation

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r \delta^2 r)}{\partial t^2} + \frac{(1 + m) \cdot r \delta^2 r}{r^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \cdot \delta^2 r^2}{\partial t^2} \\ - \frac{(1 + m) \cdot \delta^2 r^2}{r^3} + 2 \cdot \int dR + x \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) \\ + y \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right),$$

que nous avons trouvée dans l'article *XIII*. Nous n'aurons égard dans cette équation qu'aux termes de l'ordre des carrés & des produits des masses perturbatrices qui sont ou constans, ou multipliés par $\cos. (n t + \epsilon - \varpi)$, & qui de plus sont divisés par $(n - 2 n' + f)^2$. Le terme $\delta^2 r^2$ peut être mis sous cette forme $\frac{(r \delta^2 r)^2}{r^2}$, & il donne

U u ij

la quantité

$$\frac{a^2 \cdot H^2}{2} \cdot [1 - 2h \cdot \text{cof.} (nt + \epsilon - \varpi)] \\ + a^2 H \cdot (K + L) \cdot \text{cof.} (nt + \epsilon - \varpi).$$

Le terme $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \cdot \partial^2 r^2}{\partial t^2}$ de l'équation différentielle précédente donne ainsi la quantité

$$\frac{1}{2} \cdot n^2 a^2 \cdot H \cdot (hH - K - L) \cdot \text{cof.} (nt + \epsilon - \varpi).$$

Le terme $-\frac{(1+m) \cdot \partial^2 r^2}{r^3}$ peut être mis sous cette forme,

$$-\frac{(1+m) \cdot (r \partial^2 r)^2}{r^5}, \text{ \& il donne la quantité}$$

$$-\frac{n^2 a^2 H^2}{2} + n^2 a^2 H \cdot \left(\frac{5}{2} hH - K - L\right) \cdot \text{cof.} (nt + \epsilon - \varpi).$$

Si l'on nomme $a^2 q$ la partie constante de $r \partial^2 r$, le terme

$$\frac{(1+m) \cdot r \partial^2 r}{r^3}$$

donnera la quantité

$$n^2 r \partial^2 r - 3 a^2 n^2 q h \cdot \text{cof.} (nt + \epsilon - \varpi);$$

l'équation différentielle en $r \partial^2 r$ deviendra donc

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r \partial^2 r)}{a^2 \cdot \partial t^2} + \frac{N^2 \cdot r \partial^2 r}{a^2} - \frac{n^2 \cdot H^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot n^2 H \cdot \\ (2hH - \frac{2q h}{H} - K - L) \cdot \text{cof.} (nt + \epsilon - \varpi) \\ + 2 n^2 a \cdot \int dR + n^2 a \cdot r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right).$$

Nous donnons à $r \partial^2 r$ le coefficient N^2 , par la même raison pour laquelle nous avons donné dans l'article IV, ce coefficient à $\frac{r \partial^2 r}{a^2}$ dans l'équation différentielle en $r \partial^2 r$.

La valeur de q dépend de la constante que l'on doit ajouter à l'intégrale $\int dR$. Pour déterminer cette constante, nous reprendrons la valeur de $\frac{\partial \partial^2 r}{\partial t}$ donnée dans

l'article XIII. Cette valeur ne doit point renfermer de termes constans, puisque nous supposons que nt représente le moyen mouvement du Satellite m . Si dans la fonction

$$- \frac{2 \cdot (1 + m) \cdot \delta r^2}{r^3} \\ + \frac{\delta r \cdot \partial \delta \cdot \delta r - r^2 \cdot (\partial \cdot \delta v)^2 - 4 r \partial v \cdot \delta r \cdot \partial \cdot \delta v - \partial v^2 \cdot \delta r^2}{\partial r^2}$$

que renferme l'expression de $\frac{2 \partial \delta v}{\partial t} \cdot V[(1 + m) \cdot a \cdot (1 - e^2)]$, on substitue, au lieu de r & de ∂v , leurs premières valeurs a , & $n \partial t$, & au lieu de δr & de δv , leurs premières valeurs approchées,

$$\delta r = a H \cdot \cos. 2 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')$$

$$\delta v = - 2 H \cdot \sin. 2 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'),$$

qui résultent de l'*art.* V ; si l'on observe de plus, que n est à fort peu-près égal à $2 n'$, on trouvera que la partie constante de la fonction précédente se réduit à zéro. D'ailleurs, la fonction

$$4 \cdot [x \cdot (\frac{\partial R}{\partial x}) + y \cdot (\frac{\partial R}{\partial y}) + z \cdot (\frac{\partial R}{\partial z})]$$

ou $4 r (\frac{\partial R}{\partial r})$ de l'expression de $\frac{2 \partial \cdot \delta v}{\partial t}$.

$V[(1 + m) \cdot a \cdot (1 - e^2)]$, ne renferme point de termes constans de l'ordre des carrés & des produits des masses perturbatrices & indépendans des excentricités, qui aient en même temps $(n - 2 n' + f)^2$ pour diviseur. En n'ayant donc égard qu'à ces termes, on voit qu'il ne faut point ajouter de constante à l'intégrale $\int dR$; ainsi, en ne considérant que les termes constans de l'équation différentielle précédente, & par conséquent en y substituant $a^2 q$, au lieu de $r \delta' r$, on aura $N^2 q - \frac{n^2 \cdot H^2}{2} = 0$, ce qui donne à très-peu-près $q = \frac{1}{2} \cdot H^2$. Cela posé, l'équation différentielle en $r \delta' r$ donnera, en ne conservant

que les termes dépendans de l'angle $nt + \epsilon - \varpi$,
& en y substituant, au lieu de H , K , & L , leurs valeurs,

$$0 = \frac{\partial^2 (r \delta' r)}{a^2 \cdot \partial t^2} + \frac{N^2 \cdot r \delta' r}{a^2} - \frac{n^2 m' F Q}{2} \cdot \cos. (nt + \epsilon - \varpi) + 2 n^2 a \cdot \int dR + n^2 a \cdot r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)$$

Il faut maintenant déterminer les termes de $2 n^2 a \cdot \int dR$,
& de $n^2 a \cdot r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)$, qui dépendent de l'angle $nt + \epsilon - \varpi$,
& qui ont pour diviseur $(n - 2 n' + f)^2$.

Si l'on n'a égard qu'à l'action du second Satellite sur le premier, on a par l'art. IV,

$$R = - \frac{m'}{z} \cdot B^{(0)} + m' \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)} \right) \cdot \cos. (v' - v), \\ - m' B^{(2)} \cdot \cos. 2 (v' - v) - \&c.$$

En ne considérant que le terme $- m' \cdot B^{(2)} \cdot \cos. 2 (v' - v)$,
de cette expression, on a

$$dR = - m' \cdot \partial r \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial r} \right) \cdot \cos. 2 (v' - v) \\ - 2 m' \cdot B^{(2)} \cdot \partial v \cdot \sin. 2 (v' - v).$$

Cette expression de dR , contient le terme

$$- 4 m' \cdot B^{(2)} \cdot n \partial t \cdot (\delta v' - \delta v) \cdot \cos. 2 (nt - n' t + \epsilon - \epsilon'); \\ \text{Soit } Q' \text{ le coefficient de } \sin. (nt - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + \varpi), \\ \text{dans l'expression de } \delta v'; \text{ le terme précédent donnera} \\ \text{celui-ci :}$$

$$2 m' \cdot B^{(2)} \cdot n \partial t \cdot (Q' - Q) \cdot \sin. (nt + \epsilon - \varpi);$$

la fonction $2 n^2 a \cdot \int dR$ renferme donc le terme

$$- 4 n^2 \cdot m' a \cdot B^{(2)} \cdot (Q' - Q) \cdot \cos. (nt + \epsilon - \varpi);$$

On trouvera pareillement que la fonction $n^2 a \cdot r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)$,
contient le terme

$$- n^2 \cdot m' \cdot a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) \cdot (Q' - Q) \cdot \cos. (nt + \epsilon - \varpi);$$

& l'on s'assurera facilement que ces termes sont les seuls de ce genre, que renferment ces deux fonctions. En les réunissant, la quantité $2 n^2 a \cdot \int dR + n^2 \cdot a r \cdot (\frac{\partial R}{\partial r})$ se réduira à celle-ci

$- m' n^2 \cdot [4 a B^{(2)} + a^2 \cdot (\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a})] \cdot (Q' - Q) \cdot \cos.(n t + \varepsilon - \varpi);$
or on a très-peu-près par l'art. V.

$$F = 4 a B^{(2)} + a^2 \cdot (\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a});$$

la quantité précédente se réduira donc à celle-ci

$$- m' n^2 \cdot F \cdot (Q' - Q) \cdot \cos.(n t + \varepsilon - \varpi);$$

& l'équation différentielle en $r \delta' r$, deviendra, en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'angle $n t + \varepsilon - \varpi$.

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r \delta' r)}{a^3 \cdot \partial t^2} + \frac{N^2 \cdot r \delta' r}{a^3} - \frac{m' \cdot n^2 \cdot F}{2} \cdot (2 Q' - Q) \cdot \cos.(n t + \varepsilon - \varpi).$$

Si l'on réunit cette équation à l'équation différentielle en $\frac{r \delta' r}{a^2}$, que nous avons donnée dans l'art. VII, il est facile de voir qu'il suffit pour cela d'ajouter à l'équation de l'art. cité, le terme $-\frac{m' n^2 \cdot F}{2} \cdot (2 Q' - Q) \cdot \cos.(n t + \varepsilon - \varpi);$ & en suivant l'analyse du même article, on trouvera que ce terme ajoute à l'équation (i) de l'art. VII, la quantité

$$-\frac{m' \cdot F \cdot n T}{4} \cdot (2 Q' - Q).$$

Considérons présentement le second Satellite. Si l'on désigne par H' le coefficient de $\cos.(n t - n' t + \varepsilon - \varepsilon')$ dans l'expression de $\frac{r' \delta' r'}{a'^2}$, & qui, par l'article V, est égal à

$$\frac{n' \cdot (m'' \cdot F - m \cdot G)}{2 \cdot (n - 2 n' + f)},$$

N' étant à fort peu-près égal à n' — f ; si de plus; on suppose

$$K' = \frac{3 h' \cdot H'}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(n - 2 n' + f)}{n'} \cdot Q';$$

$$L' = - \frac{h' \cdot H'}{2};$$

on trouvera, en appliquant l'analyse précédente au second Satellite, que la partie de $\frac{r' \delta' r'}{a'^2}$ qui a pour diviseur $n - 2 n' + f$, est

$$H' \cdot \cos. (n t - n' t + \varepsilon - \varepsilon') + K' \cdot \cos. (n t - 2 n' t + \varepsilon - 2 \varepsilon' + \varpi) + L' \cdot \cos. (n t + \varepsilon - \varpi).$$

L'équation différentielle en $r' \delta' r'$, est

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r' \delta' r')}{\partial t^2} + \frac{(1 + m') \cdot r' \delta' r'}{r'^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \cdot \delta' r'^2}{\partial t^2} \\ - \frac{(1 + m') \cdot \delta' r'^2}{r'^3} + 2 f d' R' + r' \cdot \left(\frac{\partial R'}{\partial r'} \right).$$

En ne conservant dans cette équation que les termes dépendans de l'angle $n' t + \varepsilon' - \varpi$, on trouvera par l'analyse précédente, qu'elle se réduit à

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r' \delta' r')}{a'^2 \cdot \partial t^2} + N'^2 \cdot \frac{r' \delta' r'}{a'^2} \\ + \frac{3}{2} \cdot n'^2 \cdot H' \cdot (h' H' - K' - L') \cdot \cos. (n' t + \varepsilon' - \varpi) \\ + 2 n'^2 a' \cdot f d' R' + n'^2 a' \cdot r' \cdot \left(\frac{\partial R'}{\partial r'} \right).$$

En substituant, au lieu de H' , K' & L' , leurs valeurs, on aura

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r' \delta' r')}{a'^2 \cdot \partial t^2} + N'^2 \cdot \frac{r' \cdot \delta' r'}{a'^2} \\ + \frac{n'^2}{2} \cdot (m'' F' - m G) \cdot Q' \cdot \cos. (n' t + \varepsilon' - \varpi) \\ + 2 n'^2 a' \cdot f d' R' + n'^2 a' \cdot r' \cdot \left(\frac{\partial R'}{\partial r'} \right).$$

Déterminons maintenant les termes de $2 n'^2 a' \cdot f d' R'$ + $n'^2 a' \cdot r' \left(\frac{\partial R'}{\partial r'} \right)$, qui dépendent de l'angle $n' t + \varepsilon' - \varpi$.

Si l'on

Si l'on n'a égard qu'à l'action du premier Satellite sur le second, on aura

$$R' = -\frac{m}{2} \cdot B^{(0)} + m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)} \right) \cdot \cos. (v' - v) \\ - m \cdot B^{(2)} \cdot \cos. 2 (v' - v) - \&c.$$

On trouvera facilement que le terme $m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)} \right) \cdot \cos. (v' - v)$ de cette expression, produit dans la fonction $2 n'^2 \cdot a' \cdot \int d' R' + n'^2 \cdot a' \cdot r' \cdot \left(\frac{\partial R'}{\partial r'} \right)$, le terme suivant;

$$-\frac{m \cdot n'^2}{2} \cdot G \cdot (Q' - Q) \cdot \cos. (n' t + \epsilon' - \varpi);$$

& il est aisé de se convaincre que ce terme est le seul sensible de ce genre, que produise la partie de R' relative à l'action du premier Satellite.

La partie de R' relative à l'action du troisième Satellite ; est

$$-\frac{m''}{2} \cdot B'^{(0)} + m'' \cdot \left(\frac{r'}{r'^2} - B'^{(1)} \right) \cdot \cos. (v'' - v') \\ - m'' \cdot B'^{(2)} \cdot \cos. 2 (v'' - v') - \&c.$$

Si l'on désigne par Q'' le coefficient de $\sin. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' - \varpi)$, dans l'expression de $\delta v''$, coefficient dont nous avons donné la valeur dans l'article VIII; & si l'on observe que l'on a

$$2 n'' t - 2 n' t + 2 \epsilon'' - 2 \epsilon' = 180^\circ + n' t - n t + \epsilon' + \epsilon,$$

on trouvera que le terme $-m'' \cdot B'^{(2)} \cdot \cos. 2 (v'' - v')$ de l'expression de R' , produit dans la fonction

$$2 n'^2 \cdot a' \cdot \int d' R' + n'^2 \cdot a' \cdot r' \cdot \left(\frac{\partial R'}{\partial r'} \right), \text{ le terme } \\ + n'^2 \cdot m'' \cdot F' \cdot (Q'' - Q') \cdot \cos. (n' t + \epsilon' - \varpi);$$

& l'on s'assurera que ce terme est le seul sensible de ce

genre, qui résulte de la valeur de R' relative à l'action du troisième Satellite. L'équation différentielle en r' $\delta' r'$ $\frac{1}{2}$ devient ainsi, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial^2 \cdot (r' \delta' r')}{a'^2 \cdot \partial t^2} + N'^2 \cdot \frac{r' \delta' r'}{a'^2} \\ & + \frac{n'^2 \cdot m'' \cdot F'}{2} \cdot (2 Q'' - Q') \cdot \cos. (n' t + \epsilon' - \varpi) \\ & - \frac{n'^2 \cdot m \cdot G}{2} \cdot (2 Q' - Q) \cdot \cos. (n' t + \epsilon' - \varpi); \end{aligned}$$

Il est aisé de voir qu'il en résultera dans l'équation (i') de l'*art. VII*, les termes

$$\frac{m'' \cdot F'}{4} \cdot n' T. (2 Q'' - Q') - \frac{m \cdot G}{4} \cdot n' T. (2 Q' - Q).$$

Considérons enfin le troisième Satellite. Il est relativement au second, ce que le second est relativement au premier; or nous venons de voir que Q & Q' étant les coefficients de $\sin. (n t - 2 n' t + \epsilon - 2 \epsilon' + \varpi)$ dans les expressions de δv , & de $\delta v'$, l'action du premier Satellite produit dans l'équation (i') , le terme

$$- \frac{m G}{4} \cdot n' T. (2 Q' - Q);$$

les coefficients de $\sin. (n' t - 2 n'' t + \epsilon' - 2 \epsilon'' + \varpi)$, dans les expressions de $\delta v'$ & de $\delta v''$, sont $- Q'$ & $- Q''$; l'action du second Satellite sur le troisième, ajoute donc à l'équation (i'') de l'*art. VII*, le terme

$$+ \frac{m' \cdot G'}{4} \cdot n'' T. (2 Q'' - Q').$$

Les équations (i) , (i') , (i'') & (i''') du même article, deviendront ainsi

$$\begin{aligned}
0 &= h \cdot [f - (0) - \overline{0}] - (0,1) - (0,2) - (0,3)] \\
&\quad + \overline{0,1} \cdot h' + \overline{0,2} \cdot h'' + \overline{0,3} \cdot h''' \\
&\quad - \frac{m' \cdot F \cdot n \cdot T}{4} \cdot (2 Q' - Q) \\
0 &= h' \cdot [f - (1) - \overline{1}] - (1,0) - (1,2) - (1,3)] \\
&\quad + \overline{1,0} \cdot h + \overline{1,2} \cdot h'' + \overline{1,3} \cdot h''' \\
&\quad + \frac{m'' \cdot F' \cdot n' \cdot T}{4} \cdot (2 Q'' - Q') - \frac{m \cdot G \cdot n' \cdot T}{4} \cdot (2 Q' - Q) \\
0 &= h'' \cdot [f - (2) - \overline{2}] - (2,0) - (2,1) - (2,3)] \\
&\quad + \overline{2,0} \cdot h + \overline{2,1} \cdot h' + \overline{2,3} \cdot h''' \\
&\quad + \frac{m' \cdot G' \cdot n'' \cdot T}{4} \cdot (2 Q'' - Q') \\
0 &= h''' \cdot [f - (3) - \overline{3}] - (3,0) - (3,1) - (3,2)] \\
&\quad + \overline{3,0} \cdot h + \overline{3,1} \cdot h' + \overline{3,2} \cdot h''
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{aligned}} \right\} ; (I)$$

On pourroit croire que les équations (k) , (k') , (k'') & (k''') de l'*art. X*, & qui sont relatives aux inclinaisons & aux nœuds des orbites, peuvent, en vertu des considérations précédentes, acquérir quelques termes sensibles dépendant des carrés & des produits des forces perturbatrices; mais il est facile de s'assurer que cela n'est pas, par la seule inspection de l'équation différentielle en z de l'*art. II*.

X V I.

EN considérant avec attention la valeur de $\frac{\partial s' n}{\partial r}$ donnée dans l'*article XIII*, on voit qu'elle renferme des termes dépendant des produits des excentricités & des

X x ij

inclinaisons des orbites , & qui ont pour argumens les différences de longitude, des aphélies & des nœuds. Ces termes augmentent considérablement par les intégrations; mais je me suis assuré qu'ils restent toujours insensibles , à cause de la petitesse des masses des Satellites, des excentricités & des inclinaisons respectives de leurs orbites: je supprime par cette raison l'analyse par laquelle on peut les déterminer. La théorie précédente embrasse donc toutes les inégalités sensibles des Satellites de Jupiter, qui dépendent de leur action mutuelle, & des actions de Jupiter & du Soleil. Quant à l'action directe des planètes sur les Satellites, on conçoit aisément qu'elle doit être insensible, & que nous pouvons la négliger sans crainte. Il nous reste maintenant à réduire en nombres , les formules précédentes, & à les comparer ensuite aux observations.

X V I I.

Valeurs numériques des inégalités des Satellites.

POUR réduire en nombres les inégalités déterminées ci-dessus , il faut connoître les temps de la révolution des Satellites, & leurs moyennes distances au centre de Jupiter. Suivant les tables , les durées des révolutions périodiques des Satellites réduites en secondes, sont

I. Sat. 152853"; II. Sat. 306822";

III. Sat. 618153"; IV. Sat. 1441928".

Ces durées ont besoin de quelques corrections , mais ces corrections sont extrêmement petites , & n'influent point sensiblement sur les résultats numériques suivans; les valeurs de n , n' , n'' , n''' , étant réciproques aux durées précédentes, on aura

$$n' = n \cdot 0,4981813; \quad n'' = n \cdot 0,2472737;$$

$$n''' = n \cdot 0,1060060.$$

Pour déterminer les moyennes distances a , a' , a'' & a''' , nous observerons que la plus grande élongation du quatrième Satellite à Jupiter, réduite à la moyenne distance de Jupiter au Soleil, a été observée par Pound, de $8' 16''$; en supposant donc de $39''$, le demi-diamètre de l'équateur de Jupiter vu à la moyenne distance de cette planète au Soleil, & en prenant pour unité ce demi-diamètre, on aura

$$a''' = 25,436.$$

Il peut y avoir sur ce rapport de a''' au demi-diamètre de Jupiter, quelque incertitude qui tient principalement à l'évaluation du diamètre de Jupiter, mais elle ne peut influer sensiblement sur nos calculs; il en résulte seulement que l'unité dont nous faisons usage, ne représente point exactement le demi-diamètre de Jupiter.

Quant aux distances a , a' & a'' , il est beaucoup plus exact de les déduire de la valeur de a''' , par les loix de Kepler, que de les tirer immédiatement des observations; ainsi nous préférerons ce moyen, d'autant plus que nous voulons établir la théorie des Satellites sur le principe seul de la pesanteur universelle, & n'emprunter de l'observation que ce qui est indispensable. Suivant ces loix, la moyenne distance a , du premier Satellite au centre de Jupiter, est $a''' \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a'''^2}{n^2}\right)}$; mais cette expression n'est pas

rigoureuse, parce que les forces perturbatrices du mouvement des Satellites troublent un peu les loix de Kepler. En n'ayant égard qu'à la plus considérable de ces forces, qui dépend de l'ellipticité du globe de Jupiter, on trouve par l'article III, que les forces centrales des Satellites

m & m''' sont $\frac{1}{a^2} \cdot \left(1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi)}{a^2}\right)$ & $\frac{1}{a'''^2} \cdot \left(1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2}\phi)}{a'''^2}\right)$. Ces forces sont entre elles comme les carrés des vitesses des Satellites divisées par leurs

moyennes distances à Jupiter; elles sont par conséquent dans le rapport des quantités $a \cdot n^2$ & $a''' \cdot n'''^2$, d'où l'on tire à très-peu-près,

$$a = a''' \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{n'''^2}{n^2}\right)} \cdot \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\rho - \frac{1}{2}\varphi\right) \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a'''^2}\right)\right].$$

On trouvera, au moyen des valeurs que nous donnerons ci-après, que la quantité $\frac{1}{3} \left(\rho - \frac{1}{2}\varphi\right) \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a'''^2}\right)$ est une fraction très-petite & au-dessous de $\frac{1}{5000}$; nous pouvons donc la négliger, & supposer conformément aux loix de Kepler,

$$a = a''' \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{n'''^2}{n^2}\right)}.$$

Ces loix sont encore plus approchées relativement au second & au troisième Satellite, sur lesquels l'ellipticité de Jupiter influe moins que sur le premier. Cela posé, on trouve, en partant de ces loix,

$$a = 5,697300; \quad a' = 9,065898; \quad a'' = 14,461628; \\ a''' = 25,436000.$$

En comparant ensuite les quatre Satellites, deux à deux, on trouvera, au moyen de ces valeurs & des formules de l'article VI, les résultats suivans.

I.^{er} & II.^e Satellites.

$$a = 0,6284320;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,2029114; \quad b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,5956469;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,258752; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,754162;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,363089; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,192260;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,106444;$$

$$\frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{\partial \alpha} = 1,099553; \quad \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{\partial \alpha} = 1,749676;$$

$$\frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{\partial \alpha} = 1,452337; \quad \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{\partial \alpha} = 1,084149;$$

I.^{re} & III.^e Satellites.

$$\alpha = 0,3939598;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,0783860; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,3861608;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,085204; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,419399;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,124798; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,041116;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,014200;$$

$$\frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{\partial \alpha} = 0,475958; \quad \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{\partial \alpha} = 1,208140;$$

$$\frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{\partial \alpha} = 0,681198; \quad \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{\partial \alpha} = 0,329654;$$

I.^{re} & IV.^e Satellites.

$$\alpha = 0,2239857.$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,02516446; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,2225721;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,025818; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,228337;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,038441; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,007184;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,001413;$$

$$\frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{\partial \alpha} = 0,237323; \quad \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{\partial \alpha} = 1,059549;$$

$$\frac{\partial b^{(2)}_{-\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0,350753; \quad \frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0,097666.$$

II.^e & III.^e Satellites.

$$\alpha = 0,6268933;$$

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,20188916; \quad b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,5943582;$$

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2,257063; \quad b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0,751475;$$

$$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0,360861; \quad b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0,190599;$$

$$b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0,105262;$$

$$\frac{\partial b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1,093010; \quad \frac{\partial b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1,743536;$$

$$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1,444696; \quad \frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1,076135.$$

II.^e & IV.^e Satellites.

$$\alpha = 0,3564199;$$

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,06403876; \quad b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = -0,3506665;$$

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2,068500; \quad b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0,374886;$$

$$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0,100785; \quad b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0,030021;$$

$$b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0,009380;$$

$$\frac{\partial b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0,415101; \quad \frac{\partial b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1,164639;$$

$$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0,599337; \quad \frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0,263273;$$

III.^e

III.^e & IV.^e Satellites.

$$a = 0,5685496;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,16519332; \quad b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,5445387;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,199830; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,655817;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,284293; \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,135844;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,067933;$$

$$\frac{\partial b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}}{\partial a} = 0,879045; \quad \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{\partial a} = 1,546124;$$

$$\frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{\partial a} = 1,190611; \quad \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{\partial a} = 0,812999.$$

XVIII.

Au moyen de ces valeurs & des formules de l'art. IV, j'ai trouvé les expressions suivantes des perturbations réciproques des Satellites, dans lesquelles les masses m , m' , m'' & m''' sont rendues dix mille fois plus grandes.

I.^{er} Satellite.

$$\begin{aligned} \Delta r &= m'. 0,000465995. \cos. (nt - n't + \epsilon - \epsilon') \\ &- m'. 0,09958077. \cos. 2 (nt - n't + \epsilon - \epsilon') \\ &- m'. 0,000408870. \cos. 3. (nt - n't + \epsilon - \epsilon'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta v &= - m'. 60'',687. \sin. (nt - n't + \epsilon - \epsilon') \\ &+ m'. 7185'',05. \sin. 2 (nt - n't + \epsilon - \epsilon') \\ &+ m'. 22'',9407. \sin. 3 (nt - n't + \epsilon - \epsilon'). \end{aligned}$$

Mém. 1788.

Y y

II.^e Satellite.

$$\begin{aligned}
\delta r' &= m. 0,05128288. \text{ cof. } (n' t - n' t + \epsilon - \epsilon') \\
&+ m. 0,0005917397. \text{ cof. } 2 (n' t - n' t + \epsilon - \epsilon') \\
&+ m. 0,0001399405. \text{ cof. } 3. (n' t - n' t + \epsilon - \epsilon') \\
&+ m''. 0,0007321374. \text{ cof. } (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&- m''. 0,0879380. \text{ cof. } 2 (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&- m''. 0,0006339091. \text{ cof. } 3. (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v' &= - m. 2279'',40. \text{ fin. } (n' t - n' t + \epsilon - \epsilon') \\
&- m. 17'',0497. \text{ fin. } 2 (n' t - n' t + \epsilon - \epsilon') \\
&- m. 3'',4090. \text{ fin. } 3 (n' t - n' t + \epsilon - \epsilon') \\
&- m''. 59'',766. \text{ fin. } (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&+ m''. 3979'',83. \text{ fin. } 2 (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&+ m''. 22'',321. \text{ fin. } 3. (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'').
\end{aligned}$$

III.^e Satellite.

$$\begin{aligned}
\delta r'' &= m'. 0,0414925. \text{ cof. } (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&+ m'. 0,000917144. \text{ cof. } 2 (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&+ m'. 0,000217082. \text{ cof. } 3. (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&+ m''. 0,0007521007. \text{ cof. } (n'' t - n''' t + \epsilon'' - \epsilon''') \\
&- m''. 0,00449712. \text{ cof. } 2 (n'' t - n''' t + \epsilon'' - \epsilon''') \\
&- m''. 0,00039794. \text{ cof. } 3. (n'' t - n''' t + \epsilon'' - \epsilon''').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v'' &= - m'. 1130'',33. \text{ fin. } (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&- m'. 16'',5039. \text{ fin. } 2 (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&- m'. 3'',3067. \text{ fin. } 3. (n' t - n'' t + \epsilon' - \epsilon'') \\
&- m''. 34'',4108. \text{ fin. } (n'' t - n''' t + \epsilon'' - \epsilon''') \\
&+ m''. 117'',360. \text{ fin. } 2 (n'' t - n''' t + \epsilon'' - \epsilon''') \\
&+ m''. 8'',24894''. \text{ fin. } 3 (n'' t - n''' t + \epsilon'' - \epsilon''').
\end{aligned}$$

IV.^e Satellite.

$$\Delta r'' = m''.0,00317919. \cos. (n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \\ + m''.0,000578364. \cos. 2. (n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \\ + m''.0,000136139. \cos. 3. (n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''').$$

$$\Delta v''' = -m''.10'',375. \sin. (n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \\ - m''.5'',170. \sin. 2. (n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \\ - m''.1'',078. \sin. 3. (n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''').$$

Je ne donne ici que les inégalités produites par l'action des Satellites voisins, & je néglige les inégalités produites par les actions réciproques du premier & du troisième, du premier & du quatrième, enfin du second & du quatrième. Il est facile de déterminer toutes ces inégalités par ce qui précède; mais je me suis assuré qu'elles sont insensibles, & qu'elles ne feroient que compliquer les Tables, sans leur donner plus de précision.

Pour avoir les résultats précédens, il étoit nécessaire de connoître d'une manière approchée, la valeur de $p - \frac{1}{2}\phi$, qui entre dans les expressions de N , N' , N'' & N''' . J'ai supposé

$$p - \frac{1}{2}\phi = 0,0194222;$$

on verra ci-après, que cette valeur est suffisamment approchée pour que l'erreur dont elle est susceptible n'ait aucune influence sensible sur les déterminations précédentes.

Les inégalités des satellites de Jupiter, dépendantes de leur élongation mutuelle, ont été déjà déterminées par plusieurs Géomètres, & spécialement par M.^{rs} Bailly & de la Grange. Leurs résultats diffèrent un peu des précédens, ce qui tient en partie à ce qu'ils ont employé pour a , a' , a'' & a''' , les valeurs que M. de Cassini a trouvées par les mesures directes des distances des Satellites.

au centre de Jupiter, & sur-tout à ce qu'ils n'ont point eu égard à la différence des valeurs de N , N' , N'' & N''' , aux quantités correspondantes n , n' , n'' & n''' ; cette différence est fort sensible dans les inégalités des deux premiers Satellites, comme nous l'avons observé dans l'*art. V*. En faisant aux résultats de M. Bailly, les corrections dues à cette différence, ils se rapprochent beaucoup des résultats précédens que j'ai calculés avec soin, & de l'exactitude desquels je crois pouvoir répondre.

X I X.

CONSIDÉRONS maintenant les inégalités dépendantes des excentricités des orbites. Les inégalités de δv , $\delta v'$, & $\delta v''$, dépendantes de l'angle

$$nt - 2n't + \epsilon - 2\epsilon' + ft + \Gamma,$$

sont par l'*art. XV*,

$$\delta v = Q. \sin. (nt - 2n't + \epsilon - 2\epsilon' + ft + \Gamma);$$

$$\delta v' = Q'. \sin. (nt - 2n't + \epsilon - 2\epsilon' + ft + \Gamma);$$

$$\delta v'' = Q''. \sin. (nt - 2n't + \epsilon - 2\epsilon' + ft + \Gamma).$$

Nous avons donné dans l'*article VIII*, les expressions de Q , Q' & Q'' ; elles dépendent des valeurs de F , G , F' & G' ; or on a par l'*article V*,

$$F = a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a B^{(2)}$$

$$G = a'^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) - \frac{a'^2}{a^2} - \frac{2n'}{n-n'} \cdot (a' \cdot B^{(1)} - \frac{a'^2}{a^2})$$

d'où l'on tire par l'*article VI*,

$$F = a^2 \cdot \frac{\partial b^{\frac{1}{2}}}{\partial a} - \frac{2n}{n-n'} \cdot a b^{\frac{1}{2}}$$

$$G = -a \cdot \frac{\partial b^{\frac{1}{2}}}{\partial a} - \left(\frac{n+n'}{n-n'} \right) \cdot b^{\frac{1}{2}} + \frac{3n' - n}{(n-n') \cdot a^2}$$

en substituant donc pour a , $b^{\frac{(1)}{1}}$, $b^{\frac{(2)}{1}}$, $\frac{\partial b^{\frac{(1)}{1}}}{\partial a}$ & $\frac{\partial b^{\frac{(2)}{1}}}{\partial a}$, leurs valeurs numériques trouvées ci-dessus, on aura

$$F = 1,482966; \quad G = -0,855700.$$

On trouvera de la même manière,

$$F' = 1,466091; \quad G' = -0,8548145.$$

Au moyen de ces valeurs & des formules de l'*art. VIII*,

on aura

$$Q = -m' \cdot \frac{(16,8128 \cdot h - 6,09662 \cdot h')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2};$$

$$Q' = m \cdot \frac{(13,2797 \cdot h - 4,81543 \cdot h')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2}$$

$$+ m'' \cdot \frac{(4,12520 \cdot h' - 1,50782 \cdot h'')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2};$$

$$Q'' = -m' \cdot \frac{(3,24237 \cdot h' - 1,18513 \cdot h'')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2}.$$

On déterminera les quantités f , h , h' , h'' , h''' , au moyen des équations (I) de l'*art. XV*. Pour cela, nous observerons que la plupart des Astronomes supposent $\rho = \frac{1}{14}$; en faisant ensuite $\frac{1}{2} \phi = \frac{1}{25}$, on aura $\rho - \frac{1}{2} \phi = \frac{11}{350}$; mais vu l'incertitude qui peut exister sur cette valeur, nous supposons

$$\rho - \frac{1}{2} \phi = \frac{11 \cdot \mu}{350};$$

μ étant une indéterminée que nous déterminerons dans la suite. Cela posé, on aura par les formules de l'*art. VII*,

$$(0) = 259072'',62 \cdot \mu; \quad (1) = 50971'',27 \cdot \mu;$$

$$(2) = 9942'',67 \cdot \mu; \quad (3) = 1377'',82 \cdot \mu.$$

On aura ensuite ;

$$\overline{[0]} = 33'',46; \overline{[1]} = 67'',16; \overline{[2]} = 135'',31;$$

$$\overline{[3]} = 315'',64.$$

On trouvera encore ,

$$(0,1) = 12893'',96 . m' ; (0,2) = 1685'',25 . m'' ;$$

$$(0,3) = 248'',38 . m''' .$$

$$(1,0) = 10221'',52 . m ; (1,2) = 6337'',75 . m'' ;$$

$$(1,3) = 584'',40 . m''' .$$

$$(2,0) = 1057'',77 . m ; (2,1) = 5018'',01 . m' ;$$

$$(2,3) = 1907'',14 . m''' .$$

$$(3,0) = 117'',55 . m ; (3,1) = 348'',89 . m' ;$$

$$(3,2) = 1438'',02 . m'' .$$

Enfin , on aura ,

$$\overline{[0,1]} = 9554'',90 . m' ; \overline{[0,2]} = 812'',96 . m'' ;$$

$$\overline{[0,3]} = 69'',10 . m''' .$$

$$\overline{[1,0]} = 7574'',52 . m ; \overline{[1,2]} = 4686'',58 . m'' ;$$

$$\overline{[1,3]} = 256'',06 . m''' .$$

$$\overline{[2,0]} = 510'',26 . m ; \overline{[2,1]} = 3710'',67 . m' ;$$

$$\overline{[2,3]} = 1294'',22 . m''' .$$

$$\overline{[3,0]} = 32'',70 . m ; \overline{[3,1]} = 152'',87 . m' ;$$

$$\overline{[3,2]} = 975'',87 . m'' .$$

Les équations (I) de l'art. XV deviendront ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &= h. (f - 259072'',62. \mu - 33'',46 - 12893'',96. m' \\ &\quad - 1685'',25. m'' - 248'',38. m''') \\ &\quad + 9554'',90. m' h' + 812'',96. m'' h'' + 69'',10. m''' h''' \\ &\quad - m' h. \frac{(263465''. m + 166781''. m')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} \end{aligned}$$

$$+ m' h'. \frac{(95537''. m + 60478''. m' - 81843''. m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} ; (Q)$$

$$+ \frac{29915''. m' m''. h''}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} .]$$

$$\begin{aligned} 0 &= h'. (f - 50971'',27. \mu - 67'',16 - 10221'',52. m \\ &\quad - 6337'',75. m'' - 584'',40. m''') \\ &\quad + 7574'',52. m h + 4686'',58. m'' h'' + 256'',06. m''' h''' \\ &\quad + m h. \frac{(75736''. m + 47943''. m' - 64880''. m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} \end{aligned}$$

$$- h'. \frac{(27463''. m^2 + 17385''. m. m' - 47054''. m m'' + 31682''. m'. m'' + 20154''. m''^2)}{(1 + \frac{f}{973254''})^2}$$

$$+ m''. h''. \frac{(- 8599'',3. m + 11580''. m' + 7366'',7. m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} .]$$

$$\begin{aligned} 0 &= h''. (f - 9942'',67. \mu - 135'',31 - 1057'',77. m \\ &\quad - 5018'',01. m' - 1907'',14. m'') \\ &\quad + 510'',26. m h + 3710'',67. m' h' + 1294'',22. m'' h'' \\ &\quad + \frac{18777''. m. m'. h}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} - m' h'. \frac{(6808'',6. m - 9168'',9. m' - 5832'',7. m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} \end{aligned}$$

$$= m' h'' \cdot \frac{(3351'',4 \cdot m' + 2131'',9 \cdot m'')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2}.$$

$$0 = h''' \cdot (f - 1377'',82 \cdot \mu - 315'',64 - 117'',55 \cdot m \\ - 348'',89 \cdot m' - 1438'',02 \cdot m'') \\ + 32'',70 \cdot m h + 152'',87 \cdot m' h' + 975'',87 \cdot m'' h''.$$

Lorsque les masses m , m' , m'' , m''' , & la quantité μ , seront connues; on aura, en résolvant ces équations, quatre valeurs de f , & les rapports correspondans des indéterminées h , h' , h'' , h''' , à l'une de ces indéterminées qui sera arbitraire. Ces quatre systèmes de f , h , h' , h'' , h''' , donneront autant de valeurs pour Q , Q' & Q'' .

X X.

LES inégalités des Satellites dépendantes de l'action du Soleil, ont été déterminées dans l'article IX. L'expression de Δv , trouvée dans cet article, renferme d'abord le terme

$$\frac{11 \cdot M^2}{8 n^2} \cdot \sin. (2 n t - 2 M t + 2 \varepsilon - 2 A).$$

La fraction $\frac{M}{n}$ est égale au quotient de la durée de la révolution fidérale du Satellite, divisée par la durée de la révolution fidérale de Jupiter. Dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1786, j'ai trouvé le moyen mouvement fidéral de Jupiter, égal à $109181'',5$ dans l'intervalle de 365 jours; ce qui donne $8,5732625$ pour le logarithme de la durée de la révolution fidérale, réduite en secondes. Au moyen de cette valeur & des durées des révolutions fidérales des quatre Satellites, que nous avons données dans l'article XVII, on déterminera le coefficient $\frac{11 \cdot M^2}{8 n^2}$, que l'on réduira en secondes, en le multipliant par le rayon du cercle, réduit en arc, ou par $57^d 17' 44''$,8; on trouvera ainsi

I. Sat.

$$\text{I. Sat. } \frac{11 \cdot M^2}{8 n^2} = 0'',04729; \text{ II. Sat. } = 0'',19054;$$

$$\text{III. Sat. } = 0'',77338; \text{ IV. Sat. } = 4'',20814.$$

L'expression de δv de l'article IX contient encore le terme

$$\frac{-9 M^2 \cdot h}{n \cdot (2 M + N - n - f)} \cdot \sin.(nt - 2Mt + ft + \epsilon - 2A + \Gamma);$$

Ce terme n'est sensible que pour le troisième & le quatrième Satellite, & l'on peut y supposer $n - f = N$; ce qui le réduit au suivant,

$$\frac{-9 M^2}{2 n} \cdot h \cdot \sin.(nt - 2Mt + ft + \epsilon - 2A + \Gamma);$$

on a ensuite

$$\text{I. Sat. } \frac{9 M^2}{2 n} = 0,0018375; \text{ II. Sat. } = 0,0036884;$$

$$\text{III. Sat. } = 0,0074310; \text{ IV. Sat. } = 0,017334;$$

Enfin l'expression de δv de l'article IX, contient le terme

$$\frac{3 M^2}{n} \cdot E \cdot \sin.(Mt + A - B).$$

Nous avons vu dans l'article XIV, que relativement aux trois premiers Satellites, ce terme est modifié par leur mouvement de libration, & nous avons déterminé ce qu'il devient pour chacun d'eux. Cela posé, si l'on fait usage de la valeur de E , que j'ai trouvée dans nos Mémoires pour l'année 1786, égale à 0,0480767 pour le commencement de 1750, on aura les expressions suivantes de l'inégalité des Satellites, dépendante de l'angle $Mt + A - B$.

$$\text{I. Sat. } 12'',148 \cdot \left(1 + \frac{3 b k \cdot n'^2}{M^2 - k n'^2}\right) \cdot \sin.(Mt + A - B);$$

$$\text{II. Sat. } 24'',384 \cdot \left(1 - \frac{9 a' m \cdot b k \cdot n'^2}{8 \cdot a m' \cdot (M^2 - k n'^2)}\right) \cdot \sin.(Mt + A - B);$$

Mém. 1788.

Z z

$$\text{III. Sat. } 49'', 126. \left(1 + \frac{3 a'' m \cdot b k \cdot n'^2}{32 \cdot a m'' \cdot (M^2 - k n'^2)}\right) \cdot \sin. (Mt + A - B);$$

$$\text{IV. Sat, } 114'', 594 \cdot \sin. (Mt + A - B).$$

Ces inégalités varient avec l'excentricité de l'orbite de Jupiter; mais ces variations sont insensibles dans l'intervalle d'un ou deux siècles.

XXI.

DÉTERMINONS les inégalités du mouvement des Satellites en latitude. Les équations (*L*) de l'article *X*, deviennent

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \nu \cdot (259072'', 62 \cdot \mu + 33'', 46 + 12893'', 96 \cdot m' + 1685'', 25 \cdot m'' + 248'', 38 \cdot m''') \\ &\quad - 12893'', 96 \cdot m' \cdot \nu' - 1685'', 25 \cdot m'' \cdot \nu'' - 248'', 38 \cdot m''' \cdot \nu''' - 33'', 46; \\ \nu &= \nu' \cdot (50971'', 27 \cdot \mu + 67'', 16 + 10221'', 52 \cdot m + 6337'', 75 \cdot m' + 584'', 40 \cdot m'') \\ &\quad - 10221'', 52 \cdot m \cdot \nu' - 6337'', 75 \cdot m' \cdot \nu'' - 584'', 40 \cdot m'' \cdot \nu''' - 67'', 16; \\ \nu &= \nu'' \cdot (9942'', 67 \cdot \mu + 135'', 31 + 1057'', 77 \cdot m + 5018'', 01 \cdot m' + 1907'', 14 \cdot m'') \\ &\quad - 1057'', 77 \cdot m \cdot \nu'' - 5018'', 01 \cdot m' \cdot \nu''' - 1907'', 14 \cdot m'' \cdot \nu'''' - 135'', 31; \\ \nu &= \nu''' \cdot (1377'', 82 \cdot \mu + 315'', 64 + 117'', 55 \cdot m + 348'', 89 \cdot m' + 1438'', 02 \cdot m'') \\ &\quad - 117'', 55 \cdot m \cdot \nu''' - 348'', 89 \cdot m' \cdot \nu'''' - 1438'', 02 \cdot m'' \cdot \nu'''' - 315'', 64. \end{aligned} \right\} (L')$$

Les équations (*k*), (*k'*), (*k''*) & (*k'''*) de l'art. *X*, deviennent

$$\left. \begin{aligned} \phi &= l \cdot (q - 259072'', 62 \cdot \mu - 33'', 46 - 12893'', 96 \cdot m' - 1685'', 25 \cdot m'' - 248'', 38 \cdot m''') \\ &\quad + 12893'', 96 \cdot m' \cdot l' + 1685'', 25 \cdot m'' \cdot l'' + 248'', 38 \cdot m''' \cdot l'''; \\ \nu &= l' \cdot (q - 50971'', 27 \cdot \mu - 67'', 16 - 10221'', 52 \cdot m - 6337'', 75 \cdot m' - 584'', 40 \cdot m'') \\ &\quad + 10221'', 52 \cdot m \cdot l' + 6337'', 75 \cdot m' \cdot l'' + 584'', 40 \cdot m'' \cdot l'''; \\ \nu &= l'' \cdot (q - 9942'', 67 \cdot \mu - 135'', 31 - 1057'', 77 \cdot m - 5018'', 01 \cdot m' - 1907'', 14 \cdot m'') \\ &\quad + 1057'', 77 \cdot m \cdot l'' + 5018'', 01 \cdot m' \cdot l''' + 1907'', 14 \cdot m'' \cdot l''''; \\ \nu &= l''' \cdot (q - 1377'', 82 \cdot \mu - 315'', 64 - 117'', 55 \cdot m - 348'', 89 \cdot m' - 1438'', 02 \cdot m'') \\ &\quad + 117'', 55 \cdot m \cdot l''' + 348'', 89 \cdot m' \cdot l'''' + 1438'', 02 \cdot m'' \cdot l'''''. \end{aligned} \right\} (M)$$

Lorsque les masses *m*, *m'*, *m''*, & *m'''* seront connues, on aura, au moyen des équations (*L'*), les valeurs de *ν*, *ν'*, *ν''* & *ν'''*. Si l'on ne considère que la partie de la latitude des Satellites, qui dépend de l'inclinaison φ de l'équateur de Jupiter sur son orbite, on aura par l'art. *X*,

$$s = (1 - v) \cdot \Psi \cdot \sin. (nt + \epsilon - I);$$

$$s' = (1 - v') \cdot \Psi \cdot \sin. (n't + \epsilon' - I);$$

$$s'' = (1 - v'') \cdot \Psi \cdot \sin. (n''t + \epsilon'' - I);$$

$$s''' = (1 - v''') \cdot \Psi \cdot \sin. (n'''t + \epsilon''' - I).$$

Ces valeurs de s , s' , s'' , s''' , sont les mêmes que si les Satellites m , m' , m'' & m''' , étoient mûes sur des plans situés entre l'orbite & l'équateur de Jupiter; passant par l'intersection commune de ces deux derniers plans, & respectivement inclinés à l'équateur de Jupiter, des quantités $v \cdot \Psi$, $v' \cdot \Psi$, $v'' \cdot \Psi$ & $v''' \cdot \Psi$. On peut donc concevoir les orbites des Satellites comme étant mûes sur ces plans qui dans les variations de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, passent constamment par leur commune intersection, & dont les inclinaisons sur l'équateur sont toujours proportionnelles à l'inclinaison de l'équateur sur l'orbite de Jupiter.

Les équations (M') donnent quatre valeurs différentes pour q ; de plus, elles déterminent les rapports correspondans des indéterminées l , l' , l'' , & l''' à l'une de ces indéterminées qui reste arbitraire. De ces valeurs de q , dépendent les mouvemens des orbites des Satellites, sur les plans dont nous venons de parler, comme nous le verrons en discutant la théorie particulière de chaque Satellite.

XXXII.

Pour réduire en nombres les inégalités périodiques du mouvement des Satellites en latitude, déterminées dans l'art. XI; nous y supposons $N + q = n$; $N' + q = n'$; $N'' + q = n''$; $N''' + q = n'''$; ce que l'on peut faire sans craindre aucune erreur sensible; on trouve, cela posé;

$$s = m'. 0,0034876. (l' - l).$$

$$\sin. (3 n t - 4 n' t + 3 \epsilon - 4 \epsilon' - q t + \Lambda) \\ - 0,00015312. (L' - l).$$

$$\sin. (n t - 2 M t + \epsilon - 2 A - q t + \Lambda);$$

$$s' = [m. 0,0027648. (l - l') + m''. 0,0017068. (l'' - l')];$$

$$\sin. (2 n t - 3 n' t + 2 \epsilon - 3 \epsilon' - q t + \Lambda) \\ - 0,00030737. (L' - l').$$

$$\sin. (n' t - 2 M t + \epsilon' - 2 A - q t + \Lambda);$$

$$s'' = m'. 0,0013514. (l' - l'').$$

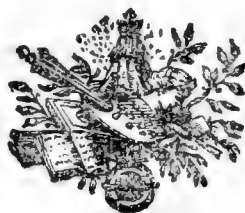
$$\sin. (2 n' t - 3 n'' t + 2 \epsilon' - 3 \epsilon'' - q t + \Lambda) \\ - 0,00061925. (L' - l'').$$

$$\sin. (n'' t - 2 M t + \epsilon'' - 2 A - q t + \Lambda);$$

$$s''' = - 0,0014445. (L' - l''').$$

$$\sin. (n''' t - 2 M t + \epsilon''' - 2 A - q t + \Lambda).$$

Les inégalités que nous venons de déterminer renferment les cinq inconnues μ , m , m' , m'' , & m''' ; l'évaluation de ces inconnues est un des points les plus intéressans de la théorie des Satellites. Cette évaluation & celle des inégalités qui en dépendent, sont l'objet de la seconde partie de cet Ouvrage.



M É M O I R E

S U R L A C O M B U S T I O N

De plusieurs Corps dans le gaz acide muriatique oxigéné.

Par M. F O U R C R O Y.

QUOIQUE la théorie de la combustion soit beaucoup plus simple & beaucoup plus claire d'après les travaux de M. Lavoisier, qu'elle ne l'a jamais été à aucune époque de l'histoire de la science; quoique les résultats exacts des belles expériences de ce savant semblent annoncer qu'il n'y a presque plus rien à faire sur cette grande opération de la nature, & que le voile qui la couvroit est entièrement déchiré, on trouve cependant encore, en examinant les phénomènes de chaque corps combustible en particulier, plusieurs faits qui manquent d'explication: tels sont ceux dont je me propose d'entretenir aujourd'hui l'Académie.

Lû le 3 Déc.
1788.

Depuis que les propriétés des fluides élastiques commencent à être appréciées avec exactitude, plusieurs physiciens ont cru que les gaz qui ne peuvent pas servir à la respiration, ne sont pas non plus susceptibles d'entretenir la combustion; & en effet ces deux phénomènes ont tant d'analogie l'un avec l'autre, qu'il devoit paroître bien naturel d'en admettre l'existence simultanée. Mais s'il est vrai & s'il arrive constamment qu'un gaz qui ne peut pas servir à la combustion, ne peut pas servir d'avantage à la respiration, il ne l'est pas également que tous les gaz dangereux pour les animaux, & qui ne sont pas susceptibles d'entretenir leur respiration, ne sont pas en même temps capables de faciliter la combustion des corps combustibles. On sait déjà que le gaz nitreux entretient

la combustion du pyrophore avec plus d'énergie que l'air atmosphérique. Je me propose de faire voir dans ce mémoire qu'un autregaz jouit de propriétés bien plus singulières encore que le gaz nitreux, par rapport à la combustion.

P R E M I È R E E X P É R I E N C E .

Le gaz acide muriatique oxigéné, découvert par Schéele, qui d'après une fausse théorie l'avoit nommé *acide marin déphlogistiqué*, & sur lequel M. Berthollet a fait tant d'expériences ingénieuses, ne peut pas servir à la respiration. Un animal qu'on y plonge est promptement alphixié; & cependant une bougie allumée continue d'y brûler, avec quelques phénomènes différens à la vérité de ceux qui ont lieu dans l'atmosphère. Sa flamme s'allonge & se rétrécit; elle prend une couleur rouge parfaitement semblable à celle des flambeaux & des réverbères qu'on voit luire de loin à travers les brouillards. Quoiqu'il paroisse à l'œil que la combustion de la bougie soit beaucoup plus foible que dans l'air atmosphérique, on reconnoit par un examen plus attentif que la cire a brûlé avec plus de rapidité, & que la mèche est bien plus dépouillée qu'elle ne l'auroit été dans l'air. Pour que cette expérience réussisse ainsi que les suivantes, il faut avoir le gaz acide muriatique oxigéné bien pur, & pour cela il est nécessaire de rejeter les premières bulles de fluide élastique qui se dégagent de l'oxide de manganèse & de l'acide muriatique: ces premières bulles sont souvent mêlées de gaz acide carbonique, & de gaz azote qui éteint les corps enflammés avec beaucoup d'énergie, & dont la présence dans l'air vital retiré de l'oxide de manganèse a déjà été reconnue par M. Séguin, dans le laboratoire de M. Lavoisier.

D E U X I È M E E X P É R I E N C E .

En approchant le goulot d'un flacon rempli de gaz acide muriatique oxigéné, de la mèche enflammée d'une

lampe, on voit la flamme s'envelopper d'une vapeur épaisse, noirâtre, qui forme un cône beaucoup plus volumineux, & beaucoup plus alongé que celui qui a coutume de terminer cette flamme; celle-ci devient plus sombre & rouge; il semble que la matière charbonneuse de l'huile soit dégagée avec plus de rapidité, & emportée en torrent autour de la mèche. La même vapeur épaisse & abondante se répand tout-à-coup autour de la flamme d'une bougie allumée, plongée dans le gaz acide muriatique oxigéné.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

La première expérience annonçant que le gaz acide muriatique oxigéné pouvoit entretenir la combustion des bougies, j'ai voulu examiner la manière dont d'autres corps combustibles seroient altérés dans ce gaz. Parmi tous les essais que j'ai faits, je m'arrêterai spécialement sur l'inflammation du phosphore. En plongeant un petit morceau de ce corps combustible attaché au bout d'un fil de fer recourbé, dans du gaz acide muriatique oxigéné, il s'allume tout-à-coup & brûle avec un éclat & une déflagration remarquables. M. Vauquelin mon élève, qui a reconnu le premier cette inflammation dans les expériences que je l'avois chargé de faire sur le gaz acide muriatique oxigéné, crut devoir me proposer ce procédé comme un des plus sûrs & des plus faciles pour se procurer de l'acide phosphorique. Cette expérience, en annonçant comme la première que ce gaz est susceptible d'entretenir la combustion avec plus d'énergie que l'air atmosphérique, me présentoit au premier aspect un fait d'autant plus difficile à expliquer, que le phosphore froid ou à la température ordinaire de l'atmosphère ne s'allume point dans l'air vital, & qu'il y brille même d'une lumière plus foible que dans l'air atmosphérique; mais on verra tout à l'heure d'où dépend cette différence, & quelle est la cause de cette inflammation, ainsi que de celles que je vais décrire.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Le gaz hydrogène phosphoré ou gaz phosphorique découvert par M. Gengembre, mis en contact avec le gaz acide muriatique oxigéné, s'allume tout-à-coup & brûle avec déflagration comme dans l'air atmosphérique, mais avec une flamme moins brillante que celle qu'elle produit dans l'air vital. Le gaz hydrogène sulfuré ou le gaz *hépatique* de Bergman, ne présente au contraire aucune inflammation dans son mélange avec le gaz acide muriatique oxigéné.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai toujours cherché dans mes cours à rendre sensibles & à démontrer aux yeux par des expériences positives, les théories que j'y expose. Dans cette vue, voulant prouver que lorsque l'ammoniaque est décomposée par l'acide muriatique oxigéné, il se forme de l'eau par l'union de l'hydrogène, l'un des principes de l'alcali volatil, avec l'oxigène de l'acide muriatique oxigéné, tandis que l'acide muriatique & l'azote deviennent libres, ainsi que l'a expliqué M. Berthollet, j'ai pensé que je rendrois cette explication plus claire ; & que j'en prouverois la vérité en mettant en contact le gaz acide muriatique oxigéné avec le gaz ammoniac, au lieu d'employer ces deux corps liquides comme l'avoit fait jusque-là M. Berthollet. Cette expérience eut tout le succès que j'en avois espéré. Les deux gaz mêlés se pénètrent & se condensent tout-à-coup ; il se produit une chaleur vive, on aperçoit, au lieu des fluides transparens, une vapeur blanche très épaisse qui se condense bientôt, & forme sur les parois de la cloche posée sur le mercure, des gouttes d'eau en très-grand nombre. Mais il se passe en même temps un phénomène bien propre à fixer l'attention des chimistes qui s'occupent du perfectionnement de la doctrine moderne. M. Vauquelin, en faisant le mélange des

des deux gaz à quelque distance de moi, & pendant que j'étois occupé à en exposer la théorie, crut voir une flamme pendant leur pénétration réciproque; il me fit part de cette observation, & nous répétâmes cette expérience avec le soin & l'attention qu'elle nous paroissoit exiger. Nous vîmes très-manifestement de la flamme, sur-tout dans l'obscurité, & nous apprîmes ensuite en employant les gaz très-purs & en assez grande quantité, à produire cet effet d'une manière si sûre, que je l'ai toujours fait voir depuis dans mes cours : cette inflammation est assez forte pour qu'on l'aperçoive même au milieu du jour.

Quand on n'auroit pas su que l'ammoniaque contient une substance très-combustible & très-inflammable, cette expérience en seroit une preuve très-forte; mais avant d'en rechercher la cause, décrivons encore un phénomène de combustion dans le gaz dont nous nous occupons.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Lorsque M. Berthollet eut annoncé & montré à l'Académie le sel neutre qu'il avoit formé avec l'acide muriatique oxigéné & la potasse, & qu'il eut prouvé que dans cette singulière combinaison, l'acide muriatique absorbe & condense bien plus d'oxigène en s'unissant à l'alcali qu'en se dissolvant dans l'eau, mon premier soin fut de répéter son expérience, & de faire ce nouveau sel neutre dans mon cours sur les fluides élastiques, au mois d'avril de cette année (1788). En démontrant les propriétés les plus remarquables de ce sel, je voulus essayer de le décomposer par l'acide sulfurique concentré; mais cette expérience que je ne tentai heureusement que très en petit, m'offrit un mouvement si violent, & une effervescence si forte, que je ne crus pas devoir insister alors sur les phénomènes qui l'accompagnoient, & que je remis à un autre temps à les examiner avec soin. Dans cet examen fait quelques mois après, j'ai remarqué les circonstances suivantes :

Mém. 1788.

A a a

1°. L'acide sulfurique concentré, versé sur du muriate sur-oxigéné de potasse cristallisé, en dégage avec une effervescence très-vive une vapeur blanche, dont l'odeur forte, quoiqu'analogue à celle de l'acide muriatique oxigéné, a cependant un caractère particulier. Le sel & l'acide prennent une couleur orangée.

2°. En jetant sur l'acide sulfurique concentré, du muriate sur-oxigéné de potasse, il n'y a d'abord qu'une action peu sensible; mais si l'on agite le mélange avec un tube de verre, il se fait une explosion vive, accompagnée d'une lumière rouge assez éclatante qui passe comme l'éclair, & la matière est lancée à plusieurs pieds. Lorsque ce mouvement est fini, & que le mélange paroît être dans l'inaction, une nouvelle agitation produit une seconde explosion, souvent plus vive que la première, remarquable par quelques jets de lumière moins brillans que les premiers, & les molécules du mélange dispersées au loin par l'explosion, continuent à pétiller pendant quelque temps. Il nous est arrivé en approchant la flamme d'une bougie du sel mêlé avec l'acide sulfurique, & qui avoit déjà produit une détonation vive, d'exciter dans ce mélange d'où il se dégageoit encore, une vapeur blanche abondante, une détonation bien plus forte que la première, & qui, en lançant à de grandes distances la matière contenue dans le vase, brisa celui-ci avec un grand bruit, & fut suivie de beaucoup de petites détonations partielles dans les petites masses du sel éparpillées. Ayant reconnu que cette explosion secondaire avoit eu lieu par l'action de la flamme de la bougie sur la vapeur dégagée du sel par l'acide, M. Vauquelin exposa au milieu de cette vapeur un petit morceau de phosphore; tout-à-coup celui-ci s'alluma avec une explosion & une déflagration si rapides, que des parcelles furent lancées à plus de six pieds. L'acide nitrique concentré produit sur le muriate sur-oxigéné de potasse, des effets analogues, mais beaucoup plus rapides encore. Lorsque nous eûmes reconnu tous ces phénomènes par nos expériences, on nous apprit

que M. Pelletier avoit vu l'espèce d'inflammation & l'explosion qui ont lieu dans le mélange de l'acide sulfurique concentré, & du muriate sur-oxygéné de potasse.

Tels sont les phénomènes que je désirois de faire connoître à l'Académie. Ils prouvent que le gaz acide muriatique oxygéné peut entretenir la combustion, même avec plus d'énergie que l'air atmosphérique; mais ils présentent des faits dont le rapport avec la théorie moderne exige quelques discussions. Ces faits, quoique peu nombreux, doivent être partagés en trois ordres bien distincts les uns des autres : 1.^o ceux qui sont relatifs aux corps qui éprouvent dans le gaz muriatique oxygéné une combustion semblable à celle qui a lieu dans l'air de l'atmosphère, ou n'en diffèrent que par l'intensité de la flamme ; 2.^o les faits qui présentent dans ce gaz la propriété d'enflammer les corps que l'air atmosphérique ni l'air vital n'allument pas de la même manière ; 3.^o enfin ceux qui tiennent à la décomposition du muriate sur-oxygéné de potasse par les acides sulfurique & nitrique, & à l'influence des vapeurs que ces acides en dégagent sur plusieurs corps combustibles. Chacun de ces ordres de faits nous offre des problèmes intéressans à résoudre. Et d'abord si nous considérons la combustion des bougies & l'inflammation du gaz hydrogène phosphoré dans le gaz acide muriatique oxygéné, comparée à celle que ces deux corps combustibles éprouvent dans l'air atmosphérique & dans l'air vital, nous remarquerons que cette combustion plus vive que celle qui a lieu dans l'atmosphère, mais moins brillante dans la flamme que celle qui est produite par l'air vital, annonce que l'oxygène uni à l'acide muriatique, n'y est pas sans combinaison de lumière & de calorique, mais qu'il contient une quantité moindre du premier principe ou de la lumière, & que le second ou le calorique y est plus comprimé, plus resserré que dans l'état d'air vital; car les expériences de M.^{rs} Lavoisier & de la Place démontrent que l'oxygène contenu

dans le gaz acide muriatique oxigéné, y est combiné avec autant de calorique que dans l'air vital. Il ne peut donc y avoir de différence entre l'oxigène de ces deux gaz, que moins de lumière, & une compression bien plus grande du calorique dans le gaz acide muriatique oxigéné, que dans l'air vital. Si nous recherchons ensuite comment la bougie s'enveloppe d'une vapeur épaisse qui obscurcit la flamme, & pourquoi les parois du vase où se fait l'expérience sont sensiblement obscurcies, nous reconnoissons que c'est la grande quantité de charbon élevé en vapeur par le gaz hydrogène qui se dégage, & qui ne pouvant pas entièrement brûler, se dépose peu-à-peu & à mesure que l'hydrogène se combine avec l'oxigène, & forme de l'eau : le cône obscur dont s'enveloppe tout-à-coup la flamme d'une lampe par le contact du gaz acide muriatique oxigéné, rend cette explication très-vraisemblable. Ajoutons à cette première cause de la vapeur épaisse répandue autour de la flamme, la quantité d'eau formée tout-à-coup, & privée de l'état vaporeux par l'acide muriatique qui se trouve libre. Si cette vapeur épaisse n'existe ni dans l'air vital, ni dans l'air atmosphérique, c'est que la chaleur forte dégagée dans ces dernières combustions, fait brûler complètement le charbon, & élève sous forme vaporeuse l'eau à mesure qu'elle se forme.

Le second ordre des faits décrits dans ce Mémoire, comprend l'inflammation des corps combustibles qui a lieu comme exclusivement dans le gaz acide muriatique oxigéné, & qui ne se produit pas dans l'air atmosphérique, ni même dans l'air vital, au moins à la même température. Cette inflammation est celle du phosphore & du gaz ammoniac. Il faut avouer qu'il doit paroître étonnant que l'air vital, ce corps si éminemment propre à la combustion, qui brûle avec tant de rapidité tous les corps combustibles échauffés chacun à des degrés déterminés, n'ait aucune action, à la température ordinaire, sur le phosphore ; & que cette substance

perde même au milieu de cet air une grande partie de sa propriété lumineuse si bien entretenue par l'air atmosphérique. Si l'on compare ensuite la vive inflammation qu'il éprouve dans le gaz acide muriatique oxygéné, si l'on fait attention à la nature de ce gaz, à l'état dans lequel il contient l'oxygène, aux circonstances générales de la combinaison de ce dernier principe avec les différens corps combustibles, on reconnoît que ce fait s'explique assez facilement par la doctrine nouvelle, & ajoute encore à la précision de cette doctrine. En effet, l'oxygène uni à l'acide muriatique, y est privé d'une grande partie de la lumière qu'il contient dans l'état de l'air vital; le calorique qu'il paroît contenir dans une proportion presque aussi grande, y est dans une compression ou une densité beaucoup plus considérable. Il est donc plus près de se combiner avec des corps solides, ou d'entrer dans des combinaisons liquides, puisqu'on fait aujourd'hui que, pour unir des corps, il faut d'abord rapprocher leur densité. C'est par ce dernier principe qu'on conçoit que l'air vital ne peut se combiner avec le phosphore & l'enflammer, que celui-ci ne soit auparavant divisé par la chaleur, & rapproché de la rarité de l'air vital; or, lorsque l'oxygène est plus voisin de la densité du phosphore, en raison de la petite quantité de lumière & de la condensation du calorique qu'il contient, comme dans le gaz acide muriatique oxygéné, ou dans l'acide nitrique, il peut se combiner rapidement avec le phosphore, & celui-ci peut en dégager plus facilement la portion de calorique & de lumière que cet oxygène liquide ou sur le point de l'être, contient encore. C'est à ce même état de l'oxygène dans le gaz acide muriatique oxygéné, qu'est due la décomposition du gaz ammoniac & la flamme qui se dégage pendant cette décomposition; car l'air vital ne produisant point cet effet sur l'ammoniaque, & l'acide muriatique n'y contribuant en rien, puisqu'il reste lui-même libre & sans altération, il n'y a que l'état de compression de l'air vital dans le gaz muriatique oxygéné, il n'y a que

sa densité voisine de celle qu'a l'hydrogène dans l'ammoniaque, qui puisse rendre raison & de la rapidité de la décomposition, & de la flamme qui s'excite dans l'action réciproque des deux gaz. C'est toujours de la densité analogue entre l'hydrogène du gaz ammoniac & l'oxygène de l'acide muriatique oxygéné, que dépend la facilité avec laquelle ces deux corps s'unissent, & la rapidité de la formation de l'eau qui a lieu dans ce cas, tandis qu'au contraire l'extrême différence de densité entre le gaz oxygène & le gaz hydrogène, les empêche de s'unir sous cette forme gazeuse. La flamme produite par cette décomposition réciproque des deux gaz, prouve que l'hydrogène de l'ammoniaque sépare encore de l'oxygène uni à l'acide muriatique, une certaine quantité de lumière qui existe dans le principe brûlant; & que dans l'eau l'oxygène est avec moins de chaleur & de lumière, que dans le gaz acide muriatique oxygéné.

Quant au troisième ordre des faits relatifs à la décomposition du muriate sur-oxygéné de potasse par les acides sulfurique & nitrique concentrés, la plupart de ces faits sont très différens de ceux qui ont été exposés jusqu'ici, & semblent même n'avoir avec eux aucune analogie. Ce sel est une source de problèmes intéressans pour les chimistes. Il semble, à l'aide de la condensation qu'y a éprouvée l'acide muriatique, & de l'oxygène plus abondant & plus comprimé qui s'y est fixé, que ce sel soit un foyer de détonations & d'inflammation. M. Lavoisier l'a vu tout lumineux par le seul frottement : nous avons observé que le seul contact de l'acide sulfurique ou de l'acide nitrique produisoit une explosion & une inflammation rapides. La cause de ce phénomène ne peut être que le dégagement de la lumière & de l'air vital, sur-tout de la portion de celui-ci, qui dans le muriate sur-oxygéné de potasse, est au-dessus de la quantité qui existe dans l'acide muriatique-oxygéné ordinaire & isolé. C'est à cet air vital plus condensé que dans

l'atmosphère, & à une partie d'acide muriatique oxigéné qui se dégage en même temps, qu'est due l'inflammation du phosphore. Enfin la lumière, l'air vital condensé, l'acide muriatique oxigéné ordinaire, paroissent être séparés en même temps du muriate sur-oxigéné de potasse par l'acide sulfurique & par l'acide nitrique. Mais pour connoître tous ces phénomènes avec plus de précision, il faudra faire sur ce sel des expériences beaucoup plus longues & plus exactes que celles que j'ai encore faites, & qui n'ont pas d'ailleurs un rapport direct avec l'objet de ce Mémoire.



M É M O I R E

Sur les phénomènes qui ont lieu dans la précipitation des dissolutions métalliques, par l'ammoniaque (alcali volatil).

Par M. F O U R C R O Y.

Lu le 12
Novembre,
1788.

LES chimistes connoissent depuis long-temps la différence qui existe entre les précipités de la même dissolution métallique par les alcalis fixes & par l'ammoniaque. Ils ont sur-tout observé cette différence dans la dissolution d'or, dans celle de fer, de cuivre & de mercure; mais ils ne se sont occupés que de l'effet sans en rechercher la cause. A la vérité, la découverte de celle-ci tenoit à d'autres découvertes qu'on étoit même fort éloigné de soupçonner il y a quelques années, & qui ne pouvoient être faites que d'après les connoissances acquises sur la nature & les combinaisons des gaz, sur les principes & la décomposition de l'eau. Il falloit, pour concevoir les effets que l'ammoniaque produit sur les dissolutions métalliques, connoître la nature de cet alcali, aussi-bien que celle des divers acides, & des oxides ou chaux métalliques. Bergman, & plus particulièrement encore Schéele avoient entrevu que l'ammoniaque étoit décomposée pendant la fulmination de l'or fulminant, & dans quelques autres expériences de chimie. Ils avoient aussi soupçonné que cet alcali étoit formé de toutes pièces dans plusieurs cas, & que dans sa décomposition il se dégagoit un gaz qui paroissoit être un de ses principes. Mais M. Berthollet, d'après ces seuls aperçus, a prouvé par des expériences ingénieuses, que l'ammoniaque est un composé d'azote ou de la base du gaz azote, qu'on a nommée il y a quelques années, *mosette atmosphérique*, & de l'hydrogène ou de la base du gaz inflammable. Le premier de ces

ces deux principes y est six fois plus abondant que le second.

M. Berthollet est parvenu à ce résultat précis, en examinant avec soin la décomposition de l'ammoniaque par l'acide nitrique, par l'acide muriatique oxygéné, par l'oxide de cuivre, par l'oxide d'or à l'aide de sa fulmination, & par l'oxide d'argent qui, en séparant les principes de l'ammoniaque & en se décomposant lui-même, produit à l'aide du plus léger contact une détonation très-forte. Quoiqu'il n'ait point encore pu recomposer l'ammoniaque en mettant en contact le gaz hydrogène & le gaz azote, sa découverte explique cependant la formation de cet alcali dans la distillation & la putréfaction des matières animales; ainsi que des substances végétales analogues aux premières; elle a encore servi à déterminer la principale différence qui existe entre les principes prochains des animaux & ceux des végétaux.

La connoissance des principes de l'ammoniaque, doit jeter du jour sur un grand nombre de faits chimiques qui n'ont point encore été expliqués. Telles sont, entr'autres, toutes les précipitations métalliques opérées par l'ammoniaque, & telle est aussi l'action de cet alcali sur les oxides métalliques.

Il existe quelques dissolutions métalliques que l'ammoniaque ne précipite point sensiblement, ou dont elle dissout les oxides avec tant d'énergie, qu'on n'aperçoit point ou presque point de précipité. Le silence des chimistes les plus exacts sur ce phénomène, m'étonnoit il y a plus de dix ans, lorsque je voyois qu'il m'étoit impossible d'obtenir un précipité de la dissolution nitrique d'argent par l'ammoniaque. La singularité de ce fait m'avoit tellement frappé en 1777 & 1778, que depuis cette époque je faisois recueillir avec soin dans mon laboratoire les mélanges de nitrate d'argent & d'ammoniaque, qui ne m'avoient point fourni de précipité. Depuis la découverte de l'oxide d'argent détonant, par M. Berthollet, j'ai examiné atten-

Mém. 1788.

B b b

tivement l'état de ce mélange ; j'y ai trouvé un précipité gris & beaucoup de lames brillantes d'argent. L'ammoniaque dissout donc d'abord l'oxide de ce métal, & le réduit peu-à-peu, en lui enlevant l'oxigène.

Le plus singulier phénomène que j'aie eu occasion d'observer dans l'action de l'ammoniaque sur les dissolutions métalliques, a lieu dans celles de manganèse. Si l'on verse dans du sulfate de manganèse étendu d'eau, quelques gouttes d'ammoniaque pure & caustique, il se forme d'abord un précipité rouge qui va au fond du vase ; mais bientôt ce précipité qui paroïssoit être une poudre uniforme, se sépare en flocons que l'on voit agités d'un léger mouvement intestin, dû à une véritable effervescence. Chaque flocon paroît attaché à une bulle plus ou moins grosse de fluide élastique, & celle-ci augmentant peu-à-peu de volume, devient assez grosse pour donner à la petite masse du flocon une pesanteur spécifique moins considérable que le liquide ; alors le flocon chargé & quelquefois enveloppé de cette bulle gazeuse, s'élève au haut de la liqueur, & y reste suspendu jusqu'à ce que le gaz l'ait tout-à-fait abandonné & se soit répandu dans l'atmosphère. A mesure que ces flocons s'enveloppent ainsi de gaz & s'élèvent dans le liquide, l'oxide de manganèse qui les forme change de couleur ; de rouge qu'il étoit d'abord, il devient gris & même presque blanc. Cette précipitation répétée dans des flacons tubulés & terminés par l'appareil pneumatique, a donné pour produit du gaz azote. D'autres expériences ont encore confirmé ce résultat. L'ammoniaque mise en contact avec des oxides de manganèse noirs, bruns & rouges, & aidée d'un peu de chaleur, donne lieu à une effervescence très-sensible & qui fournit du gaz azote ; les oxides deviennent gris ou blancs. En traitant l'oxide de manganèse blanc par l'ammoniaque, le même phénomène, la même effervescence n'ont plus lieu. Il est aisé de concevoir que les derniers oxides étant dans une circonstance très-différente des premiers, & beaucoup plus

voisins de la réduction, ils ne peuvent plus opérer la décomposition de l'ammoniaque ; car l'effervescence, le dégagement du gaz azote, & la réduction de l'oxide brun de manganèse, tiennent manifestement à la décomposition de l'ammoniaque. L'hydrogène, l'un des principes de cet alcali, se porte sur l'oxigène de l'oxide, avec lequel il s'unit & forme de l'eau ; l'oxide doit alors se rapprocher de l'état métallique. Comme l'azote, autre principe de l'ammoniaque, n'a point d'affinité avec le métal presque réduit, ni avec l'eau formée, il s'unit au calorique dégagé de l'hydrogène & de l'oxide, & forme du gaz azote qui, à mesure qu'il prend la fluidité élastique, produit l'effervescence déjà décrite. Il se passe donc dans cette opération une double décomposition dans l'ammoniaque & dans l'oxide de manganèse ; deux des principes de ces composés deviennent libres ; l'un reste fixe, & l'autre prend la forme de gaz. Les deux autres principes se combinent ensemble & produisent de l'eau ; c'est absolument le même changement qui a lieu dans la fulmination des oxides d'or & d'argent ammoniacaux, dans la détonation du nitrate ammoniacal, dans la double décomposition de l'ammoniaque & de l'acide muriatique oxigéné ; en un mot, dans les expériences décrites avec tant d'exactitude par M. Berthollet. Dans celles que je viens de faire connoître, il n'y a que les phénomènes qui sont différens, & c'est sur ces phénomènes seulement que je désirerois de fixer l'attention des chimistes. Il en est de même de beaucoup d'autres expériences où la décomposition simultanée des oxides métalliques & de l'ammoniaque a également lieu, avec des circonstances à la vérité un peu différentes. Telles sont les précipitations de quelques dissolutions de fer & du mercure par l'ammoniaque ; l'action de ce sel sur les oxides des mêmes métaux, & sur les acides métalliques, arsénique, molybdique & tungstique.

Feu M. Maret, secrétaire perpétuel, de l'académie de Dijon, avoit proposé de préparer l'*éthiops martial*, en précipitant du nitrate de fer par l'ammoniaque. Dans cette

précipitation que j'ai répétée un grand nombre de fois, il se dégage une grande quantité de petites bulles qui ne sont que du gaz azote, & l'oxide brun de fer devient noir en cédant une portion de son oxigène à l'hydrogène de l'ammoniaque. La même réduction est plus prompte, plus facile, & la cause bien plus manifeste en chauffant dans un appareil pneumato-chimique, un oxide de fer brun ou rouge avec de l'ammoniaque liquide; on voit naître une effervescence très-sensible; on obtient du gaz azote, & l'oxide de fer rouge passe à l'état d'oxide de fer noir ou d'*éthiops martial*.

Le mercure a toujours été pour les chimistes un objet de recherches & d'observations; tout n'est point encore découvert dans ce métal, & plusieurs phénomènes très-remarquables de ses dissolutions & de ses précipitations, n'ont point encore été décrits & appréciés. L'acide nitrique concentré versé sur du mercure, produit une effervescence remarquable par un grand nombre de petites bulles qui ne montent pas d'abord jusqu'au haut du liquide, mais qui s'arrêtent & disparaissent à quelque distance de la surface du métal. Le fluide élastique qui les forme, & qui est de vrai gaz nitreux, se dissout dans l'acide & lui donne une couleur verte: cette couleur va en augmentant de bas en haut de la liqueur; mais bientôt celle-ci s'échauffe; alors les bulles montent jusqu'à la surface, & forment la vapeur rouge nitreuse qui annonce la combinaison du gaz nitreux avec l'air vital atmosphérique. Cette chaleur dégagant peu-à-peu & le gaz qui continue à se former par l'action de la dissolution, & celui qui étoit dissous dans l'acide froid, le liquide se décolore & devient entièrement blanc. La couleur que cet acide prend pendant la dissolution de plusieurs métaux, tient donc à l'attraction qu'il a pour le gaz nitreux: après cette observation qui avoit échappé aux recherches des chimistes, occupons nous de l'action de l'ammoniaque sur les dissolutions de mercure & sur les oxides de ce métal.

On fait que le sulfate & le nitrate de mercure sont précipités en jaune orangé ou briqueté par les terres alcalines & par les alcalis fixes ; mais l'ammoniaque les précipite en gris noir. Pendant cette dernière précipitation, il se dégage des bulles de gaz azote, & l'on voit que la couleur & la réduction de ce précipité sont dues à la décomposition de l'ammoniaque. Ce précipité noir obtenu du sulfate & du nitrate de mercure par l'ammoniaque, se réduit entièrement en globules de mercure coulant lorsqu'on le fait sécher à l'air sur le filtre. J'ai confirmé la théorie de cette réduction due à la décomposition de l'ammoniaque, en traitant avec cet alcali les précipités jaunes & briquetés obtenus de ces deux dissolutions par les alcalis fixes ; ces oxides deviennent gris & noirs par le contact de l'ammoniaque aidée de la chaleur, & il se dégage avec une effervescence très-sensible du gaz azote. Mais le muriate oxigéné de mercure, ou *sublimé corrosif*, ne se comporte pas de la même manière avec les alcalis fixes & l'ammoniaque ; les premiers en séparent un oxide de mercure plus rouge que ceux qu'ils précipitent du sulfate & du nitrate du même métal ; & l'ammoniaque, même mise en excès, n'en précipite jamais qu'un oxide blanc. Lorsqu'on arrose avec cet alcali volatil les précipités du même sel par les alcalis fixes, l'ammoniaque commence par les blanchir, & il ne les colore en noir qu'à l'aide de beaucoup de temps. Pour bien concevoir la cause de cette différence & la raison des phénomènes qui ont lieu dans ces divers cas, il faut se rappeler que chaque acide exige dans un métal des quantités différentes d'oxigène pour s'y unir ; que l'acide muriatique ne se combine en général qu'avec les métaux très-chargés de ce principe ou très-oxidés ; que le mercure paroît être plus oxidé dans le muriate corrosif que dans le sulfate & le nitrate. D'après ces considérations, il est aisé de sentir que l'ammoniaque qui trouve dans le muriate mercuriel oxigéné un oxide plus avancé, le réduit moins, tant qu'on n'ajoute point de

chaleur, que celui qui est combiné avec les acides sulfurique & nitrique. A la vérité, cette seule différence d'une oxidation plus complète dans le mercure uni à l'acide muriatique, n'explique pas pourquoi l'ammoniaque ne parvient pas à le réduire, & semble n'autoriser tout au plus qu'un temps plus long & une quantité plus considérable d'ammoniaque pour opérer la réduction de cet oxide. Et en effet, l'oxidation plus avancée n'est pas la seule cause de ce phénomène; il en existe encore une autre dans la nature même de ce précipité blanc qui n'est pas un pur oxide de mercure, mais un vrai sel triple irréductible par ce procédé: il faudroit des détails très-longs & d'ailleurs trop éloignés de l'objet de ce Mémoire, pour faire connoître ce qui se passe dans cette précipitation. Je réserverai ces détails, ainsi que plusieurs autres faits relatifs aux diverses précipitations des dissolutions mercurielles, pour d'autres Mémoires. Je dois continuer à poursuivre dans celui-ci l'examen de l'action de l'ammoniaque sur les dissolutions & les oxides métalliques.

Les oxides de plomb précipités des dissolutions de ce métal par l'ammoniaque, ne diffèrent pas sensiblement de ceux qui sont séparés par les alcalis fixes. Cependant l'ammoniaque a une action très-sensible sur plusieurs oxides de ce métal. L'oxide vitreux de plomb, qu'on connoît dans les arts sous le nom de *litharge*, mis en contact avec l'ammoniaque, devient blanc & produit une effervescence due au dégagement du gaz azote: cette effervescence qui annonce la décomposition de l'ammoniaque, est rendue beaucoup plus sensible par la chaleur.

Les acides arsenique, molybdique & tungstique éprouvent aussi une altération très-marquée par l'ammoniaque: si l'on chauffe lentement l'arseniate ammoniacal, ce sel, au lieu de laisser dissiper l'ammoniaque & d'offrir l'acide arsenique seul pour résidu, comme cela a lieu dans le procédé de M. Pelletier où il faut employer un grand feu, se décompose en ses deux matériaux. L'hydrogène de l'ammoniaque

enlève à l'arsenic la portion d'oxygène qui le rend acide, sans prendre celle qui le tient à l'état d'oxide; l'acide arsenique repasse donc à l'état d'oxide arsenic blanc, mais jamais à l'état métallique; il se dégage du gaz azote, & il se forme de l'eau pendant cette opération. L'acide molybdique traité de même par l'ammoniaque, perd son acidité & devient oxide gris de molybdène; l'acide tungstique, en cessant d'être acide par le même traitement, perd sa couleur jaune & en prend une blanche. Il y a toujours effervescence dans ces procédés, & elle est toujours due au dégagement du gaz azote & à la décomposition de l'ammoniaque.

Je n'ai trouvé que l'étain, le zinc, l'antimoine, le cobalt & le bismuth, dont les oxides sont inaltérables par l'ammoniaque; encore les deux derniers métaux offrent-ils un commencement d'altération par le contact de ce sel.

En résumant sur l'action générale & réciproque de la plupart des oxides métalliques & de l'ammoniaque, soit seule & pendant le contact immédiat de ces corps, sans mélange d'autres substances, soit modifiée par les acides auparavant unis aux oxides métalliques, on peut réduire cette action, ou plutôt les degrés de cette action, à plusieurs phénomènes différens qui tiennent aux attractions électives & comparées de l'oxygène pour l'azote, l'hydrogène, & pour les substances métalliques.

1.^o L'ammoniaque n'a nulle action sur quelques oxides métalliques, qui conséquemment ne la décomposent point; tels sont les oxides de zinc, d'antimoine, de bismuth, de cobalt & d'étain: on voit ici que ces métaux sont aussi ceux qui ne cèdent que difficilement leur oxygène aux autres corps.

2.^o L'ammoniaque détruit l'acidité en enlevant la portion d'oxygène vraiment acidifiante aux acides métalliques, arsenique, tungstique & molybdique; mais il ne leur enlève point la dernière partie de l'oxygène qui réduit ces corps à l'état d'oxides.

3.^o Il y a des oxides métalliques non acidifiables, ou qu'au moins on n'est pas encore parvenu à mettre à l'état d'acides, & qui ne cèdent qu'une portion de leur oxigène à l'ammoniaque. C'est ainsi que les oxides rouges & jaunes de plomb, l'oxide brun de fer, l'oxide brun de manganèse, l'oxide vert de cuivre, se rapprochent de l'état métallique, sans se réduire tout-à-fait par l'action de l'ammoniaque.

4.^o Les quantités d'oxigène que l'ammoniaque enlève à ces oxides non entièrement réduçtibles par son action, sont différentes dans les différens métaux; mais l'addition de la chaleur augmente ces quantités d'oxigène séparé par l'ammoniaque.

5.^o Il y a quelques oxides métalliques que l'ammoniaque réduit tout-à-fait à froid, ou simplement aidée par les rayons du soleil; tels sont les oxides d'argent, d'or & de mercure.

6.^o L'union des acides aux oxides métalliques modifie cette action, & s'oppose en général à la réduction complète, en faisant varier les attractions électives; c'est ainsi que tous les oxides de mercure purs sont réduits facilement par l'ammoniaque, tandis qu'unis aux acides, ils ne font que se rapprocher de l'état métallique au moment où l'ammoniaque les en sépare.

7.^o La chaleur augmente tellement l'action & la décomposition réciproque de l'ammoniaque & des oxides métalliques, qu'elle opère subitement & quelquefois même avec une détonation bruyante, la réduction de quelques oxides par ce sel. Telle est la théorie de la réduction des oxides de cuivre par l'ammoniaque que l'on distille sur ces oxides, de la fulmination par le feu de l'oxide d'or ammoniacal, & de celle de l'oxide d'argent ammoniacal par le plus léger frottement.

Tous les effets, tous les phénomènes variés que présentent les précipitations des sels métalliques par l'ammoniaque, tiennent donc à l'attraction des principes de l'ammoniaque pour ceux des oxides métalliques, & à celle de ces deux composés pour les acides : ces deux ordres d'attractions électives

électives représentent des forces compliquées dont il étoit autrefois impossible de saisir les résultats. Pour résoudre ces problèmes, il falloit d'abord les simplifier & connoître l'action réciproque des oxides métalliques isolés & purs, & de l'ammoniaque. Je n'ai fait qu'établir les principes généraux de ces attractions, & déterminer leur influence générale dans les précipitations métalliques par l'ammoniaque. Une étude plus approfondie de chaque attraction en particulier, donnera par la suite des connoissances plus exactes sur chaque sel métallique ; mais il faudra pour les acquérir, des expériences très-multipliées, puisque les seuls phénomènes des décompositions des sels mercuriels par l'ammoniaque m'ont occupé long-temps, comme je le dirai dans des Mémoires qui feront suite à celui-ci.



M É M O I R E

Sur une détonation produite par une substance connue sous le nom de Sel de verre, lorsqu'étant en fusion on la jette dans de l'eau.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROV.

Lû le 23
Déc. 1788.

LES travaux des chimistes ayant porté très-loin nos connoissances sur la nature & les propriétés des différens gaz, plusieurs membres de cette Académie se sont occupés d'expliquer les détonations dues à ce gaz, & principalement celles des chaux métalliques précipitées par un alkali volatil. J'ai donc cru que je ferois plaisir à plusieurs de mes confrères, en leur présentant un fait dans ce genre dont ils sont plus à portée que d'autres de donner l'explication, soit que la détonation dont je vais parler, doive son existence à un gaz, ou qu'elle ne soit produite que par une simple expansion de l'eau raréfiée par une extrême chaleur.

Le fait dont il s'agit est connu depuis long-temps dans les verreries, où l'on emploie pour *fondans* des soudes de varech, & en général de celles qui contiennent beaucoup de sel marin.

Je dois prévenir que du verre en parfaite fusion étant jeté dans de l'eau, n'y produit aucune détonation. On emploie ce moyen pour rétablir un verre qui a été mal fabriqué, & lorsqu'on se propose de changer la composition qui l'a rendu défectueux. On connoît cette opération sous le nom d'*éteindre le verre*. Il perd ainsi sa transparence, se réduit ensuite facilement en poudre lorsqu'on le pile, & on est à portée pour-lors de former un nouveau mélange de matières vitrifiables, &c. dont il résulte souvent un

verre d'une qualité plus parfaite que le premier. On pratique ce moyen avec avantage dans toutes les verreries, sans qu'il y ait aucune apparence de détonation & sans courir le moindre danger.

Mais voici ce qui occasionne la détonation dont j'ai parlé. Lorsque les cendres de varech, que l'on emploie dans certaines verreries comme fondans, & qui contiennent beaucoup de sel marin, ont été mêlées avec le sable, on expose ce mélange à la chaleur du four, où il se convertit en verre; & lorsque la fusion est complète, *le sel de verre* se sépare de la substance vitrifiée, & monte jusqu'aux bords du pot où il surnage. Autrefois on laissoit ce sel exposé à la chaleur du four assez de temps pour qu'il se sublimât, & sous ce sel on trouvoit le verre exempt de *points* & en état d'être travaillé en *verres à plats*, ou en cylindres appelés *manchons*, &c. Depuis peut-être 40 à 50 ans, on a reconnu qu'on consommoit du bois en pure perte en laissant ainsi ce sel s'évaporer, & qu'il y avoit un avantage à l'enlever dès le moment que séparé du verre il surnage.

C'est cette opération qui offre de grands inconvéniens dans les fours de verreries, les halles ou chambres closes, lorsqu'on ne prend pas, en l'exécutant, les attentions convenables & que nous allons indiquer. Dans chacune des grandes verreries, on a des cuillers de fer dont le manche est long de six pieds environ; on s'en sert pour puiser dans le pot ce sel de verre liquide, qu'on emporte & qu'on verse dans un trou ou dans une fosse placée près du grand four, afin qu'elle soit sèche & chauffée convenablement.

Il faut savoir, pour suivre les détails de cette opération, que le verre ne s'attache pas au fer, à moins que ce fer n'ait acquis un certain degré de chaleur qui approche de l'incandescence; ce qui oblige de faire chauffer les *cannes* ou *selles* de fer, &c. lorsqu'on veut avec ces outils *lever* du verre pour le *souffler* ou le *travailler*. Les cuillers ou poches avec lesquelles on enlève le sel de verre, s'échauffent

suffisamment dès la seconde fois qu'on les a employées ; pour que le verre y adhère : il est donc nécessaire de changer de poches aussi souvent que le verre s'y attache. Ainsi quand on a retiré deux fois du sel de verre, il faut laisser refroidir la poche ou cuiller ; & pour accélérer ce refroidissement on la jette dans une grande auge de bois contenant de l'eau : mais auparavant on a grand soin de s'assurer qu'il n'y reste pas de sel de verre : s'il y en avoit dans la poche au moment où on la jette dans l'eau, il se feroit une explosion comme celle d'une pièce d'artillerie. La même chose arriveroit si la poche étoit humide, ou s'il y restoit de l'eau lorsqu'on la replonge dans le sel de verre ; l'explosion dans ce cas seroit si terrible, qu'il pourroit arriver que la poche lancée avec violence, traversât le four & allât percer le mur fait de charpente & de terre ou de torchis, au grand risque des ouvriers qui garniroient cette halle. Ce malheur n'est pas sans exemples dans les *grandes verreries*. Cette explosion, comme on voit, expose aux plus grands dangers lorsqu'elle a lieu dans un four & dans une halle ou endroit clos ; il n'en est pas de même lorsqu'elle se fait en plein air.

Une verrerie située en haute Normandie dans les domaines d'un prince recommandable par ses vertus (1), comptant sur la visite dont il vouloit bien l'honorer, avoit rassemblé à son arrivée des ouvriers qui portoient chacun dans une poche une certaine quantité de sel de verre en fusion, & la jetoient les uns après les autres dans un bassin qui contenoit de l'eau, ce qui imitoit assez parfaitement une décharge de boîtes ou d'autres pièces d'artillerie.

On remarquera que ceci n'a lieu que quand le sel de verre provient de soudes de varech. Le sel de verre de soudes d'alicanthe, ou de potasse, ne donne aucune

(1) M.^{sr} le duc de Penthièvre, à son comté d'Eu.

détonation ; & j'ai reconnu que ce sel de verre ne contient que du tartre vitriolé & une magnésie, tandis que le sel de verre des soudes de varech donne du sel marin à base alkaline, d'autre à base terreuse, & du sel de Glaubert.

Lorsqu'on est présent à l'incinération des varechs ou goesmons qui sont employés à la fabrique de ces soudes, il est facile de se convaincre que ces fucus contiennent beaucoup d'alkali volatil.

Ne peut-on pas croire que pendant la combustion de ces plantes qui contiennent une substance analogue à la matière cornée des animaux, il s'est déjà fait une décomposition du sel marin par l'alkali volatil, & qu'il en résulteroit une détonation ? Si toutefois elle ne provenoit pas de la dilatation de l'air contenu dans l'eau, ce seroit pour lors l'effet d'un gaz particulier au sel marin, & résultant, comme je l'ai dit, de sa décomposition par l'alkali volatil.

Au reste, je ne me suis proposé que d'exposer le fait ; je laisse à mes confrères, particulièrement à M.^{rs} Berthollet & de Fourcroy, à en donner l'explication. Les travaux de ces habiles chimistes semblent nous donner lieu d'attendre d'eux qu'ils l'appuieront par des expériences ; & celles qu'a faites récemment M. Berthollet, semblent avoir de l'analogie avec la détonation dont je viens de faire part à l'Académie.



OBSERVATIONS

Sur plusieurs anciens Monumens gothiques que j'ai remarqués dans cette Capitale, sur lesquels sont gravés les signes du Zodiaque, & quelques hyéroglyphes Égyptiens, relatifs à la religion d'Isis.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 14.
Nov. 1787. **D**EPUIS environ seize ans que je suis de retour de l'Inde, & que j'ai fait connoître l'astronomie des Indiens proprement dits, plusieurs savans se sont occupés de différentes recherches sur cette astronomie, sur le zodiaque & sur ses douze signes. Ce cercle presque aussi ancien que le monde, me paroît, comme les hommes, originaire d'Asie. On le trouve en effet établi de temps immémorial chez différentes nations de ce vaste continent, sur-tout dans l'Inde; & par-tout il paroît avoir une origine commune.

Il est vrai qu'il est aussi très-anciennement connu des Égyptiens; mais j'ai fait voir dans une dissertation imprimée dans les volumes de l'Académie, que le zodiaque considéré à une certaine époque convient parfaitement au climat de l'Inde, ce qu'on ne peut pas dire aussi exactement du climat de l'Égypte; & que par conséquent les Indiens ont autant de droit à soutenir qu'il est originaire de l'Inde, que les Égyptiens en ont à croire qu'ils l'ont inventé, comme l'ont aussi pensé quelques savans. Le zodiaque que j'ai apporté de l'Inde, que j'avois trouvé en usage parmi les Brames, quoique différent dans quelques points du zodiaque Égyptien, est cependant le même quant au fonds.

Les Indiens, comme je le dis dans ma dissertation, ne se sont pas bornés à ce seul zodiaque composé de douze

constellations; ils en ont un autre qui me paroît beaucoup plus ancien, c'est celui de la Lune, composé de 27 constellations qu'ils nomment encore lieux de la Lune dans les douze signes. Ce zodiaque que j'ai également apporté de l'Inde, leur a servi à composer celui du Soleil, dont le mouvement n'a pu être connu que fort long-temps après celui de la Lune, par la raison qu'il ne fait qu'en 365 jours une route que la Lune parcourt en 29 environ; mais il ne sera question ici que du zodiaque ou cercle des douze signes, tel qu'on le trouve à plusieurs anciennes églises à Paris.

L'étude de l'astronomie ancienne nous apprend que chez plusieurs peuples orientaux, le zodiaque étoit en quelque sorte sacré; une espèce d'almanach ou de calendrier religieux, lié avec les travaux de la campagne, gravé sur des pierres, & déposé dans les temples: c'est ainsi qu'en ont usé les Égyptiens, ce qu'avoient pratiqué les Phéniciens long-temps avant eux.

On trouve encore dans Josèphe des traces de ce que nous disons. Il est hors de doute que les Hébreux en sortant d'Égypte, emportèrent avec eux quantité de coutumes, de rites, même d'idoles, & de cérémonies religieuses en usage alors chez les Égyptiens. Ils prirent aussi le zodiaque de ces peuples, ce qui seul a droit de nous intéresser ici. Josèphe donc en décrivant d'après Moïse & différentes archives de sa nation, l'habillement du grand-prêtre, tel que Moïse le composa ou sortit d'Égypte dans le désert, dit positivement qu'il représentoit, avec le tabernacle & les vases sacrés, tout le monde; ce qui prouve, selon lui, que le législateur des Juifs étoit un homme divin; qu'il ne sauroit par conséquent assez s'étonner sur le sujet de l'injustice de ceux qui haïssoient les Hébreux & les traitoient d'impies, à cause qu'ils méprisent les divinités qu'ils adorent, mais qu'on voyoit que c'étoit très-faussement qu'on les accusoit.

Or, l'habillement du grand-prêtre laissoit sur le milieu

de la poitrine une ouverture de quatre doigts en quarré; & Jofèphe nous dit que cette ouverture étoit couverte par une pièce d'étoffe que les Grecs nomment *logion*, c'est-à-dire, rational ou oracle; que sur cette pièce nommée *rational*, étoient attachées douze pierres précieuses, d'une si extrême beauté qu'elles n'avoient point de prix; qu'elles étoient placées en quatre rangs de trois chacun, séparées par de petites couronnes d'or; que dans chacune de ces pierres précieuses étoit placé le nom des douze fils de Jacob; & qu'enfin elles représentoient les mois ou les douze signes figurés par ce cercle que les Grecs nomment *zodiaque*.

Il sembleroit, d'après ce récit de Jofèphe, que les douze patriarches ou enfans de Jacob étoient censés présider aux douze signes du zodiaque, à peu-près comme en Égypte, ce cercle étoit présidé par douze grands personnages ou divinités. Quoi qu'il en soit, l'on voit toujours que dans la plus haute antiquité, le zodiaque a été regardé comme une espèce de tableau sacré qui représentoit une partie du monde ou de la nature; & que l'on se faisoit un devoir de religion de le laisser en dépôt dans la race sacerdotale, parce qu'alors il n'y avoit d'astronomes, ou pour mieux dire d'astrologues, que dans la tribu des prêtres. Dans l'Inde, encore aujourd'hui, les Brame qui sont les prêtres des Gentils, ont seuls le dépôt des sciences, & par conséquent de l'astronomie.

Les Romains qui sont modernes en comparaison des Hébreux, & qui tenoient leur religion des Égyptiens & des Grecs, les Romains, dis-je, gravoient aussi quelquefois le zodiaque sur les vases qui servoient aux sacrifices. (*Voyez Montfaucon, T. II, 1.^{re} part. p. 143, pl. LXX.*)

J'ai dit que le zodiaque, tel que je l'ai apporté de l'Inde, vient des Brame. Il est en usage dans toute la presqu'île en deçà le Gange, & à Benarés; on ne peut donc se refuser d'en reconnoître l'authenticité. On trouve outre cela dans l'Inde, quelques traces du zodiaque dans
quelques

quelques pagodes : M. Call, ingénieur en chef à Madraff, en a découvert un très-bien conservé, dans le temps que je me disposois à repasser en Europe. J'ignorois qu'il en existât dans ces édifices : mes interprètes ne m'en avoient rien dit, soit que le sachant ils aient oublié de m'en parler, soit qu'ils l'ignorassent eux-mêmes. Pour moi, il ne m'a été possible d'entrer que dans une seule pagode, celle de Vilnour, dont j'ai parlé & dont j'ai donné la description dans mon voyage, & je puis assurer n'y avoir vu aucune marque de zodiaque ; mais M. Call, que son état d'ingénieur mettoit à portée nécessairement de visiter différens cantons & différentes provinces de l'Indostan, s'est trouvé dans le cas de rencontrer celui dont nous parlons. Il envoya en 1771, à M. Maskelyne, un dessin de ce précieux monument ; cet Astronome l'a fait graver & insérer dans les Transactions philosophiques de l'année 1772, & M. Bailly l'a également fait graver & placer dans son histoire de l'astronomie ancienne. On ne peut pas trop multiplier ni répandre la connoissance de pareils monumens.

Il se rencontre quelques petites différences entre ce zodiaque & celui que je tiens des Brames. Malgré ces petites différences, qui m'ont à la vérité fait croire que ce zodiaque étoit l'ouvrage des architectes Indiens, & non des Brames, je le regarde avec MM. Maskelyne & Bailly, comme très-curieux, & encore comme très-ancien ; & je lui dois ce qui fait l'objet de ce Mémoire.

Ce zodiaque en effet m'a fait réfléchir à une chose que j'avois dite dans mon voyage, c'est que notre ancienne architecture gothique est dans le goût Indien, en sorte que cette architecture, bien antérieure à celle que nous avons prise depuis des Grecs & des Romains, vient comme le zodiaque d'une source commune ; d'où je conclus que le même génie doit avoir guidé nos anciens architectes Goths & les architectes Indiens. D'après cette idée, je cherchai dans nos anciennes églises gothiques, s'il ne se trouveroit pas quelques traces des signes du zodiaque, dans le goût,

ou à peu - près , de celui des Transactions philosophiques. J'eus bientôt la satisfaction d'en trouver un sous une des portes de l'église de Paris.

Je fus tout étonné de le voir pour la première fois ; au bout de trente ans & plus de séjour dans cette capitale.

Ce zodiaque est très-bien conservé , si on en excepte le Sagittaire , le Capricorne & le Verseau , qui sont un peu mutilés. On le voit au bas de la tour septentrionale à droite & à gauche de l'entrée de l'église , sur deux espèces de pilastres , en sorte qu'il y a six signes de chaque côté. A gauche , ils commencent en bas par le Verseau , & finissent au Lion placé au haut du pilastre. A droite , les six autres commencent par le Capricorne , & finissent au Cancer , placé vis-à-vis le Lion au haut de la colonne ; mais l'ordre des signes m'a paru interverti , en ce que le Lion est mis où devroit être placé le Cancer , & réciproquement.

A côté de ces signes , sur l'autre face des pilastres , on a mis autant de figures symboliques , qui représentent les travaux & les occupations de la campagne , pendant que le soleil parcourt les douze signes. Je ferai observer ici une chose importante , c'est que ces symboles sont accommodés au climat de Paris & des environs. J'ai fait dessiner le tout avec beaucoup de soin ; j'y ai joint le zodiaque des Transactions philosophiques : j'ai présenté le tout à l'Académie , avec des réflexions sur ces deux monumens ; on peut les voir parmi les Mémoires de cette Académie , pour 1785. J'avois laissé là ce zodiaque depuis cette époque ; mais quelques réflexions que plusieurs savans curieux d'antiquités m'ont fait faire , principalement M. l'abbé le Blond , de l'Académie des belles-lettres , sont cause que j'y suis revenu , & je ne regrette pas le temps que j'y ai employé.

J'avois négligé de marquer dans mon dessin douze autres figures également symboliques , que j'avois cependant bien remarquées d'abord ; mais je ne voyois pas alors qu'elles eussent un rapport bien évident avec les douze signes du zodiaque. Ayant jugé depuis que tout devoit former une

espèce de tableau relatif au même objet , j'en ai fait le sujet d'un autre Mémoire ; & j'ai fait faire un dessin de ces douze tableaux , pour le joindre au premier (on le verra parmi les planches) : je dois dire ici en deux mots en quoi il consiste.

La porte où l'on voit le zodiaque , est séparée en deux par un mur que soutient en dedans une colonne d'un goût gothique & très - ancien , au - devant duquel est une espèce de pilastre qui débordé un peu le mur de chaque côté.

C'est sur les faces latérales de ce pilastre que sont sculptées les douze figures symboliques dont je viens de parler , & en face par conséquent de celles qui sont à côté des douze signes du zodiaque. Parmi ces figures , on en remarquera principalement une à deux faces qui regardent l'une l'orient & l'autre le couchant , & qui ne peut être que le Janus des anciens Latins , comme nous le ferons voir ci-après , & non point ce qu'en disent MM. Dupuis & Lalande. Au-devant de ce pilier est un piédestal gothique , sur lequel pose une figure de la Vierge avec l'enfant Jésus entre ses bras. Plus bas , on a mis autour du piédestal , en petites figures comme sont celles du zodiaque , l'histoire abrégée d'Adam , celle d'Eve & du serpent ; ce monstre paroît sous une forme singulière , entre les branches d'un arbre qui s'élève du milieu des figures. Son corps , beaucoup plus gros que ne semble le demander la petitesse de sa queue , avance le long du piédestal , & s'y soutient au moyen de deux espèces de pattes comme celles des lézards ; sa queue est entortillée entre les branches de l'arbre ; & sa tête , sous la forme d'une espèce de figure humaine , pose sous le pied droit de la Vierge qu'elle semble écraser : enfin Adam & Eve sont chassés du paradis terrestre. Je ne parlerai point ici , dans la crainte d'être trop long , d'un zodiaque à peu - près pareil que l'on peut voir à l'abbaye des Bénédictins à Saint - Denys , où l'on a mis aussi un Janus à deux faces , mais que je ne fais qu'indiquer ici , pour passer à un autre monument de cette espèce , que j'ai encore

découvert, depuis plus d'un an, dans l'église de Sainte-Genève de Paris. Il a cela de commun avec celui des tours de Notre-Dame, qu'il est accompagné également de l'histoire de la création, de la chute d'Adam & d'Eve, & de la punition qui suivit ; mais le zodiaque de Saint-Genève est peut-être plus curieux que celui de Notre-Dame, en ce qu'il m'a paru qu'on y remarquoit des vestiges d'hiéroglyphes Égyptiens, & qu'on ne trouve point à Notre-Dame ; ce qui semble cependant prouver que dans ces temps-là, on les employoit quelquefois à servir d'ornemens dans les églises. Cela m'a paru encore très-évident, par les choses que j'ai vues à la basilique de Saint-Germain-des-Prés, bâtie, selon la tradition, sur les ruines d'un temple d'Isis.

Pour revenir à notre nouveau zodiaque, il est sculpté sur les chapiteaux des colonnes de la nef. Il n'est pas si apparent, à beaucoup près, que celui de Notre-Dame, parce qu'il est environné de quantité d'ornemens, parmi lesquels les signes sont, pour ainsi dire, confondus ; cependant dans un beau jour, on les distingue très-bien en y donnant un peu d'attention.

Deux choses m'ont arrêté quelque temps, lorsque j'ai voulu décrire ce zodiaque. La première, c'est que l'ordre des signes est tellement interverti, que j'ai balancé sur celui que je suivrois.

La seconde, c'est que le Cancer & le Scorpion ne s'y trouvent point ; & que comme les signes ne sont point sur deux pilastres, comme à Notre-Dame, qu'ils ne se suivent point dans leur ordre ordinaire, il ne m'a pas été facile de deviner ce qu'on a voulu dire par les figures qui sont à la place de ces signes qui manquent. Le Cancer semble avoir été désigné de temps immémorial par le signe naturel, c'est-à-dire, par un crabe, ou par une grosse écrevisse de mer, comme il est à Notre-Dame ; de même le Scorpion l'a été par l'animal connu sous ce nom. Dans le zodiaque de Sainte-Genève, on ne voit ni l'un ni l'autre. J'ai seulement remarqué qu'à côté du

Lion, on avoit placé un grand oiseau qui a le bec long & crochu, & à côté du Sagittaire, une espèce de dragon; & entre le Verseau & le grand oiseau dont je viens de parler, un animal que je ne saurois désigner bien exactement: c'est bien une espèce de lézard approchant de la forme de la salamandre, mais cet animal est pourvu de six pattes. Nous allons cependant essayer d'expliquer ces trois symboles, & de découvrir lequel de ces trois animaux désigne le Cancer, lequel représente le Scorpion. Nous croyons l'avoir découvert; nous n'en serons pas moins disposés à recevoir & à admettre toute autre explication qu'on pourroit nous proposer, préférable à la nôtre.

Nous observerons avant tout, que ce zodiaque est sur deux seules colonnes; qu'il n'y a que cinq signes sur l'une des deux, & que les sept autres sont sur l'autre colonne.

Pour aider à le reconnoître, je dirai que la nef de Sainte-Geneviève est soutenue par huit colonnes, dont quatre de chaque côté. Je fais commencer le zodiaque à la seconde colonne des quatre qui sont à la gauche en entrant. C'est autour du chapiteau de cette seconde colonne que sont ciselés les cinq premiers signes; les sept autres sont autour du chapiteau de la quatrième colonne parmi les quatre que l'on trouve à droite. On voit donc sur le chapiteau du second pilier de la gauche, & sur la face qui regarde la nef,

1.° Le capricorne, désigné par une chèvre & un bouc qui se suivent; la Chèvre est debout à droite, le bouc à gauche. Cette figure-ci est terminée comme nous terminons encore aujourd'hui le Capricorne, par une longue queue de poisson, mais repliée deux fois sur elle-même. Ensuite tournant autour de la colonne, en la tenant sur la droite on voit sur la seconde face,

2.° Les Poissons, désignés par deux poissons avec leur lien, comme ils sont figurés par tout. En continuant de faire le tour on voit sur la troisième face,

3.° Le Taureau sur la droite;

4.° Le Bélier sur la gauche.

Enfin, sur la quatrième face on voit au milieu ,

5.^o Les Gémeaux, désignés en effet par deux enfans naissans qui se tiennent sous les bras.

De-là traversant la nef par une ligne diagonale, on arrive à la quatrième colonne du second rang. Là, on voit sur la face du chapiteau qui regarde la nef ,

6.^o Le Cancer, qui m'a paru désigné sous la figure d'un ibis, espèce de cigogne, oiseau de passage qui étoit en Égypte l'avant-coureur du débordement du Nil & du lever du grand Chien, qui arrivoient sous le signe du Cancer.

Pour rendre raison de ceci en deux mots, nous ferons observer que chez les Égyptiens, le zodiaque étoit partagé en douze maisons, gouvernées ou dominées chacune par un génie particulier; c'étoient les douze grands dieux d'Égypte. Le Cancer fut le partage de Mercure; de-là, la septième maison, qui est celle du Cancer, parce qu'ils commençoient à compter par le Capricorne, étoit consacrée au génie ou dieu Hermanubis, c'est-à-dire, à Mercure, qu'ils représentoient sous la figure d'un ibis, &c. A Racota, contrée d'Égypte, sur le bord de la mer, où depuis fut bâtie Alexandrie, les habitans honoroient Mercure sous la forme de cet oiseau; & dans les anciens planisphères Égyptiens on trouve en effet le Cancer désigné sous cette forme, ou bien sous celle d'une tête & d'un cou de cigogne, avec une queue d'écrevisse. (*Voyez Kircher, Œdip. Egypti, tom. I & II.*)

7.^o A droite de l'ibis est le Lion, sous la forme d'un véritable lion qui seroit de bout; puis tournant la colonne la laissant à gauche, on voit sur la seconde face du chapiteau ,

8.^o La Balance, désignée par une figure de femme qui tient en effet une balance dans la main gauche.

9.^o A droite est une figure mutilée, qui me paroît être une femme, & qui en conséquence ne peut être que la Vierge. Continuant de faire le tour, on voit sur la troisième face ,

10.^o Le Sagittaire, ce monstre composé d'un corps entier de cheval, sur lequel s'élève un corps humain armé d'un arc & d'une flèche qu'il est censé lancer sur le Scorpion : mais ici la partie humaine de ce monstre est dans une position opposée à celle qu'elle a dans nos cartes célestes ; elle est tournée vers la croupe ou le derrière de l'animal ; dans cette attitude elle lance sa flèche. A droite, on voit sur la même face,

11.^o Le Scorpion, désigné ; à ce que j'ai jugé, sous la forme d'un dragon qui tourne la tête du côté opposé au Sagittaire, comme pour s'échapper. Celui-ci au contraire, par son attitude d'avoir le corps & la tête tournés du côté du dragon, semble en effet ne s'être retourné que pour lui lancer sa flèche. Voici l'explication de ce symbole.

Selon Kircher, le Scorpion est Typhon que poursuit le Sagittaire, & qu'on représente ordinairement sous la forme d'un énorme géant, le corps entortillé de serpens, dont les doigts sont également de longs serpens, & dont les pieds qui se joignent, finissent en queue de serpent. Mais le pere Kircher ajoute que quelques auteurs racontent que Typhon étoit un insigne dragon qui portoit le ravage & la désolation par-tout ; c'est ce qui m'a fait conjecturer qu'à Sainte-Geneviève on avoit mis à la place du Scorpion, le géant Typhon sous la figure du dragon que l'on trouve à côté du Sagittaire.

Enfin la quatrième face représente,

12.^o Le Verseau. C'est un homme debout, qui renverse une cruche pleine d'eau qu'il a entre ses bras. D'un côté, à gauche, auprès de la chute de l'eau, on voit un poisson qui lance de l'eau par la bouche. C'est le poisson austral, l'Oxirynque & le Lépidote des Egyptiens & des Grecs, & l'Oannès des Chaldéens, qui dans les anciennes cartes de la primitive sphère étoit représenté à-peu-près ainsi, c'est-à-dire, recevant dans sa bouche l'eau du Verseau. (*Voyez Hygin.*)

De l'autre côté du Verseau à droite, on voit dans un coin l'animal à six pattes dont j'ai parlé, sous la forme allongée d'un lézard, & que j'ai supposé être un symbole de l'eau, parce que semblable au poisson austral, il lance de l'eau par la bouche. Par-là j'ai jugé que cet animal d'un côté, le Poisson austral de l'autre, & le Verseau entre deux, formoient un seul & même symbole qui désigne le signe du Verseau.

Une chose qui m'a paru singulière, c'est que ce même animal avec huit pattes au lieu de six, est dans le zodiaque de Saint-Denys, à la place où paroîtroit devoir être le Scorpion, comme on verra ci-après.

Tels sont les douze signes du zodiaque, sculptés dans l'église de Sainte-Genève. Je me suis déterminé à faire faire des dessins corrects de ces curieux chapiteaux, avec d'autant plus d'empressement qu'ils intéressent l'histoire de l'astronomie, que cette église va bientôt se trouver dans le cas d'être renversée, & qu'il est par conséquent important de les conserver & de les faire connoître.

En face de ce dernier pilier, de l'autre côté de la nef, on a mis autour du chapiteau de la colonne qu'on y voit, l'histoire de la Genèse, comme on a fait à Notre-Dame.

On voit la formation d'Eve d'une côte d'Adam, qui paroît pendant ce temps fort tranquille dans un coin. Une inscription latine qu'on lit au haut, annonce l'espèce de ravissement où il se trouva en voyant une compagne: mais pendant qu'il s'occupe à dormir, Eve s'amuse à converser avec le serpent; celui-ci lui offre la pomme fatale, elle la prend de sa propre bouche: elle est chassée du paradis terrestre avec Adam, comme au zodiaque de Notre-Dame.

Mais ce chapiteau renferme à la suite, des figures dont je n'ai pu encore découvrir le sens ou l'allégorie; on en voit une, par exemple, au milieu d'une espèce de treille garnie de grappes de raisin, que j'aurois volontiers prise pour Noé, si ce n'est qu'elle se termine par une longue queue de poisson. Tel toute l'antiquité nous peint Dagon,

le Dieu des Phéniciens, telle encore on nous peint la Déesse de Syrie, qui est l'Isis des Égyptiens.

Quant à l'antiquité de ce zodiaque, j'avoue qu'il est fort difficile de fixer son époque d'une manière bien précise; nous allons cependant hasarder ici notre opinion, sans prétendre vouloir batailler pour la soutenir. A en juger par le goût de l'architecture, de la sculpture, les traits des figures, & par les emblèmes qui y sont, il m'a paru qu'il faudroit faire remonter ce monument aux premiers siècles de la monarchie, vers les temps de Clovis; & c'est en effet à cette époque, ou à peu - près, que les fondemens de la basilique de Saint-Pierre & de Saint-Paul, qui est aujourd'hui Sainte-Genève, furent jetés. Je ne peux pas, à la vérité, ignorer que cette église fut pillée, & peut-être en partie brûlée ou renversée par les Normands. Cependant il y a toute apparence que les colonnes de la nef ne furent pas toutes détruites, & qu'on a rétabli cette église successivement, en laissant subsister ce qui existoit déjà, ou en se servant des anciens matériaux; car c'étoit assez l'usage de ces temps-là. Une chose est vraie dans tout ceci, c'est que le portail ou l'ancienne entrée de ce temple qui étoit du temps de Clovis, subsiste encore aujourd'hui, ainsi que les deux figures qui représentent Saint-Pierre & Saint-Paul, à qui cette basilique fut d'abord dédiée: ce sont encore des restes évidens de l'ancien portail; le dessus qui s'en alloit de vétusté, a été refait au commencement de ce siècle.

Ces figures de Saint-Pierre & de Saint-Paul, sont dans le même goût que celles que l'on voit sous le portail de l'abbaye Saint - Germain, qui sont-là depuis la même époque, ainsi que tout le portail & la grosse tour qui pose dessus, jusqu'à l'endroit où sont les bourdons; car la partie où ils sont, a été construite depuis. En général, je dirai ici en deux mots que les recherches que j'ai faites à cette occasion, m'autorisent à pouvoir avancer que nos anciennes églises, l'abbaye Saint-Germain, celle de Saint-Denis en France, Notre-Dame de Paris, ont été bâties à plusieurs

fois, & que le devant de ces églises, jusqu'à une certaine hauteur & même une partie du bas de la nef, comme à Saint-Deuys, sont des restes des premiers édifices élevés dans les premiers siècles de la monarchie; la même chose peut être arrivée à Saint-Geneviève. (*Premier volume de l'histoire de Paris, histoire de Saint-Germain & de Saint-Denys.*)

La religion d'Isis, qui n'est autre chose que le culte rendu à la nature personnifiée, étoit venue dans les Gaules s'y établir avec les Romains leurs conquérans. Cette religion qui s'étoit pour ainsi dire humanisée & civilisée chez les Romains, & qui n'avoit par conséquent rien de fort austère, eut par cette raison bientôt forcé les Druides barbares & sanguinaires, à lui céder le terrain. On sait qu'on l'a professée principalement à Paris & dans les environs; mais elle devint bientôt foible & languissante sous nos premiers rois; cependant dans cet état, elle dominoit encore, & ce ne fut que sous le roi Childebart qu'elle fut enfin bannie de Paris & des pays qui étoient soumis à ce prince, sans qu'il fût permis de la professer publiquement. Quoiqu'il ne lui fût plus possible de se relever, il dut rester encore pendant quelque temps des traces de cette ancienne religion; c'est selon moi la raison pour laquelle on voit dans ces anciennes églises dont nous parlons, des monumens qui tiennent encore à Isis.

C'étoit alors l'affaire des maçons, architectes, sculpteurs Goths, que je suppose qu'on laissoit absolument libres sur cet article; car, quant aux astronomes, il est bien certain que si l'on peut dire qu'il y en eut alors à Paris, ces astronomes n'ont point guidé les architectes, & n'ont eu aucune part à ces ornemens. Par conséquent, ces signes du zodiaque intervertis dont nous venons de parler, ne sont qu'un ouvrage d'idée de ces sculpteurs Goths, encore infectés sans doute de la religion d'Isis.

Une autre raison semble se joindre à celle-ci. Dom Bouillard, dans son histoire de Saint-Germain des Prés,

nous dit que l'opinion commune étoit qu'à l'endroit où est aujourd'hui cette église, les prêtres d'Isis avoient un temple, & que c'est sur cet ancien temple, qui tomboit en ruine, que fut bâtie la basilique de Saint-Vincent, aujourd'hui Saint-Germain, afin, ajoute-t-il, de faire succéder le culte du Dieu du ciel à celui des fautes divinités. Si cela est ainsi, on attachoit donc alors une espèce de devoir religieux à bâtir nos temples sur les temples payens ou idolâtres; on ne prenoit donc pas à tâche d'en bannir les ornemens Égyptiens & Isiaques, lorsqu'ils pouvoient y être. Dès-lors, ils dûrent se trouver mêlés avec ceux qu'on tiroit du fond de notre religion; & cela est bien évident à Saint-Germain, car on y voit des espèces d'hiéroglyphes qui ont rapport au culte que l'on rendoit à la nature dans la religion d'Isis; & quoiqu'on n'y trouve du zodiaque que le seul signe des Poissons, ce signe, tel qu'il est désigné ici, me porteroit assez à croire que dans le principe tout le cercle entier y fut sculpté. Quoi qu'il en soit, en entrant dans cette église par le grand portail, on trouve à gauche un pilier engagé dans le mur, d'une médiocre grosseur, & qui aide avec le mur à soutenir la tour de ce côté: le chapiteau de ce pilier, reste vraisemblablement du vestibule du temple d'Isis, engagé qu'il est dans le mur, ne présente que trois faces. Or, ces trois faces offrent un symbole aquatique des plus singuliers, en ce qu'il m'a paru être, à quelques légères différences près qui ne touchent point au fond de la chose, celui que le père Kircher nous donne pour le signe des Poissons dans l'ancien système Egyptien. On y voit donc cinq poissons qui paroissent là jetés comme au hasard; une assez grande figure, dont la tête représente une personne d'un âge mûr, accompagnée d'une chevelure qui ressemble beaucoup à celle qu'on donne quelquefois à Isis & à Osiris; mais la partie inférieure se termine en poisson. Cette figure a une espèce de main, qui lui sert à saisir un des poissons. Vis-à-vis d'elle, est une pareille figure à visage humain, & dont

la partie d'en bas finit également en poisson; elle en tient aussi un sous son bras. Enfin, au bas de cette espèce de tableau, on a placé les deux poissons du zodiaque avec leur lien.

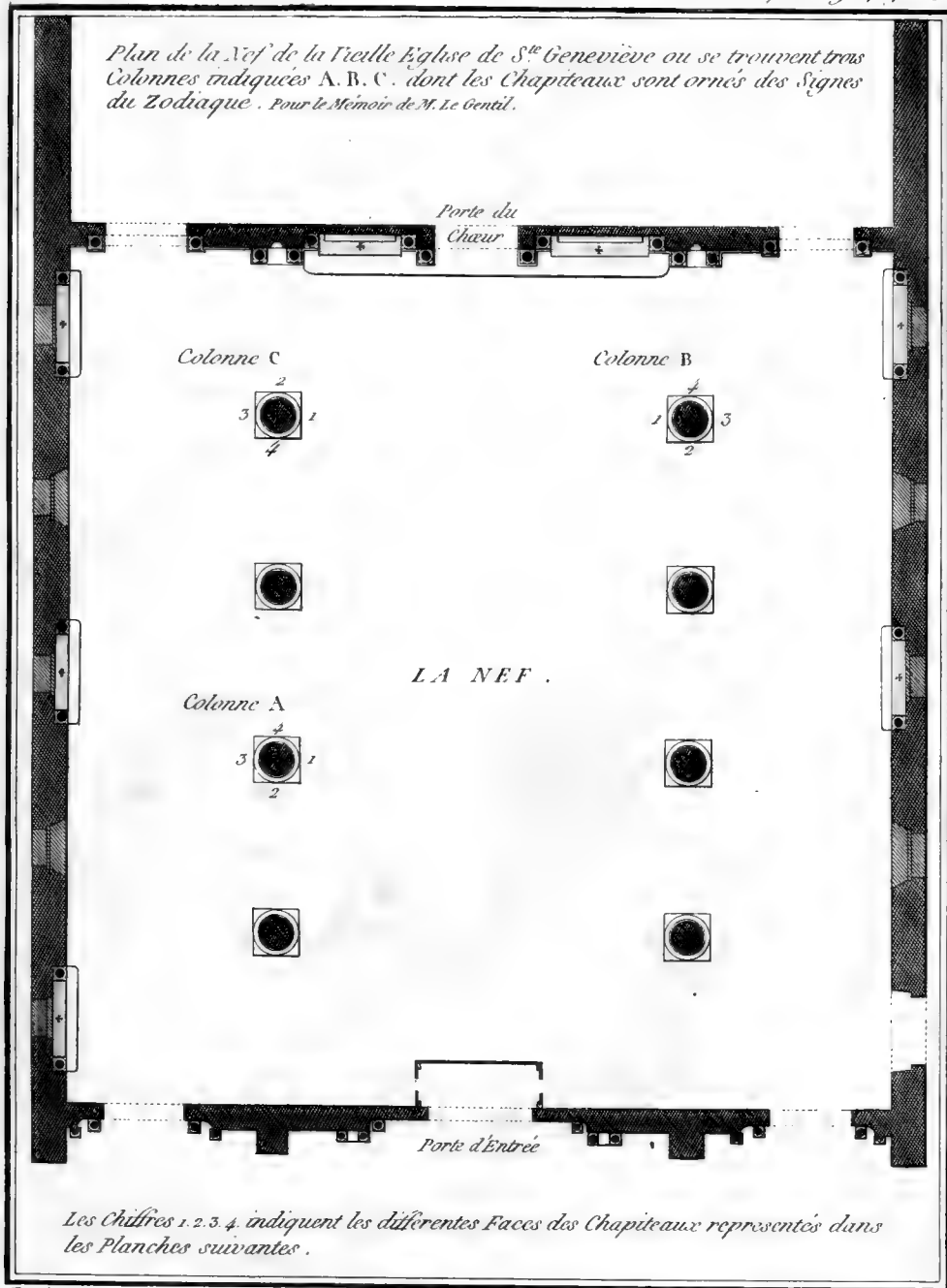
C'est au signe des Poissons que toutes ces choses ont rapport, puisqu'il est évident qu'ils y sont. Mais pourquoi placer au même endroit cinq autres poissons, & deux monstres moitié hommes & moitié poissons, tenant chacun un de ces poissons entre leurs bras? il me paroît que le père Kircher va nous en donner l'explication.

Chez les Égyptiens, le signe des Poissons ou la troisième maison du zodiaque, à commencer toujours par le Capricorne, étoit dédié ou consacré au génie Icton; & par ce génie, ils entendoient, selon Jamblique, une représentation de la nature, source de la fécondité universelle. Or, les Égyptiens ne crurent pouvoir mieux représenter & avec plus d'énergie, cette fécondité universelle de la nature, que par l'emblème des poissons dont la fécondité est immense; en conséquence, ils peignirent dans leur zodiaque ce génie universel, sous la figure d'une femme depuis la ceinture jusqu'à la tête, & qui se terminoit en poisson par la partie inférieure; ils joignoient ces deux poissons avec un lien. Cette figure avoit deux bras & deux mains; c'étoit au fond l'Iûs de Syrie. (*Kircher, Œdip. Egypt. t. II.*)

Voilà donc, à ce qu'il nous semble, un symbole ou hiéroglyphe Égyptien, relatif au zodiaque, & par conséquent à l'astronomie, dans la basilique de Saint-Germain. C'est un monument que tout le monde est à portée de voir par soi-même.

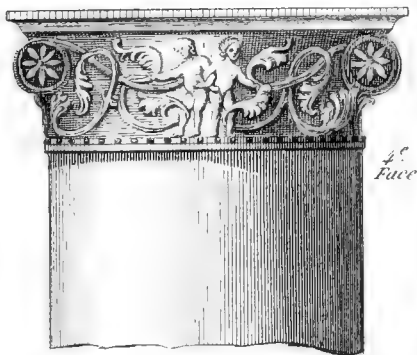
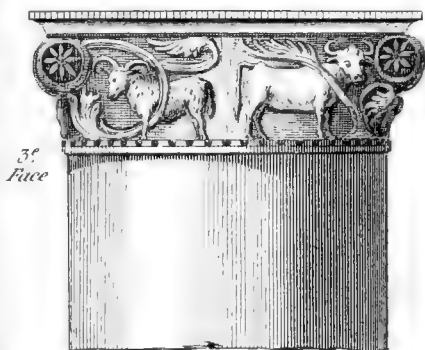
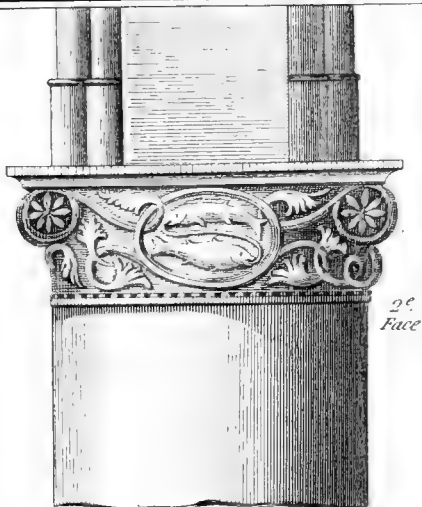
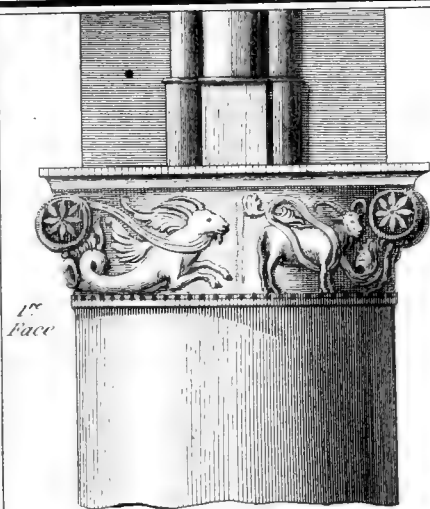
C'est à quoi se réduisent les marques d'un zodiaque à Saint-Germain; les piliers de la nef sont garnis de beaucoup d'autres figures, mais qui n'ont aucun rapport à ce cercle. Les chapiteaux de ceux de la droite contiennent des accouplemens de différens animaux monstrueux, & dans le goût Égyptien. Plusieurs ont, comme les Égyptiens la donnoient aussi quelquefois à Osiris, une tête d'épervier.

Plan de la Nef de la Vieille Eglise de S.^{te} Geneviève ou se trouvent trois Colonnes indiquées A. B. C. dont les Chapiteaux sont ornés des Signes du Zodiaque. Pour le Mémoire de M. Le Genêt.



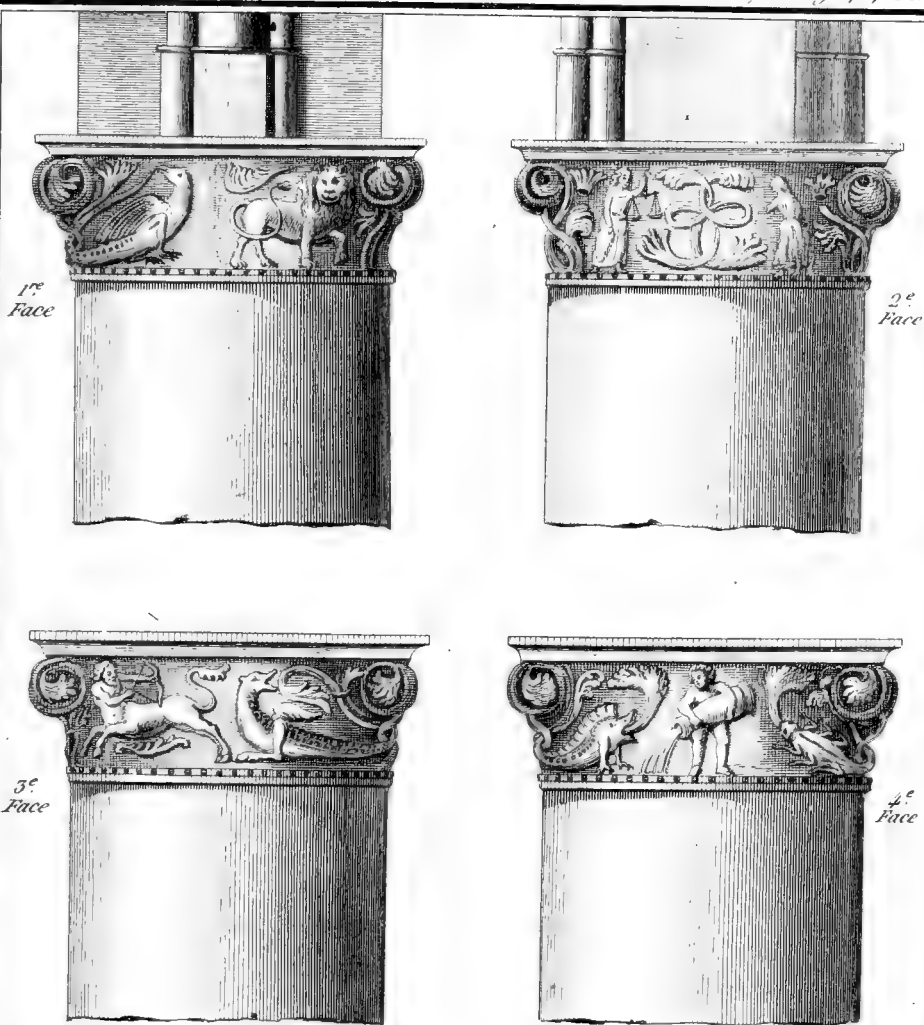
Les Chiffres 1. 2. 3. 4. indiquent les différentes Faces des Chapiteaux représentés dans les Planches suivantes.





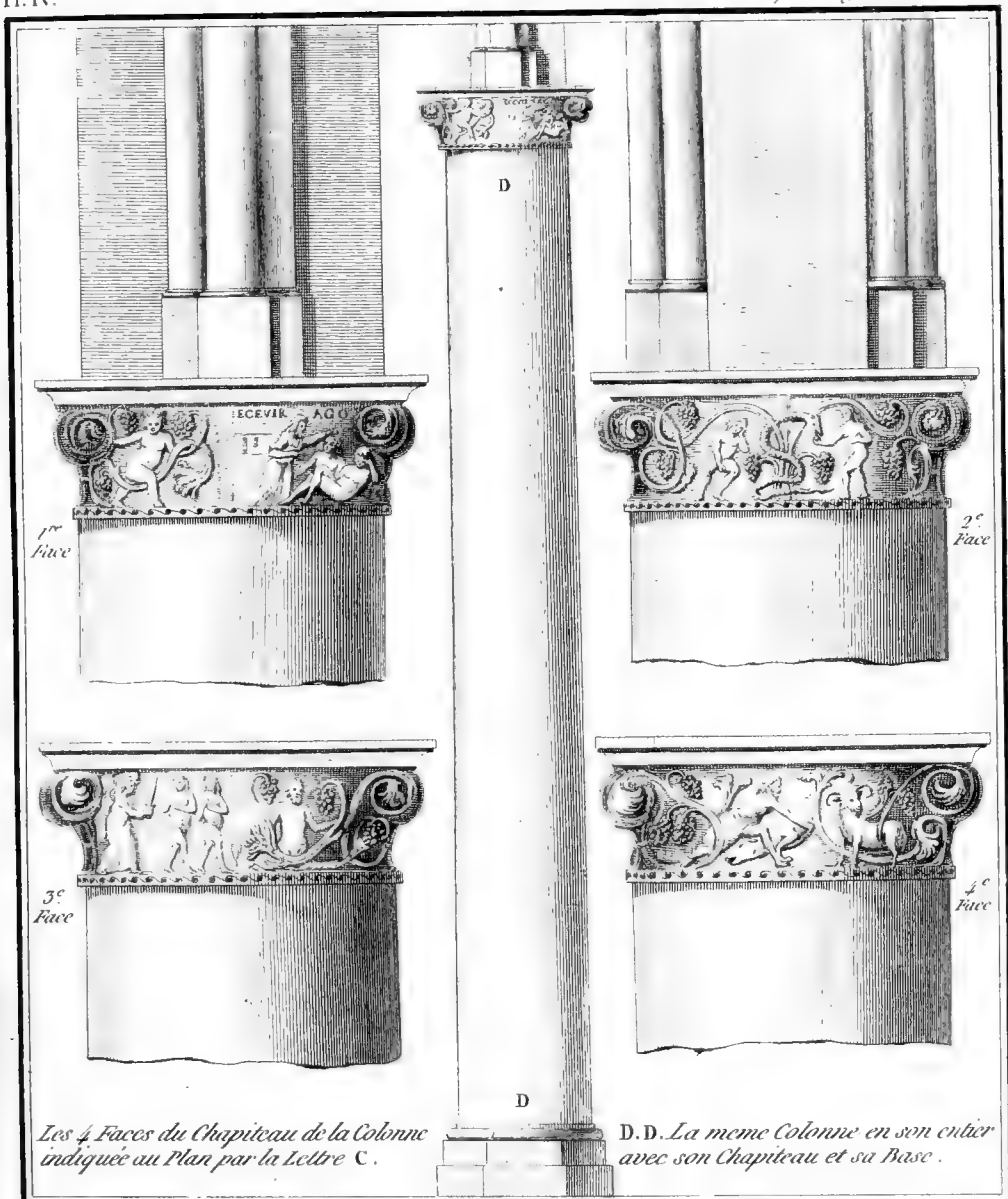
Les 4 Faces du Chapiteau de la Colonne indiquée au Plan par la Lettre A.



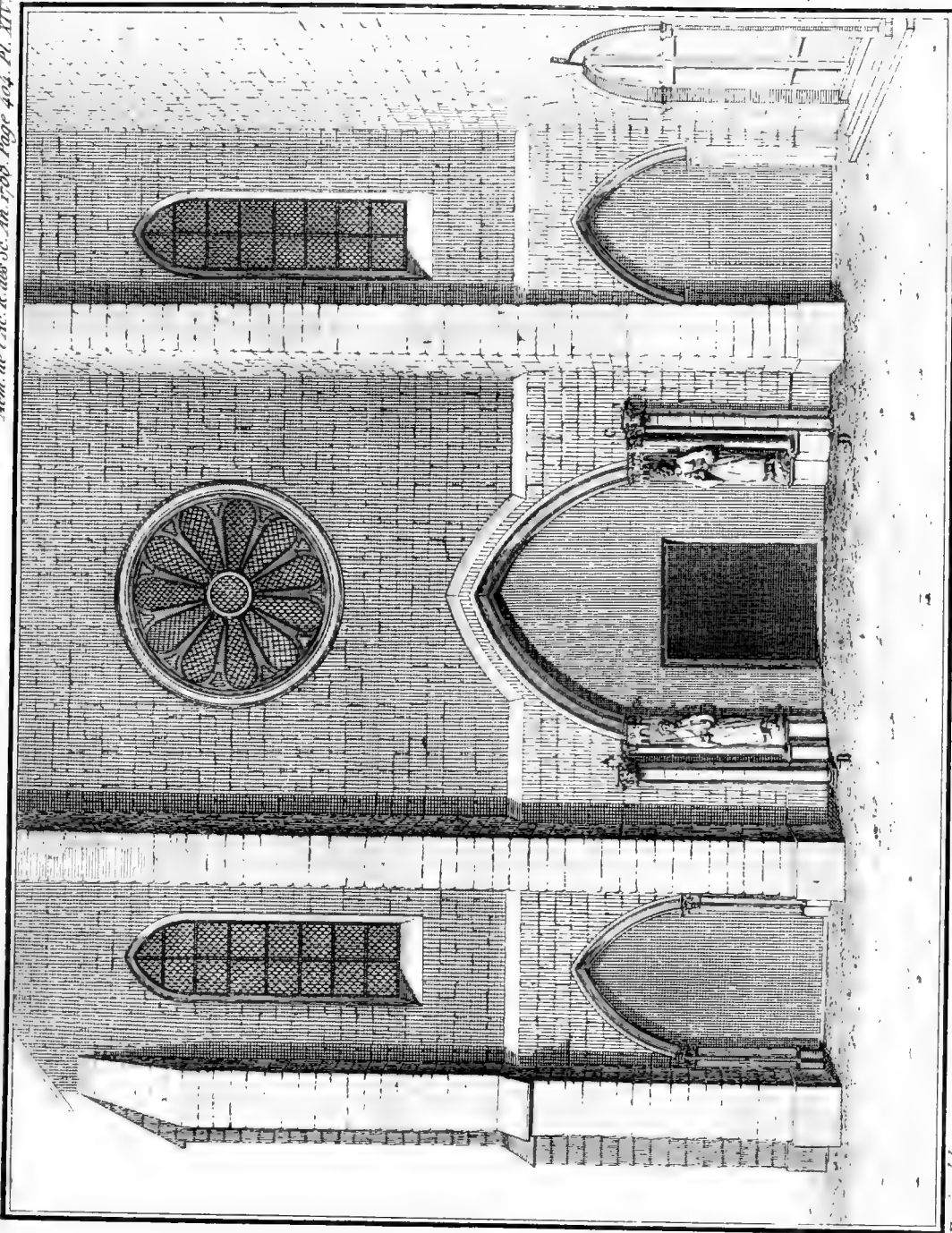


Les quatre Faces du Chapiteau de la Colonne indiquée au Plan par la Lettre B





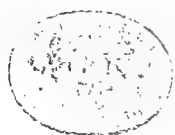


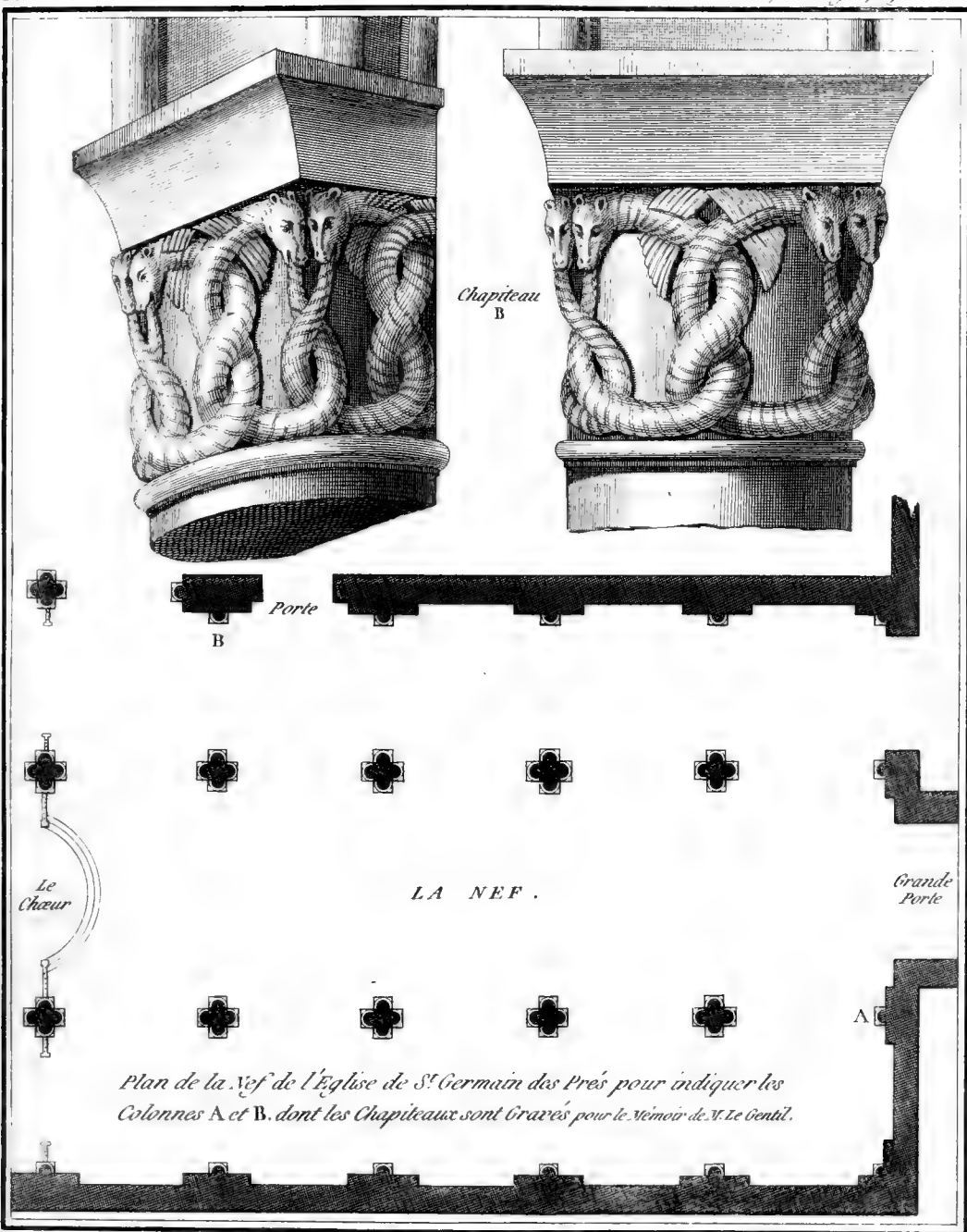


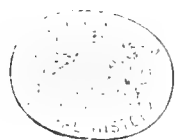
P. V. del.

Portail de la vieille Eglise de St. Germain ou l'on voit les parties A.B.C.D. qui sont d'Ancienne Construction.

V. Le Camus sc.

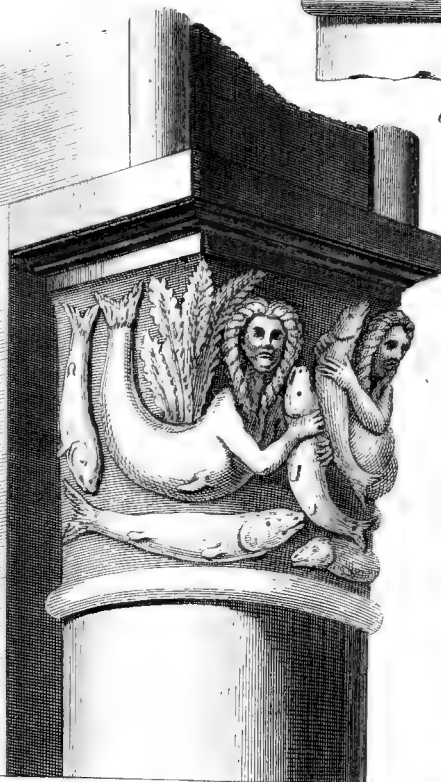








Chapiteau
A





(l'on peut consulter Kircher, dom Montfaucon, ou enfin l'histoire du ciel par Pluche, qui n'a fait que copier ces deux auteurs, au mot *Horus*;) & si on regarde au contraire les chapiteaux des colonnes opposées, ou de la gauche, ils sont garnis de figures tirées évidemment du fond de la religion catholique, & qui paroissent aussi anciennes que les autres. Mais toutes ces figures, quelque intéressantes qu'elles puissent être par elles-mêmes, ne sont point de notre ressort : nous devons donc nous contenter de citer encore ici pour dernières marques de symboles Égyptiens, & en même temps astronomiques à Saint - Germain, plusieurs grands serpens, tels qu'on nous peint certains serpens ailés de la Libye ou d'Arabie que le vent apportoit en Égypte, pour y être la proie & la pâture des ibis. Ces serpens ont en effet de même des ailerons sur le cou, & sur la tête des espèces de crêtes ou de couronnes, comme Kircher les leur donne; ils sont de plus entrelacés deux à deux en formant quatre nœuds, & ils finissent par se dévorer le bout de la queue. Or, le père Kircher nous dit que cette espèce de symbole, qui vient encore des Égyptiens, désignoit chez eux l'année hyérophantique ou hiéroglyphique de 1460 ans, de 365 jours & $\frac{1}{4}$ chacune; & les quatre plis, les années bissextiles de quatre ans en quatre ans.

On remarquera aisément le pilier où ce monument se trouve, si l'on entre par le portail latéral de Saint-Germain; il est à droite, le premier pilier engagé que l'on trouve, faisant très-vraisemblablement avec le mur les restes de l'ancien temple. Ce pilier est presque contigu à un autre, mais très-moderne, d'une architecture Corinthienne, & qui forme seul le coin de la chapelle Saint-Maur de ce côté.

Je suis très-surpris que le père Mabillon qui s'est attaché à décrire le portail de Saint - Germain avec un soin si scrupuleux, à cause de son antiquité, n'ait pas dit un mot des chapiteaux des colonnes de la nef, qui sont peut-être plus curieux encore & plus intéressans.

DESCRIPTION

*Du zodiaque que l'on voit à l'Abbaye des Bénédictins,
à Saint - Denys en France.*

Par M. LE GENTIL.

CE zodiaque, comme celui de Notre - Dame de Paris, est sur deux pilastres, à la porte d'entrée au bas de la tour septentrionale : cette tour a une flèche.

Il manque à la rigueur trois signes, sans qu'il soit possible de deviner la cause de cette omission, si ce n'est le caprice de l'architecte. C'est sans doute par une raison à peu - près la même, que les neuf signes seulement qu'on y voit sont intervertis. Ces neuf signes sont le Taureau, le Bélier, les Poissons, le Verseau, les Gémeaux, la Balance, le Sagittaire & le Capricorne : j'ai compté pour un signe une espèce de salamandre, ou espèce de lézard à huit pattes, pareil à celui du zodiaque de Sainte-Geneviève, placé entre la balance & le sagittaire. Le pilastre à gauche en entrant, est divisé comme celui de la droite en dix cadres où carrés, de la grandeur à peu-près de ceux qui sont à Notre-Dame.

CADRES de la GAUCHE, en commençant par le haut. *CADRES de la DROITE, en commençant par le haut.*

1.^{er} Cadre. C'est une figure de femme nue, couchée sur une espèce de linceul.

2.^{es} Cadre. Il représente des fleurons, & ne contient que des ornemens.

3.^{es} Cadre. Il renferme le Taureau.

1.^{er} Cadre. Les Gémeaux.

2.^{es} Cadre. Il contient des ornemens seulement; c'est une espèce de rose.

3.^{es} Cadre. C'est la Balance; il représente une figure de femme assise dans un fauteuil, tel qu'on fait voir celui de Dagobert. Cette femme tient une balance en l'air, comme dans le zodiaque de Sainte - Geneviève.

CADRES de la GAUCHE.

4.^e *Cadre.* Il ne contient que des ornemens, & un enfant qui repose au centre, la tête appuyée sur la circonférence d'une espèce de cerceau.

5.^e *Cadre.* Il renferme le béliér.

6.^e *Cadre.* Il n'est rempli que d'ornemens.

7.^e *Cadres.* Ce sont les Poissons.

8.^e *Cadre.* Il est rempli d'ornemens, qui représentent une touffe de feuilles de roseaux, à ce qu'il sembleroit; deux oiseaux à bec assez long, sont entre les feuilles, & qui semblent se becqueter comme font des tourterelles.

9.^e *Cadre.* Le Verseau; c'est un homme debout, & qui renverse une cruche ou un pot plein d'eau.

CADRES de la DROITE.

4.^e *Cadre.* Il ne renferme que des ornemens; ce sont des espèces de fleurons.

5.^e *Cadre.* Il renferme un animal à huit pattes, pareil exactement à celui que l'on voit à Sainte - Geneviève, mais qui n'en a que six. C'est à ce qu'il m'a paru une espèce de lézard; il est entre la Balance & le Sagittaire, & paroît par cette raison répondre au Scorpion.

6.^e *Cadre.* Il n'est rempli que d'ornemens.

7.^e *Cadre.* C'est le Sagittaire, comme celui de Sainte - Geneviève, & dans la même attitude.

8.^e *Cadre.* Espèces de grandes fleurs; une femme nue, groupe avec ces fleurs.

9.^e *Cadre.* Le Capricorne; c'est un bouc dans le goût de celui de Sainte - Geneviève: il n'a que les deux pieds de devant; le reste de son corps se termine en queue de poisson repliée, comme à Sainte - Geneviève, deux fois sur elle-même.

CADRES de la GAUCHE.

10.^e Cadre. C'est une figure dont la tête est entière à la vérité, mais le visage est détruit en partie. Cette figure est assise, une jambe ployée, & dont le pied pose à terre, c'est la gauche; l'autre jambe élevée en l'air comme cherchant à l'appuyer contre le mur; & qui semble en même temps de ses deux mains & de sa tête soutenir le haut du cadre, & par conséquent, tous les neuf autres qui avec celui-ci forment la hauteur du pilastre.

CADRES de la DROITE.

10.^e Cadre. C'est une figure pareille, & dans la même attitude à peu de chose près que celle qui est à la gauche, désignée sous le même numéro. Ces deux figures sont couvertes chacune d'un linceul.

Il n'y a point ici de figures symboliques à côté de ce zodiaque, comme à Notre-Dame; c'est ce qui fait que ceux qui sont allés le voir depuis que je l'ai fait connoître, n'en ont pu voir, mais je les ai trouvés cet automne.

On les a placées au bas de l'autre tour, qui n'a point de flèche. Elles sont évidemment relatives au zodiaque & aux douze mois de l'année: il y en a plusieurs qui offrent les mêmes idées que celles de Notre-Dame, & qui représentent les mêmes occupations rustiques dans les mêmes temps de l'année.

Ces emblèmes sont également dans les deux pilastres qui forment l'entrée de l'église au bas de la tour; ce ne sont point des quarrés, mais des médaillons.

Description des douze symboles qui répondent aux signes du zodiaque dont on vient de voir la description.

MÉDAILLONS de la GAUCHE.

En tête des médaillons de la gauche, est une figure toute nue qui semble se reposer, & même dormir.

MÉDAILLONS de la DROITE.

En tête des médaillons de la droite, est une figure nue qui semble également dormir, & se reposer.

MÉDAILLONS

*MÉDAILLONS de la GAUCHE.**MÉDAILLONS de la DROITE.*

1.^e Médaille. Il représente un champ de blé, un homme qui moissonne avec une faucille.

1.^e Médaille. Il représente une figure qui semble ratisser. A côté d'elle, on voit une espèce d'arbre.

2.^e Médaille. Il représente une figure qui a les bras cassés, en sorte qu'on ne peut point juger ce qu'elle faisoit.

2.^e Médaille. Il représente un cheval sellé, bridé, un cavalier prêt à monter tenant une bannière. Il paroît prêt pour aller à une expédition militaire, puisqu'il a le signal de ralliement. Il répond au signe du Taureau, temps où s'ouvrent les campagnes militaires.

3.^e Médaille. Il représente deux hommes qui entonnent du vin.

3.^e Médaille. Figure debout, les bras étendus à droite & à gauche, & paroissant de chaque main saisir une plante, & l'arracher.

4.^e Médaille. Figure qui gaule du gland, & deux pourceaux à ses pieds.

4.^e Médaille. Il représente deux figures. L'une a une jaquette & un coqueluchon; l'autre n'a que la jaquette. Elles semblent l'une couper du bois à un arbre; l'autre bêcher la terre.

5.^e Médaille. C'est une figure qui plonge un animal entier dans un baril, & semble lui couper le cou; on n'en voit que les deux pieds de devant & la tête. A côté, un porc mort est attaché par les pieds de derrière à un poteau garni d'étaux.

5.^e Médaille. Ce sont deux figures en face l'une de l'autre, assises chacune dans un fauteuil, vêtues comme en hiver; celle à droite paroît lire; celle à gauche avec une espèce de long bâton à chaque main, paroît remuer, ou arranger le feu devant lequel elles se chauffent.

MÉDAILLONS de la GAUCHE. MÉDAILLONS de la DROITE.

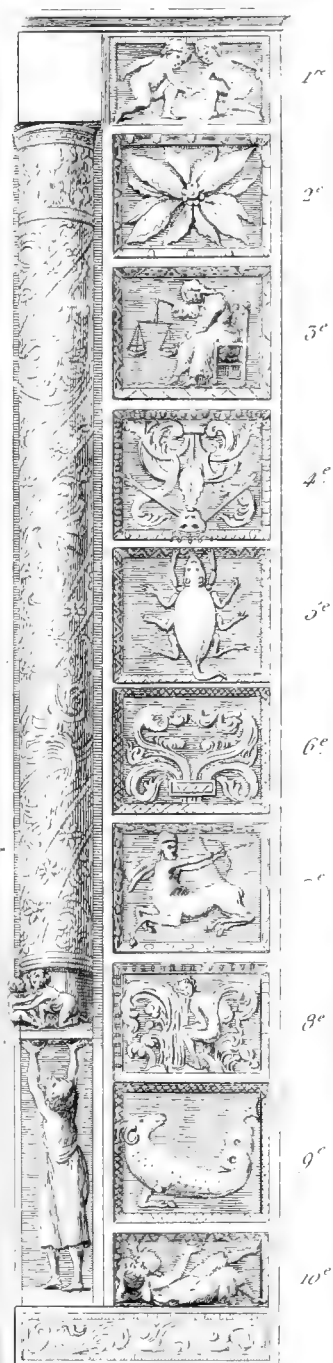
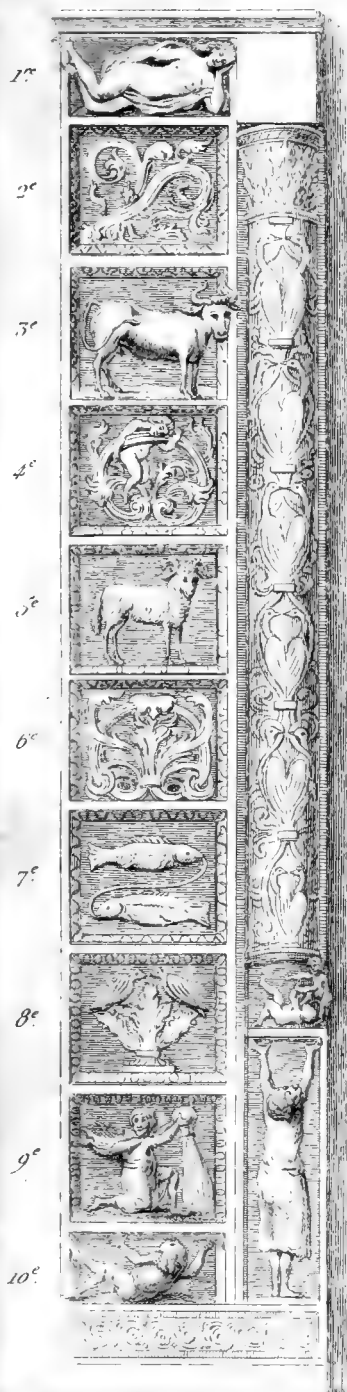
6.^e *Médaille*. Ce sont deux figures mutilées, à table, & debout; une espèce de cheminée à côté où il y auroit du feu. Ces figures tiennent quelque chose à une main : on croiroit que celle à gauche y eut un morceau à manger.

6.^e *Médaille*. Figure à deux visages. L'un des deux est mutilé & paroît jeune; celui qui ne l'est pas, a le menton garni d'une longue barbe & paroît vieux. Cette figure est à moitié couverte d'un linceul, comme celle de Notre - Dame, & debout. Deux espèces de tourelles,

sont l'une à droite, l'autre à gauche; un enfant entre dans l'une, pendant qu'un autre enfant semble sortir de l'autre, la figure à double visage étend chaque main sur la tête de chacun des enfans. Tous ces médaillons, tant ceux de la gauche que ceux de la droite, sont soutenus par un lion qui est au-dessous, & couché comme exprès.

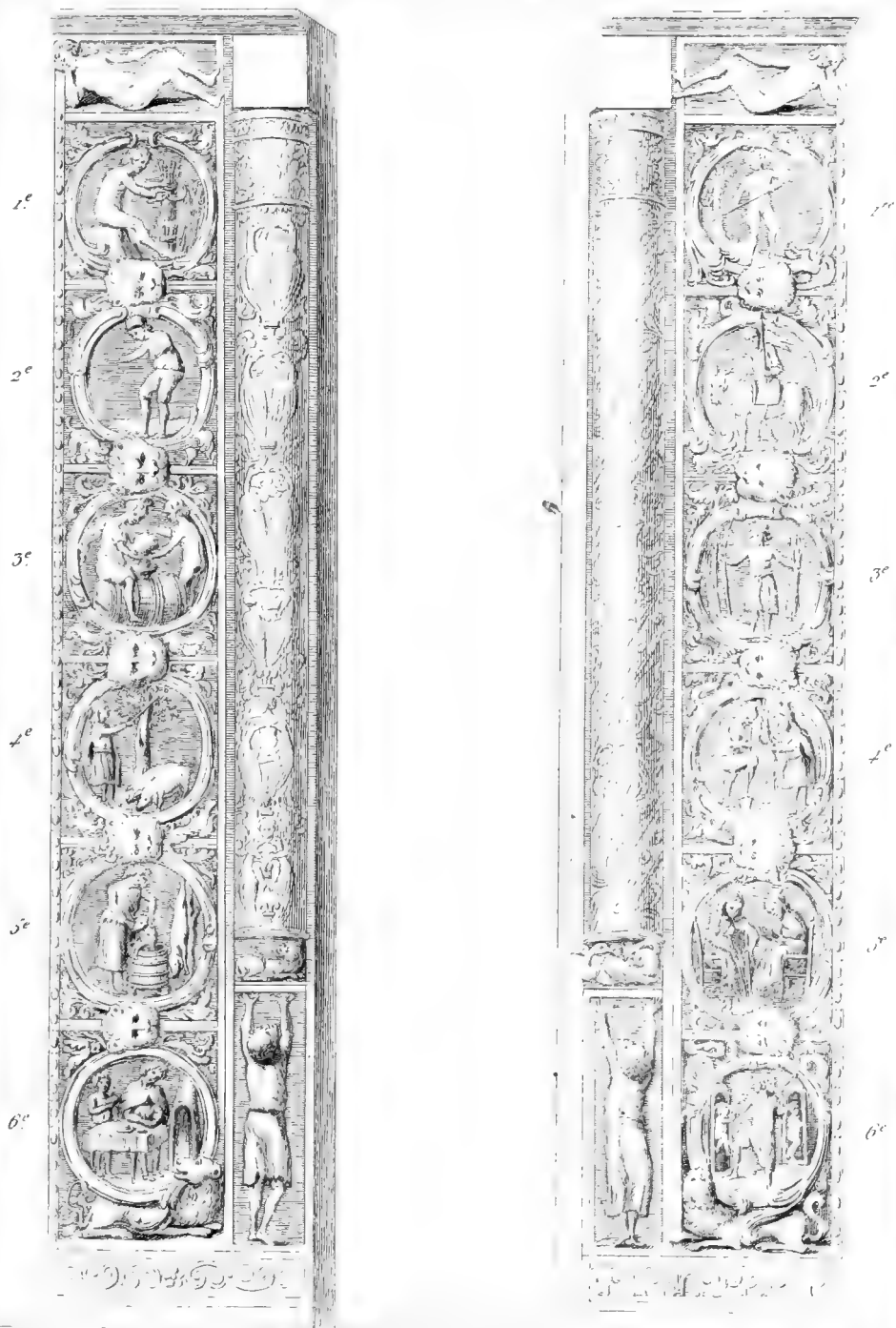
Ce sixième médaillon d'une figure à deux têtes ou deux visages, m'a paru le plus intéressant de tous, en ce qu'on l'a placé ici pour répondre au Verseau, pendant que la figure à deux têtes, dans le zodiaque de Notre - Dame, répond au Taureau; c'est une singularité dont il est très-curieux de trouver la cause. Nous la donnerons dans notre réponse à l'écrit de M. de Lalande qui doit naturellement venir à la suite de cette description. On y verra que MM. Dupuis & de Lalande se sont singulièrement mépris sur la signification de la figure à deux têtes que l'on voit dans le zodiaque de Notre - Dame.





Passer del
F Le Gouaz sc.
Figures du Zodiaque qui sont sur deux Pilastres au bas de la Tour Septentrionale de l'Eglise de S. Denis en France.

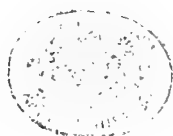




Bossier del

F. Le Gouez sculp.

Figures Enamelées qui sont sur deux Pilastres au bas de la Tour Méridionale de l'Eglise de St Denis en France



OBSERVATIONS

Sur un Écrit de M. de Lalande, inséré dans le Journal des Savans du mois de Juillet 1788, dans lequel cet Académicien rend compte de mon Mémoire sur le Zodiaque de Notre-Dame de Paris, comparé au Zodiaque Indien des Transactions philosophiques de 1772, & inséré dans le volume de l'Académie, année 1785.

Par M. LE GENTIL.

Nous allons rapporter les propres termes de cet Académicien, sans nous permettre le moindre changement ni la moindre transposition dans les mots ; ensuite nous hasarderons nos observations, & nous laisserons la décision au public ; car je suis bien éloigné de souscrire ici au jugement de M. de Lalande, & à la décision qu'il porte dans son imprimé en faveur de M. Dupuis, sur l'objet qui nous sépare, ce savant & moi, au sujet du zodiaque Indien, & de celui que j'ai trouvé à l'église de Paris. C'est donc au public à juger : mais nous croyons devoir le prévenir que comme M. de Lalande n'a fondé son écrit que d'après un système que M. Dupuis paroît s'être formé sur le zodiaque de Notre-Dame, système qu'il s'est contenté de communiquer à M. de Lalande, sans l'avoir encore soumis au jugement du public par l'impression, nous nommerons indistinctement M. de Lalande & M. Dupuis dans nos observations, & souvent tous les deux ensemble.

J'ajouterai ici que je connois aujourd'hui mieux que jamais, & sans pouvoir en douter, la façon de penser de M. Dupuis, ayant eu l'honneur de m'entretenir avec lui sur cette matière ; je fais que dans tout ce qu'il propose, il ne cherche que la vérité. Nous la cherchons également de

notre côté, & l'esprit de critique n'entre pour rien dans nos observations. Nous ne demandons qu'à être éclairés; nous croyons en conséquence que nos observations ne peuvent pas déplaire à M. Dupuis. Entrons en matière.

„ Dans un autre Mémoire, dit M. de Lalande (*p. 1521*
 » & *suiv.*), M. le Gentil compare le zodiaque Indien décrit
 » dans les Transactions philosophiques de 1772, avec celui
 » qui est sur la porte de Notre-Dame de Paris; il en a fait
 » graver la figure. Il se propose d'expliquer dans son ouvrage
 » sur le zodiaque, pourquoi l'on trouve sur plusieurs
 » anciennes églises ces figures de douze signes. Il remarque
 » ici que le zodiaque Indien n'est pas aussi ancien que
 » M. Dupuis l'avoit présumé; mais cela n'intéresse point la
 » découverte de celui-ci sur l'explication des fables ».

Je fais bien que ce que j'ai remarqué du zodiaque Indien, n'intéresse point la partie de l'ingénieux système de M. Dupuis sur l'explication des fables. J'ai annoncé le premier dans ma Dissertation contre le système de M. Dupuis, que cette partie n'étoit point de mon ressort. Or, dans mes Observations sur le zodiaque Indien (*année 1785*) relativement au système d'antiquité que M. Dupuis lui attribue de représenter l'ordre des choses, lorsque la Vierge étoit au solstice, quatre mille ans environ avant Jésus-Christ; & que par conséquent ce zodiaque prouvoit d'une manière indirecte, que le Capricorne a occupé dans le principe, c'est-à-dire, quatorze mille ans environ avant Jésus-Christ, le solstice d'été (*pag. 399*), j'ai dit, je le dis & le dirai encore s'il le faut, que ce zodiaque ne me paroît nullement être l'ouvrage des astronomes Indiens, par les raisons détaillées dans mon Mémoire; que nous ne pouvons rien remarquer dans ce zodiaque qui puisse nous donner à soupçonner qu'il prouve l'opinion de M. Dupuis, qu'il ne représente par conséquent point l'état du ciel dans l'âge où la Vierge occupoit le solstice, comme le pense M. Dupuis; qu'en analysant ce zodiaque, on voit évidemment que ce ne sont pas les angles des quadrilatères

qui désignent les solstices & les équinoxes, ce que je prouve dans mon *Mémoire* (*volume de l'Académie, année 1785, p. 17 & suiv.*) ; & qu'en conséquence ce zodiaque, au lieu d'indiquer l'époque à laquelle la Vierge occupoit le solstice, quatre mille ans avant Jésus - Christ, comme paroît le penser M. Dupuis, indiqueroit au contraire celui où le Lion occupoit ce même solstice ; que ce seroit donc l'ordre des signes du zodiaque, deux mille cinq cents ans environ avant Jésus - Christ. Je ne prétends donc point, comme l'on voit, que ce zodiaque représente l'ordre des choses, deux mille cinq cents ans avant Jésus-Christ.

« Nous pouvons même annoncer actuellement, continue M. de Lalande, que M. Dupuis, d'après les recherches longues & curieuses sur l'astronomie sacrée des anciens, ne regarde plus ce zodiaque que comme un monument de la religion Isisque ».

J'avoue que je n'entends point ce raisonnement de M. de Lalande ; car de ce que M. Dupuis ne regarde plus ce zodiaque que comme un monument de la religion d'Isis, il ne me paroît nullement s'ensuivre qu'il ne soit pas aussi ancien qu'il a voulu insinuer qu'il l'est dans son système. En effet, M. de Lalande peut-il nous assurer, au milieu des ténèbres qui couvrent l'origine du zodiaque & celle de la religion d'Isis, que cette religion ne soit pas presque aussi ancienne que le monde, puisqu'elle paroît aussi ancienne que le zodiaque, qui lui-même paroît presque aussi ancien que le monde ? Qui peut donc avoir assuré à M. de Lalande que ce zodiaque ne puisse pas remonter quatre mille ans environ avant Jésus - Christ, parce que M. Dupuis ne le regarde plus aujourd'hui que comme un monument de la religion d'Isis ? Cette religion ne paroît-elle pas aussi ancienne que cette époque ?

« Il est, continue M. de Lalande, de la même nature que celui de Notre - Dame, qui lui ressemble à beaucoup d'égards. »

Les zodiaques des différentes nations de la terre, quelque éloignées qu'elles sont entr'elles, soit par la distance des lieux, soit par celle des temps, sont tous de la même nature, & se ressemblent autant les uns que les autres à beaucoup d'égards; & on peut dire qu'ayant tous une origine commune, comme l'a prouvé le premier M. Bailly, il n'est pas étonnant qu'ils aient tous un très-grand air de famille, si l'expression est permise ici; car enfin ils sont tous composés des mêmes signes, à quelques légères différences près qui tiennent à quelques coutumes locales. Mais si le zodiaque des Transactions ressemble en quelques points à celui de Notre-Dame, on peut dire qu'il en diffère dans plusieurs autres fort essentiels, comme nous allons le faire voir.

« Dans l'un & dans l'autre (c'est M. de Lalande qui parle) » on voit au sommet du cadre, le Lion & le Cancer, les » deux domiciles du Soleil & de la Lune. Sous chacun de ces » deux signes, sont placés par ordre sur deux lignes parallèles, » les domiciles des cinq planètes. Cela a donné lieu à » M. le Gentil de croire que l'ordre naturel des signes » avoit été interverti par ignorance; mais on y trouve au » contraire beaucoup d'esprit ».

1.^o Le zodiaque de Notre-Dame n'est point autour d'un cadre ou carré, divisé de trois en trois signes, ayant par conséquent trois signes pour chaque côté, comme dans le zodiaque des Transactions; mais il est sur deux pilastres seulement, six signes de chaque côté, ce qu'il est très-important d'observer ici, à cause de la ressemblance qu'on veut mettre entre ces deux monumens, & des conséquences qu'on en veut tirer.

2.^o S'il y a entre ces deux zodiaques une ressemblance, en ce que le Lion est en haut, en tête d'un côté & à gauche, le Cancer de l'autre côté ou à droite, & aussi en tête, il y a en même temps une différence sensible & essentielle entr'eux, en ce que les signes marchent à Notre-Dame dans un ordre renversé de celui auquel ils marchent dans

le zodiaque Indien; en sorte que dans ce zodiaque - ci le Lion est où il doit être, & que naturellement l'ordre des signes n'est point interverti.

Les figures, dans le zodiaque Indien, vont de droite à gauche, comme cela doit être; elles vont au contraire de gauche à droite dans celui de Notre-Dame, d'où il suit que le Lion est naturellement placé à gauche, dans le zodiaque Indien, & que pour y correspondre, il auroit dû être placé à droite à Notre - Dame, & non point où il est. C'est cette marche naturelle de droite à gauche, dans le zodiaque Indien, qui met nécessairement, je le répète, le Lion à gauche; & si à Notre - Dame on avoit suivi l'ordre naturel dans la marche des figures, tel qu'on doit se le représenter en tournant la face au midi, pour passer le zodiaque en revue de l'est à l'ouest, on verroit que le point du ciel qui est entré le Lion & le Cancer, étant au méridien, le Lion seroit en effet à gauche, & le Cancer à droite; mais en même temps tous les signes qui dans le zodiaque de Notre - Dame sont à gauche, seroient véritablement à droite, comme dans le zodiaque Indien, & réciproquement; & cela comme l'on voit n'auroit en aucune façon troublé le domicile du Soleil, ni celui de la Lune, ni ceux des planètes, domiciles qu'il est difficile de prouver qu'on ait eu en vue ici; car on ne voit aucune trace de ces domiciles, ni dans l'un ni dans l'autre zodiaque. J'en demande bien pardon à M. Dupuis & à M. de Lalande, & j'en suis bien fâché pour les sculpteurs, mais je ne trouve point ici beaucoup d'esprit.

« C'est un ensemble ingénieux de trente - six tableaux » qui renferment, dit M. de Lalande, les opérations » agricoles de chaque mois, avec les gradations de la lumière » & de la chaleur ».

D'accord pour les occupations de la campagne, & je n'ai jamais dit le contraire; mais non pour les gradations de la lumière & de la chaleur, & je le prouve.

Ce sont en effet les douze figures symboliques qui accompagnent les douze signes, qui prouvent que le Lion

est déplacé ; elles semblent exiger, dis-je, que le Lion soit à la place du Cancer , & réciproquement. La moisson se fait sous le signe du Lion , & non sous l'Écrevisse : or la figure qui accompagne le Cancer, est un homme qui éguise sa faux, vrai symbole de la moisson qui se fait le Soleil étant dans le signe du Lion ; on auroit donc dû placer le Lion à côté de ce symbole, comme on a placé à côté du Scorpion un homme qui sème du blé, vrai symbole des semailles, en octobre ; & à côté de la Balance, un jeune homme qui foule le raisin, vrai symbole de la vendange dans ce temps-là, c'est-à-dire, lorsque le Soleil est dans la Balance. De plus, je ne fais pas si M. de Lalande pourroit me citer un seul exemple, que les signes du Lion & du Cancer dans l'antiquité aient jamais été déplacés de l'ordre naturel, à cause des domiciles ou maisons du Soleil & de la Lune. Le sculpteur de Notre-Dame auroit-il eu plus d'esprit en cela que les anciens ? auroit-il voulu qu'on devinât sans les indiquer, les domiciles du Soleil & de la Lune ? Peut-on dire qu'il les connut ?

Il est impossible à M. de Lalande de nous prouver que dans le zodiaque Égyptien , qui est une représentation vraie & naturelle de la religion Isiaque, le Lion soit déplacé comme il l'est à Notre-Dame. Comment donc peut-il décider si affirmativement que c'est une copie, de quelque temple Égyptien ? Il n'y a pas même lieu à le conjecturer ; le zodiaque de Notre-Dame n'est point Égyptien.

Nous avons beaucoup de monumens anciens, sur lesquels on voit un zodiaque gravé : j'en connois plusieurs ; dans tous, l'ordre naturel est observé.

Dans les recherches que j'ai faites au sujet de la religion Isiaque, j'en ai trouvé dans dom Montfaucon, parmi les abraxas, trois. Dans deux, l'ordre des signes va de droite à gauche, comme dans le zodiaque Indien ; & dans le troisième, ils vont de gauche à droite, comme à Notre-Dame ; mais ni dans l'un ni dans l'autre cas, l'ordre naturel n'y est point troublé. On trouve aussi dans dom

dom Monfaucon , parmi les vases sacrés des Romains , une patère , autour de laquelle sont gravés les douze signes du zodiaque , allant de gauche à droite comme à Notre-Dame ; le Cancer & le Lion sont au haut , le premier à gauche , le Lion à droite. Parmi les pierres précieuses du cabinet de M. le duc d'Orléans , que M. l'abbé le Blond a publiées , on voit une agate - onyx , sur laquelle sont gravés les jeux séculaires célébrés sous Domitien : le cercle qui renferme les signes du zodiaque , les représente marchant de gauche à droite , les Gémeaux & le Cancer occupent le haut du tableau ; le Lion suit , mais il n'est pas déplacé.

Dans une autre pierre agate - onyx , tirée du même cabinet , est une tête de Méduse. Le revers de la pierre représente un zodiaque , dans lequel les signes vont au contraire de droite à gauche , comme dans le zodiaque Indien , & le Lion y occupe la partie supérieure du cercle à droite , pendant que la Vierge est à la gauche ; mais au - dessous du Lion est l'Écrevisse à droite , comme dans le zodiaque Indien : néanmoins l'ordre n'est point interverti ; car enfin , pour quelle raison troubleroit-on , sans en prévenir , l'ordre de ces signes qui sont destinés à nous représenter la marche du Soleil & de la Lune ? n'est - il pas indifférent au fond , que le domicile du Soleil soit à droite ou à gauche de celui de la Lune ? Les domiciles n'étant point partie essentielle du zodiaque , mais seulement une espèce d'accessoire , sans lequel il peut exister , quelle raison , dis-je , pourroit - on avoir de ne pas respecter cet ordre ?

Ce que je dis ici me paroît évident par les médailles de l'empereur Antonin , frappées en Égypte. M. l'abbé Barthélemi nous les a fait connoître : les domiciles , par exemple , y sont marqués ; mais M. l'abbé Barthélemi a pensé sagement que l'ordre naturel des signes devoit être respecté , & rester tel qu'il est représenté.

Le Cancer , domicile de la Lune , est à la tête avec

Mém. 1788.

G g g

le signe de la Lune ; & le Lion , en suivant l'ordre des signes, est à la gauche de la Lune , avec le symbole du Soleil. Un signe transposé sans aucune marque de domicile, ne peut donc point prouver qu'un sculpteur ait eu en vue ces prétendus domiciles ; mais le reste du zodiaque dans ces médailles , suit par division de trois en trois en allant de gauche à droite. Enfin cet intervertissement d'ordre des signes à Notre-Dame dans le Lion & le Cancer, ne doit point surprendre , & on n'y peut voir , à mon avis , aucun mystère ni beaucoup d'esprit , à moins qu'on n'en voie également & infiniment davantage dans le zodiaque de Saint-Denys & de Sainte-Geneviève , où l'ordre des signes est encore plus interverti qu'à Notre-Dame : c'est à MM. Dupuis & de Lalande à nous l'apprendre.

« Ce n'est point à la place de la Balance , continue M. de » Lalande, qu'on voit la figure du statuaire, comme l'a cru » M. le Gentil, mais à la place de la Vierge qui se trouve » dans le milieu. »

Je réponds ici, que je n'ai jamais cru que la figure du statuaire fût à la place de la figure qui représente la Balance, je conviens que j'ai mis dans mon discours imprimé l'un avant l'autre ; mais c'est une pure inadvertance ou transposition , faite occasionnée peut-être par trop de confiance à l'imprimeur, & par conséquent un peu de négligence de ma part ; car MM. Dupuis & de Lalande ont pu observer , s'ils ont voulu , que la faute n'est point dans la gravure , ni par conséquent dans le dessin ; que cette gravure est de la dernière exactitude , comme tout le monde en convient , & très-bien exécutée ; & si en corrigeant mon épreuve de l'imprimerie royale, j'avois eu ce dessin sous les yeux , comme j'avoue que j'aurois dû faire, je ne me serois pas exposé à recevoir ces reproches de ces deux savans ; car enfin ils conviendront, je pense , que dans une pareille description , on doit suivre servilement l'ordre

qui est dans le tableau ; c'est donc par pure inadvertance que j'ai mis dans ma description un signe avant l'autre.

Mais voici la preuve complete de ce que j'avance, que je présente au public impartial, & à M. de Lalande lui-même. Le reproche que me fait cet Académicien, reproche que j'aurois pu m'épargner, en veillant davantage l'imprimeur, m'a rappelé que j'avois prié M. l'abbé de Fontenay, par une lettre du 29 de mars 1786, longtemps avant que dût paroître le volume de l'Académie pour 1785, d'insérer dans son Journal général de France, le zodiaque que j'avois trouvé à Notre-Dame ; il me rendit le service de satisfaire mon désir le 6 d'avril suivant : or, voici ce que porte ce journal :

6.^o (Est-il dit) par une singularité digne de remarque, le Lion au lieu du Cancer.

7.^o A droite en redescendant, le Cancer représenté par un homar ou grosse écrevisse de mer, vis-à-vis du Lion.

8.^o Au lieu de la Vierge est représenté un jeune homme, un bonnet sur sa tête, & qui paroît tailler de la pierre.

9.^o A la place de la Balance, une jeune fille tenant devant elle les bras, à ce qu'il sembleroit, d'une balance.

Enfin, si MM. de Lalande & Dupuis avoient bien voulu se rappeler ce que je dis dans la supposition que je fais, que le zodiaque Indien est l'ouvrage d'un maçon, ils auroient vu que je place le statuaire à la place de la Vierge.

Il est donc certain que je n'ai pas cru que la Vierge fût à la place de la Balance dans le zodiaque de Notre-Dame, & que c'est une faute d'impression faite à l'Imprimerie royale ; d'ailleurs, c'eût été un ordre interverti dont j'aurois certainement prévenu le public, comme j'ai fait pour le Lion & le Cancer qui occupent la place l'un de l'autre. Au surplus, je reçois avec reconnoissance l'avis de ces deux savaus, qui me rendra plus

circonfpect dans l'ouvrage que je prépare , où tous ces objets seront de nouveau traités.

« Elle tient, dit M. de Lalande, le Dieu de la lumière ,
 » sous l'emblème d'un enfant naissant, tel que les anciens
 » représentoient le Soleil au solstice d'hiver ; car ils lui
 » donnoient alors la figure d'un enfant, ensuite celle d'un
 » jeune homme au printemps , d'un homme fait au solstice
 » d'été, & d'un vieillard en automne ».

On voit par ce passage , que MM. Dupuis & de Lalande cherchent à faire un ensemble, un tout, où une espèce de tableau du frontispice de Notre-Dame, tendant au même but ; mais je ne crois pas qu'ils réussissent jamais au sujet de la Vierge ; car , quand on fait la copie d'un tableau , on ne doit rien oublier. Or , MM. Dupuis & de Lalande ont oublié de faire mention ici d'un morceau du tableau le plus intéressant & le plus essentiel , & qui détruit absolument leur assertion : c'est l'histoire de la chute d'Adam & d'Eve , en petites figures comme toutes les autres qui accompagnent le zodiaque , de leur exclusion du paradis terrestre ; & enfin c'est le serpent dont la Vierge écrase la tête. Or , cet emblème ne convient qu'à la Vierge Marie , & les Égyptiens dans leurs emblèmes de la religion d'Isis, n'ont rien qui y ressemble. L'enfant qu'elle tient entre ses bras, est donc évidemment l'Enfant Jésus , & non le Dieu de la lumière, dans le sens que l'entendent MM. Dupuis & de Lalande.

Il est assez dans l'ordre que la statue représentative de la Vierge Marie , soit à l'entrée d'un temple élevé sous son invocation au maître de la nature. Donc pour le dire ici en passant, la statue de la femme que l'on trouve à cette entrée de Notre-Dame , & isolée du zodiaque, n'est point Isis qui tient Orus dans ses bras , mais la Vierge Marie & l'Enfant - Jésus, objets de notre culte.

« Aussi, dit M. de Lalande, le statuaire a-t-il eu soin
 » de représenter à côté, sur la face intérieure de la colonne du
 » milieu de la porte, six autres figures, qui depuis l'enfance

» jusqu'à la décrépitude , marquent la gradation de la vie. Le
» premier ou le plus bas, paroît un enfant de douze ans ;
» au-dessus il y a un jeune homme de dix-huit à vingt ans ;
» le troisième est un homme de vingt-cinq à trente ans ;
» ensuite on en voit de quarante, soixante & quatre-vingts
» ou quatre-vingt-dix, ce qui se reconnoît aux traits qui
» caractérisent chaque âge , & à la barbe qui devient plus
» longue & plus touffue. Le dernier ou le plus haut, repré-
» sente la plus grande décrépitude , & le plus bas l'adolef-
» cence : il y a six tableaux, parce que les jours ont une durée
» égale durant les deux mois de l'année qui sont également
» distans de chaque solstice. Sur l'autre face latérale de la
» colonne , on voit six autres tableaux qui représentent la gra-
» dation de la chaleur. Au plus haut, ou au solstice d'été, est
» un jeune homme tout nu, à l'ombre d'un arbre ; au-dessous,
» le même jeune homme est nu en grande partie, si ce n'est
» vers la ceinture, & au-dessous où il est couvert d'un voile
» léger. Au troisième tableau qui répond aux équinoxes, le
» même jeune homme est représenté avec deux visages, l'un
» jeune & l'autre vieux ; il est couché presque horizontale-
» ment. Le visage jeune regarde la partie supérieure du ciel,
» le vieux la partie inférieure, & le manteau qu'il porte ne
» couvre que la moitié de son corps. Toute la partie jeune
» & supérieure, qui répond au printemps & à l'été, que la
» ligne équinoxiale sépare des deux autres saisons, est nue, &
» la partie vieille qui répond à l'automne & à l'hiver, est
» couverte. Dans le tableau qui est au-dessous, le froid étant
» plus rigoureux, le même homme est tout entier enveloppé
» dans son manteau. Dans le cinquième tableau, il est courbé
» sous le faix d'un fagot ; & dans le tableau qui est le plus
» bas, il est assis devant un grand feu , & a du bois auprès
» de lui. En comparant le dernier tableau avec le premier,
» l'homme qui se chauffe avec celui qui est tout nu à
» l'ombre, & tous deux avec celui du milieu, moitié nu,
» moitié couvert , il est difficile de ne pas apercevoir
» une suite d'idées , une progression dans les périodes de la

» chaleur, comme on avu sur l'autre face, celle de l'augmen-
 » tation de la lumière, dont la marche progressive étoit
 » assimilée à celle de la vie de l'homme.

» Rien n'étoit plus naturel que de tracer dans un monu-
 » ment relatif à l'année solaire, les gradations de la cha-
 » leur & de la lumière qui correspondent à ses principales
 » divisions. C'est par la même raison que le statuaire a placé
 » à côté des douze signes, les tableaux des opérations agri-
 » coles & des opérations de l'homme qui correspondent à
 » chaque mois. On voit à côté du Bélier, ou en mars,
 » l'homme qui émonde les arbres & qui les taille; en mai,
 » un homme qui tient des fleurs & des oiseaux; en juin,
 » un autre homme qui éguise sa faux; en août, des épis
 » que l'on coupe; en septembre, un homme qui foule la
 » cuve; en octobre, un autre qui sème; en novembre, un
 » homme qui abat le gland dont il nourrit ses pourceaux;
 » & en décembre, on le voit tuer son porc ».

Avant de répondre à cet article, il est important que nous mettions ici la description des douze symboles dont parlent MM. Dupuis & de Lalande, qui sont sur les deux faces latérales du pilastre au-devant duquel on a mis la figure de la Vierge & de l'Enfant-Jésus.

CADRES de la GAUCHE. CADRES de la DROITE.

1.^{er} *Cadre.* Il représente un jeune homme debout, au pied d'un arbre garni de ses feuilles : la main droite étant cassée, on ne peut, pas dire ce qu'il en paroïssoit faire; de la gauche, il semble tenir un paquet de feuilles. Il doit répondre au Cancer.

2.^e *Cadre.* Il représente une figure nue qui paroît être une femme : elle a un

1.^{er} *Cadre.* Il représente un vieillard fort âgé, sans paroître décrépît. Il semble se reposer; il est bien vêtu, & le jeune homme qui y répond à gauche, ou de l'autre côté est tout nu. (L'on peut voir ci-devant page 34 & 35).

2.^e *Cadre.* Il représente un vieillard comme le précédent, sans la moindre

CADRES de la GAUCHE.

caleçon, la main gauche appuyée sur sa hanche; la droite pose sur un paquet de linge, à ce qu'il m'a paru, qui seroit sur quelque banquette. C'est sans doute quelqu'un qui vient de faire sa lessive; pratique en usage dans bien des campagnes, avant le temps des travaux de la campagne pour les moissons. Il doit répondre aux Gémeaux.

3.^e *Cadre.* C'est une figure qui n'a qu'un seul corps & deux têtes ou deux visages. Il sembleroit qu'une moitié fût celle d'une femme, avec la tête; ou du moins d'un jeune homme en assez bon point, dont la tête est tournée vers le haut du cadre. L'autre demi-figure avec la tête, est celle d'un homme fait, qui semble regarder vers le bas du cadre: un simple linceul paroît couvrir cette moitié seule. La figure entière est un peu penchée, & a les genoux un peu pliés; elle répond au Taureau.

4.^e *Cadre.* On y voit une figure enveloppée dans une capotte à longues

CADRES de la DROITE.

marque de décrépitude. Il semble également se reposer; il est également bien vêtu, pendant que la figure qui lui répond est nue, à un simple caleçon près, & même fort léger.

3.^e *Cadre.* » Il représente encore un vieillard, bien vêtu & qui se repose.

4.^e *Cadre.* Ce ne sont plus ici des vieillards. Cette figure-ci représente un

CADRES de la GAUCHE.

manches , ayant un coqueluchon qui lui enveloppe également la tête.

5.^e *Cadre.* C'est un homme courbé sous le poids d'un fagot , tenant de sa main gauche un long bâton qui lui sert à se soutenir , & dont il s'appuie.

6.^e *Cadre.* C'est une figure enveloppée de son coqueluchon , & qui se chauffe devant un bon feu. Les bûches sont debout , au lieu d'être en travers ; ce qui indique sans doute un usage alors en règne.

CADRES de la DROITE.

personnage dans la force de l'âge , qui de la main droite tient un chien en laisse , & de la gauche un oiseau sur le poing. C'est certainement l'emblème de la chasse , à laquelle la vieillesse n'est guère propre. Elle répond en octobre , & est vêtue d'une longue robe avec une ceinture.

5.^e *Cadre.* C'est une figure entourée d'arbres , c'est-à-dire , vraisemblablement le chasseur précédent , au milieu des bois ; elle a la main droite cassée , l'avant-bras gauche également cassé. A côté , dans le haut des arbres , est un oiseau un peu mutilé ; il paroît voler.

6.^e *Cadre.* C'est une figure qui représente une personne faite , qui paroît être une femme. Elle a une coiffe qui lui enveloppe la tête. De ses deux mains dont les extrémités sont cassées , elle tenoit les deux bouts de sa coiffe au-dessous de son menton.

Toutes ces figures ont des robes , & des ceintures pour serrer leur vêtemens,

D'après

D'après cette description qui est très-exacte, il est aisé de comprendre qu'il y a six cadres figurés de chaque côté, parce qu'il y a six signes de chaque côté, & douze mois dans l'an qui répondent aux douze signes du zodiaque. On ne comprend point également que ces six tableaux soient là parce que les jours ont une durée égale durant les deux mois de l'année, qui sont également éloignés de chaque solstice; opinion cependant que MM. Dupuis & de Lalande ont adoptée. Ces six figures de chaque côté correspondant donc à celles qui sont à côté des douze signes, elles représentent donc toutes les vingt-quatre les occupations rustiques pour notre climat; excepté la figure à deux têtes, dont le même emblème répété au zodiaque de Saint-Denys, m'a fait découvrir le vrai sens. On ne voit donc point ici, comme le dit M. Dupuis, qu'on ait eu en vue la gradation seule de la chaleur, comme si on avoit uniquement voulu faire faire à ces figures l'office de thermomètre : & ce jeune homme à deux visages, à qui M. Dupuis attribue de désigner la séparation du printemps & de l'été d'avec l'automne & l'hiver, ne signifie rien de tout cela, selon moi; il n'est point couché presque horizontalement, comme le disent MM. Dupuis & de Lalande, il est au contraire posé presque verticalement. (*Voyez la figure, & à Notre-Dame, car c'est aux yeux à en juger.*)

Ces six cadres ne paroissent donc qu'un tableau de ce qui se passe à la campagne, pendant les six premiers mois de l'année; ils sont en face des six cadres du zodiaque, qui sont également des symboles relatifs aux mêmes occupations pendant le même temps.

On remarquera par la description que j'ai faite de toutes ces figures, qu'elles sont chacune accompagnées de symboles particuliers. Cette remarque a trop été négligée par MM. Dupuis & de Lalande; car d'elle dépend en grande partie la solution de l'énigme ou de l'emblème que renferme chacun de ces cadres en parti-

culier. En général, toutes ces figures paroissent tenir à quelques us & coutumes de ces temps éloignés, coutumes dont plusieurs sont abolies aujourd'hui.

Par exemple, le sixième cadre de la gauche nous fait voir, selon moi, qu'alors sans doute c'étoit l'usage de mettre au feu les bûches debout, & de les allumer par les bouts d'en haut. Actuellement on les met en travers, & on les brûle en quelque façon par les deux bouts à la fois, quoique le bois soit aujourd'hui infiniment plus rare qu'il ne l'étoit alors.

Quant à la figure à deux têtes qui répond au Taureau, & non au Bélier, comme l'a cru M. Dupuis, j'avouerai que je n'ai pas fait son allégorie au premier coup-d'œil, & j'ai eu besoin d'être éclairé par le zodiaque de l'église des bénédictins de Saint-Denys. En effet, le même symbole d'une figure à deux têtes, & plus significatif encore, est répété à cette basilique, comme on a vu ci-dessus. Or, cette figure à deux têtes est placée à Saint-Denys pour répondre au Verseau, pendant qu'à Notre-Dame elle répond au Taureau; c'est une singularité dont il étoit très-curieux de trouver la cause.

Certainement ce symbole ne peut pas s'appliquer à la séparation du printemps & de l'été d'avec l'automne & l'hiver par la ligne équinoxiale, comme le disent MM. Dupuis & de Lalande de celui de N. D. de Paris. C'est donc ici le cas de faire à MM. Dupuis & de Lalande la question qu'ils m'ont faite, comme on verra ci-après, au sujet de mon hypothèse sur l'origine du zodiaque, qui ne cadre point avec un des signes du zodiaque Indien des Transactions philosophiques. Que devient donc l'hypothèse de M. Dupuis sur cette figure à deux têtes, qui, dans le zodiaque de Notre-Dame, répond non au Bélier, mais au Taureau; & dans celui de Saint-Denys, répond au contraire au solstice d'hiver, ou plus exactement au Verseau? A Saint-Denys, point de séparation par la ligne équinoxiale du printemps & de l'été d'avec l'automne & l'hiver, puisque la figure se trouve à l'extrémité de l'année, & par conséquent

du zodiaque, c'est - à - dire, à un point qui étoit pour ainsi dire la fin de l'année & le commencement de la suivante.

Il ne m'a pas été difficile de deviner, après l'inspection du zodiaque de Saint - Denys, que la figure à deux têtes dans l'un & dans l'autre zodiaque est Janus, qui fait à peu de chose près la même fonction dans l'une & dans l'autre position, c'est - à - dire, en répondant au Taureau comme à Notre - Dame, & au Verseau comme à Saint-Denys. Or voici ce que signifie l'emblème de Janus à deux têtes chez tous mes mythologistes.

Janus à deux têtes ou deux visages, étoit censé être le Soleil qui regardoit les deux principales parties du monde, l'orient & le couchant, qu'on nommoit *les deux portes du Soleil*. Janus ou le Soleil, en se levant, en ouvroit une, & en se couchant il fermoit l'autre. Janus ou le Soleil étoit par - là censé être le maître du jour dont il regarde le levant & le couchant. En ce sens Horace, dans deux vers, lui adresse ainsi la parole :

« Père du matin, ou bien Janus, si vous aimez mieux
» que je vous invoque sous ce nom, qui êtes le signal du
» commencement des travaux journaliers des hommes, &c.

*Matutine pater, seu Jane libentiùs audis,
Undè homines operum primos, vitæque labores
Instituunt.*

Janus étoit encore chez les anciens l'emblème du cours & de la révolution de l'année ; par cette raison il étoit censé l'ouvrir, & par cette fonction il présidoit au mois de janvier, qui fut institué par Numa pour être le premier mois de l'année. Ce fut, comme le dit Macrobe, le mois du dieu à double face, qui regarde la fin de l'année qui vient de s'écouler, & le commencement de celle qui va suivre :

*Ac de duobus mensibus (januario & februario), priorem
januarium nuncupavit, primumque anni esse voluit, tanquam*
H h h ij

bicipitis Dei menssem, respicientem ac prospicientem transacti anni finem, futurique principia. (Macrobo.)

Ce fut sans doute pour cette raison, que Numa lui fit bâtir un temple à deux portes.

Ovide s'est souvenu de cette double fonction de Janus, quand il dit :

Jane biceps, anni tacitè labentis imago.

Il ne nous en faut pas davantage pour rendre raison des figures à deux têtes qui sont à Notre - Dame & à Saint - Denys.

A Notre - Dame, la figure à deux têtes n'est point horizontale, comme le dit M. de Lalande, nous le répétons; elle n'est point tout - à - fait debout, comme le sont les cinq autres figures du même côté; elle est un peu penchée, & dans cette attitude, une des têtes regarde l'orient, & l'autre le couchant. Elle répond au Taureau, pour nous dire que les travaux rustiques de l'année commençant lorsque le Soleil entre dans ce signe, on doit alors se lever au moment que ce flambeau du monde commence à répandre sa lumière, & ne quitter le travail que lorsqu'il semble s'éteindre en se plongeant sous l'horizon.

Janus donc nous indique, par la tête qui regarde le levant, l'homme laborieux dont les occupations journalières exigent qu'il se lève chaque jour avec le Soleil; l'autre moitié couverte d'un linceul & qui regarde le couchant, est pour l'avertir qu'au coucher du Soleil, il est temps qu'il quitte les champs pour se reposer, afin de pouvoir se trouver en état le lendemain matin de reprendre ses travaux.

Tout cela s'accorde parfaitement avec ce que nous savons du calendrier des anciens, qui commençoient l'année rustique lorsque le Soleil entroit dans le signe du Taureau. L'on peut voir à ce sujet la note de Scaliger sur le beau vers suivant, qui est le 217.^e du premier livre des Géorgiques :

*Candidus auratis aperit cum cornibus annum
Taurus.*

Voilà ce que j'entends par la figure à deux têtes du zodiaque de Notre-Dame.

Celle qui est à Saint-Denys est la même chose, & c'est également Janus à deux têtes.

Le symbole des deux enfans qui sont l'un à droite & l'autre à gauche de cette figure-ci, & dont l'un entre dans une espèce de tour, pendant que l'autre sort d'une pareille tour, dénote évidemment qu'on a voulu désigner à Saint-Denys, ce que nous avons rapporté de Janus d'après Macrobe, la double fonction qu'il faisoit de fermer une année & d'ouvrir l'autre. Cette apparence de deux tours peut très-bien représenter aussi ce temple à deux tours que lui dédia Numa. Il répond ici au mois de janvier pouae Verseau, parce que c'étoit alors le commencement de l'année civile dans la nouvelle forme du calendrier adopté par Numa. Le linceul qui ne couvre que la moitié du corps est sans doute, comme dans le zodiaque de Notre-Dame, relatif aux occupations journalières de l'homme, qui reprend chaque jour son travail au lever du Soleil, & qui le soir se repose de toutes ses fatigues; car l'homme agricole trouve toujours assez à s'occuper dans quelque temps que ce soit de l'année. Cette figure à deux têtes, dont la moitié couverte d'un linceul, qui semble âgée, avec une longue barbe, doit donc être le symbole de la fin de l'année; & la moitié nue qui paroît jeune, celui de la renaissance de l'année: voilà ce que m'ont offert de plus vraisemblable ces deux figures, dans l'un & dans l'autre zodiaque.

Il me paroît également évident que les six cadres de la droite du pilastre, ne sont point destinés à nous représenter l'augmentation de la lumière, & que sa marche progressive n'a jamais été assimilée à celle de la vie de l'homme, dans le sens que le présentent ici MM. Dupuis & de Lalande.

J'admets la marche progressive de la lumière du solstice d'hiver à celui d'été, c'est-à-dire qu'elle est beaucoup plus

sensible & plus vive en juillet qu'en décembre : cela me paroît évident, mais il ne l'est pas pour moi, & je ne comprends pas que le statuaire ait voulu représenter le peu de force de la lumière en hiver, par un jeune homme de vingt ou trente ans, qui a toute sa chaleur; & la force que cette même lumière a acquise en été, par un vieillard décrépît, qui a naturellement perdu les trois quarts de la chaleur qu'il avoit à trente ans, & que par conséquent la marche progressive de la lumière ait jamais été assimilée à celle de la vie de l'homme. J'ai toujours au contraire entendu assimiler la vieillesse à l'hiver. Ici, c'est le contraire, selon MM. Dupuis & de la Lande; la décrépitude répond à l'été, ou à la plus grande lumière & chaleur. Le statuaire ne se feroit-il point trompé, & n'auroit-il pas dû bien plutôt, par analogie, la placer au solstice d'hiver? Il est donc bien difficile de croire que ces six cadres représentent l'augmentation de la lumière de l'été à l'hiver.

D'ailleurs, je ne vois point ici cette gradation marquée que M. Dupuis nous propose de croire dans les âges que nous font voir les six figures de ces six cadres.

Les trois figures d'en bas paroissent des personnes d'un âge fait, & les trois autres au-dessus, des vieillards. Le premier de ces trois-ci, à qui M. Dupuis ne donne que quarante ans, me paroît aussi âgé que le troisième, à qui il prodigue quatre-vingts ou quatre-vingt-dix ans, c'est-à-dire une fois plus.

Je donne vingt à trente ans environ à la première figure en bas, à qui M. Dupuis n'en donne que dix à douze : les deux qui suivent en montant, ont encore à peu-près cet âge; mais ici la scène change subitement, & d'une manière bien sensible, car la première des trois figures suivantes, est exactement un vieillard de soixante ans au moins, & non un homme de quarante ans, qui est la force & la vigueur de la vie de l'homme.

Ces trois vieillards en outre semblent se reposer, pendant que tout le reste du tableau paroît en action.

N'est - ce pas là une espèce de contraste , sur - tout avec les trois figures opposées de la gauche ? celles - ci sont des personnages jeunes , forts , vigoureux , & de plus ils sont tout nus. Cela ne semble - t - il pas nous dire , sans y chercher beaucoup de finesse , que c'est à la vieillesse à se reposer , pendant que la jeunesse active doit épargner les vieillards , & souffrir à son tour les travaux de la campagne & les durs exercices de la chasse , &c ?

La vieillesse demande à être vêtue en tout temps , pendant que la jeunesse active & laborieuse est forcée , pendant la force de la chaleur , d'être à son aise & sans habits , pour supporter plus facilement la force du travail & le poids de la chaleur.

Voilà , je pense , l'explication la plus naturelle & la plus raisonnable de ces douze tableaux ou cadres.

« M. Dupuis, continue l'extrait, conclut de cet examen, » que ce monument qui contient trente-six tableaux, tous » relatifs au même objet, est une copie grossière de quelque » frontispice d'ancien temple d'Isis, déesse dont le culte étoit » établi anciennement dans la Gaule, & sur-tout à Paris. En » effet, les anciens trancs étoient sortis des contrées où Tacite » nous dit que l'Isis Égyptienne étoit adorée, & le vaisseau » symbolique faisoit partie des monumens de son culte. »

Après tout ce que nous venons de dire, il doit être difficile de croire que le monument dont nous parlons soit une copie de quelque frontispice d'ancien temple d'Isis : il faudroit encore que le sculpteur eût accommodé au climat de Paris son tableau, ou les vingt-quatre emblèmes qui accompagnent le zodiaque ; car ces emblèmes ne sont point Égyptiens ni Isiaques, comme on peut l'observer. Ils sont relatifs au climat & aux saisons qui règnent ici pendant le cours de l'année. (*Voyez ci-devant, page 422 M. de Lalande lui - meme.*) Alors ce ne seroit plus une simple copie d'un frontispice de quelque temple Égyptien. On ne se chauffe point en Égypte ; la moisson ne s'y fait point en juillet, mais elle est toute finie en mai, &c.

Enfin, on ne peut conclure rien autre chose de tout cet assemblage, sinon qu'il a été imaginé pour représenter,

1.^o La mort, par la chute d'Adam;

2.^o La vie qu la résurrection spirituelle par la Vierge; qui, en tenant l'Enfant-Jésus entre ses bras, écrase la tête du serpent, source de la mort; & tout cela selon l'idée que nous en donne notre religion;

3.^o Les travaux rustiques, auxquels l'homme est condamné depuis la chute d'Adam, ou les occupations de la campagne pendant que le Soleil parcourt les douze signes du zodiaque, le tout relativement à notre climat, ainsi que quelques coutumes qui nous sont propres, ou qui l'étoient à nos ancêtres, & rien de plus. Tout cet assemblage est donc une espèce de tableau moral, fait pour montrer au peuple les obligations auxquelles l'auteur de la nature l'a astreint depuis le péché d'Adam. Voilà tout ce que j'ai vu dans ce curieux frontispice de Notre - Dame, & si j'y voyois Isis, je le dirois avec la même sincérité & la même franchise.

« Il est donc très-possible, dit l'extrait, que le zodiaque » Indien, au centre duquel on voit une femme qui paroît » être Isis, sous la forme de laquelle Horus Apollo dit » qu'on représentoit l'année, ne soit aussi qu'une copie des » monumens de la religion Isiaque & du culte des Égyptiens, » dont les images symboliques ont pu aussi bien passer en » Orient, qu'elles ont passé à Rome & dans tout l'Occident.

» Ainsi, on doit regarder ces deux zodiaques plutôt » comme un monument religieux que comme des monu- » mens astronomiques, d'autant plus que l'un & l'autre » sont sculptés sur des murs de temples. Il seroit à désirer » que l'on prît soin de rassembler ces différens monumens » de l'astronomie sacrée, dont nos temples gothiques ont » conservé des copies. Il y en a à Saint-Denis & ailleurs.»

Je réponds à cela que je n'entends point ce raisonnement de M. de Lalande.

1.^o De ce qu'il est possible qu'une chose soit d'une certaine façon, on ne peut pas en conclure qu'elle existe réellement

réellement de cette façon , & qu'on doive en conséquence la considérer sous cette façon plutôt que sous une autre aussi possible.

M. Call , dans sa Lettre à M. Maskelyne , en lui envoyant son zodiaque Indien , ne raisonne pas ainsi ; il pense fort sagement qu'on peut soutenir avec une égale probabilité , que le zodiaque & le culte de la vache furent portés de l'Inde en Égypte , ou d'Égypte dans l'Inde. (*Voyez aussi ma Dissertation sur le Zodiaque*).

2.^o MM. Dupuis & de Lalande voient Isis par - tout : il faut que je n'aie pas de si bons yeux que ces deux savans ; car je ne la vois ni au zodiaque de Notre - Dame , ni au centre de celui de la pagode Indienne. La Vierge à Notre-Dame n'est point Isis ; nous l'avons prouvé. Quant au zodiaque Indien , je l'ai bien examiné & fait examiner par de très-bons artistes en ce genre , & par des personnes très-capables d'en juger ; la figure qui est au centre n'est point une figure de femme , mais celle d'un homme. J'ai fait dessiner & graver ce dessin d'après celui des Transactions : on y a apporté le plus grand soin ; ainsi , je puis assurer qu'il est exactement conforme à celui des Transactions. Qu'on se donne donc la peine d'examiner ce zodiaque d'un peu près , & j'ose me flatter qu'on ne verra point au centre un corps de femme. Que l'on compare , pour mieux s'en assurer , cette figure du centre avec celle de la Vierge du même zodiaque , & on sera à portée de juger de la différence ; elle est frappante pour quiconque a des yeux exempts de préjugé.

Les Indiens ne se trompent pas si grossièrement ; ils caractérisent mieux les sexes de l'espèce humaine que ne le pensent MM. Dupuis & de Lalande. La Vierge , nous le répétons , est dans le carré qui suit le Lion ; c'est-là un véritable corps de femme ; il est parfaitement caractérisé , car il a de grosses mamelles saillantes , parfaitement arrondies. Les sculpteurs Indiens n'oublient jamais de bien marquer ces parties si intéressantes & en même temps si

caractéristiques de la femme , & peut - être plus dans l'Inde qu'ailleurs. Nous disons donc que la figure du milieu du zodiaque Indien, est celle d'un jeune homme, & que ce n'est point par conséquent Isis.

Cette figure ressemble beaucoup au dieu *Sommonocodom* des Banians de l'Inde. On voit encore chez les Indiens, des religieux pénitens de la secte des *Joguis*, qui se tiennent perpétuellement dans cette attitude ; mais je crois plus volontiers encore que cette figure est Withnou, dans sa neuvième incarnation. Cette incarnation porte le nom de *puissant*. Le dieu & la déesse signifient ici la matière & le principe des êtres ; ce qui me paroît convenir parfaitement au centre d'un zodiaque où la Vierge occupe un des signes.

A l'égard des quatre points de la division du zodiaque Indien, qui sont marqués au milieu des quadrilatères, M. de Lalande retourne adroitement le sens de la chose, & il me fait dire ce que je n'ai jamais ni pensé, ni dit. « M. le Gentil, dit ce savant, les regarde comme faisant » les commencemens de chaque saison, au Verseau, au » Taureau, au Lion & au Scorpion. M. Dupuis ne croit » pas que ce soit une preuve qu'il représente l'état du » ciel, environ deux mille cinq cents ans avant l'ère » chrétienne, lorsque le Taureau, le Lion, le Scorpion » & le Verseau occupoient les équinoxes & les solstices, » puisque nous savons que les anciens, lors même que le » Bélier, le Cancer, la Balance & le Scorpion répondoient » à ces quatre points cardinaux, avoient cependant fixé » au Verseau, Taureau, Lion & Scorpion, le commencement des saisons, comme on peut le voir dans Varron, » *de re rusticâ*, liv. 1. c. 18. »

Je n'ai rien assuré au sujet de l'antiquité du zodiaque Indien ; j'ai seulement osé dire, puisqu'il faut le répéter ici, que ce ne sont pas, à mon avis, les angles des quadrilatères qui désignent dans ce planisphère les solstices & les équinoxes, comme l'a cru M. Dupuis, attendu

qu'il se trouve quatre signes dans chacun des quadrilatères & qu'il devoit n'y en avoir que trois, &c. (*Voyez ci-dessus, p. 412 & 413*) ; d'où j'ai conclu, & je persiste dans ma conclusion, qu'au lieu de représenter l'ordre des choses lorsque la Vierge étoit au solstice, comme l'a cru M. Dupuis, ce seroit au contraire l'ordre des choses, le Lion étant au solstice. Je n'ai donc rien assuré que contre l'opinion de M. Dupuis. Je ne pouvois pas en effet rien assurer au sujet de l'antiquité de ce monument, moi qui le regardois, non comme un ouvrage des Brames, mais comme le travail d'un sculpteur Indien, pendant que M. Dupuis y croyoit voir des preuves, indirectes à la vérité (car il faut être fidèle dans ses citations) de l'origine du zodiaque lorsque le Capricorne étoit au solstice d'été, quatorze mille ans environ avant Jésus-Christ.

Quant à l'argument tiré de Varron, j'avoue que je ne l'entends guère ; car, que les anciens, c'est-à-dire, sans doute les Romains, aient fixé ou non le commencement des saisons au Verseau, &c. c'est une espèce de division politique de ces peuples, qui n'empêche pas que deux mille cinq cents ans avant Jésus-Christ, le Lion n'ait été vraiment au solstice, & que ce ne fût à ce point que les anciens, bien des siècles avant les Romains, ont commencé l'année ; car tout le monde sait que c'étoit à ce point qu'étoit, bien anciennement avant Hypparque, le point du départ du Soleil & de l'année.

« Le zodiaque Indien, dit l'extrait, n'est pas plus favorable au système de M. le Gentil sur la génération des deux enfans Gémeaux, fils de la Terre ou de la Vierge, puisque ce zodiaque ne nous représente point d'image, ni d'un, ni de deux enfans, dans le lien des Gémeaux, mais celle d'un homme fait qui soutient deux globes. Que devient la supposition de M. le Gentil sur les deux Jumeaux naissans au bout de neuf mois que le soleil a parcouru la Vierge ? Ici point d'enfance, mais un homme qui tient deux globes unis. »

Je favois bien que mon hypothèse sur l'origine du zodiaque , ne cadre point avec le zodiaque Indien pour les Gémeaux ; mais je ne voyois pas la nécessité qu'elle y cadrât. M. Dupuis lui-même dit le contraire dans son ouvrage.

Après l'explication des douze signes dans son hypothèse , & sur-tout du signe du Sagittaire , qui n'est pas fort heureuse , M. Dupuis finit en disant :

« Quoi qu'il en soit, quand même nous ne saisissons pas » au juste l'idée qu'on a voulu présenter par ces douze » emblèmes ; il suffit qu'il s'en trouve plusieurs dont le » sens soit si naturel qu'il ne puisse souffrir d'équivoque.... » Tout ce qu'on pourroit conclure de l'insuffisance de » l'explication de quelques - uns de ces signes , c'est que » l'intelligence du sens qu'il renferme , dépend de l'histoire » naturelle de ce pays, ou des occupations de ces peuples , » ou du préjugé qui leur faisoit attribuer certaines qualités » à tels ou tels animaux, &c. »

Je n'aurois donc jamais imaginé de la part de M. Dupuis qui possède si bien la matière que nous traitons tous les deux, une pareille objection ; j'ai peine encore à me figurer qu'on me la fasse sérieusement : comme si mon hypothèse devoit s'accorder avec des figures qui tiennent évidemment à quelques coutumes ou usages qui sont dans tel ou tel pays , & qu'on ne connoît point dans un autre ; & ne pouvoit pas jouir du privilège de liberté que M. Dupuis donne à la sienne.

Comme si , excepté ce zodiaque, les Gémeaux n'étoient pas dans tous les zodiaques de l'univers connu ; comme si on pouvoit me prouver que les Indiens n'ont point en effet les Gémeaux dans leur zodiaque, à moi, dis-je, qui les ai trouvés dans celui que j'ai apporté de l'Inde. (*Voyez mon Voyage, Tom. I.*) Comme si mon hypothèse seroit à rejeter parce que le zodiaque de Sainte-Geneviève que je peux sans le moindre scrupule comparer ici au zodiaque Indien , n'a point réellement le Cancer ni le

Scorpion, mais une cigogne & un serpent, & parce qu'à Notre - Dame un ciseleur en pierre ou en bois est à la place de la Vierge.

Comme si enfin mon hypothèse devoit s'accorder avec un zodiaque que MM. Dupuis & de Lalande ne regardent point eux-mêmes comme un monument astronomique, & qui en effet ne me paroît qu'un ouvrage de sculpteur, comme ceux qui sont à Paris dans nos églises gothiques, & comme je le dis ailleurs (*volume de l'Académie 1785*).

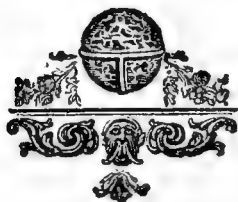
Mon hypothèse, je le répète, est conforme au zodiaque que j'ai apporté de l'Inde, consacré chez les Brames à représenter les mouvemens du Soleil & de la Lune; elle s'accorde avec celui que l'on trouve dans la grammaire Indienne du pere Beschio, jésuite Italien, dont j'ai parlé ailleurs; elle s'accorde avec le zodiaque de toutes les nations connues pour en avoir un, puisque toutes elles ont deux gémeaux ou deux chevreaux: c'est toujours le symbole de fécondité que j'ai eu en vue, & tout cela me suffit. La figure de l'ibis qui est à Sainte - Geneviève, n'empêche pas que le Cancer ne soit censé y être; le dragon n'empêche pas que le Scorpion n'y soit.

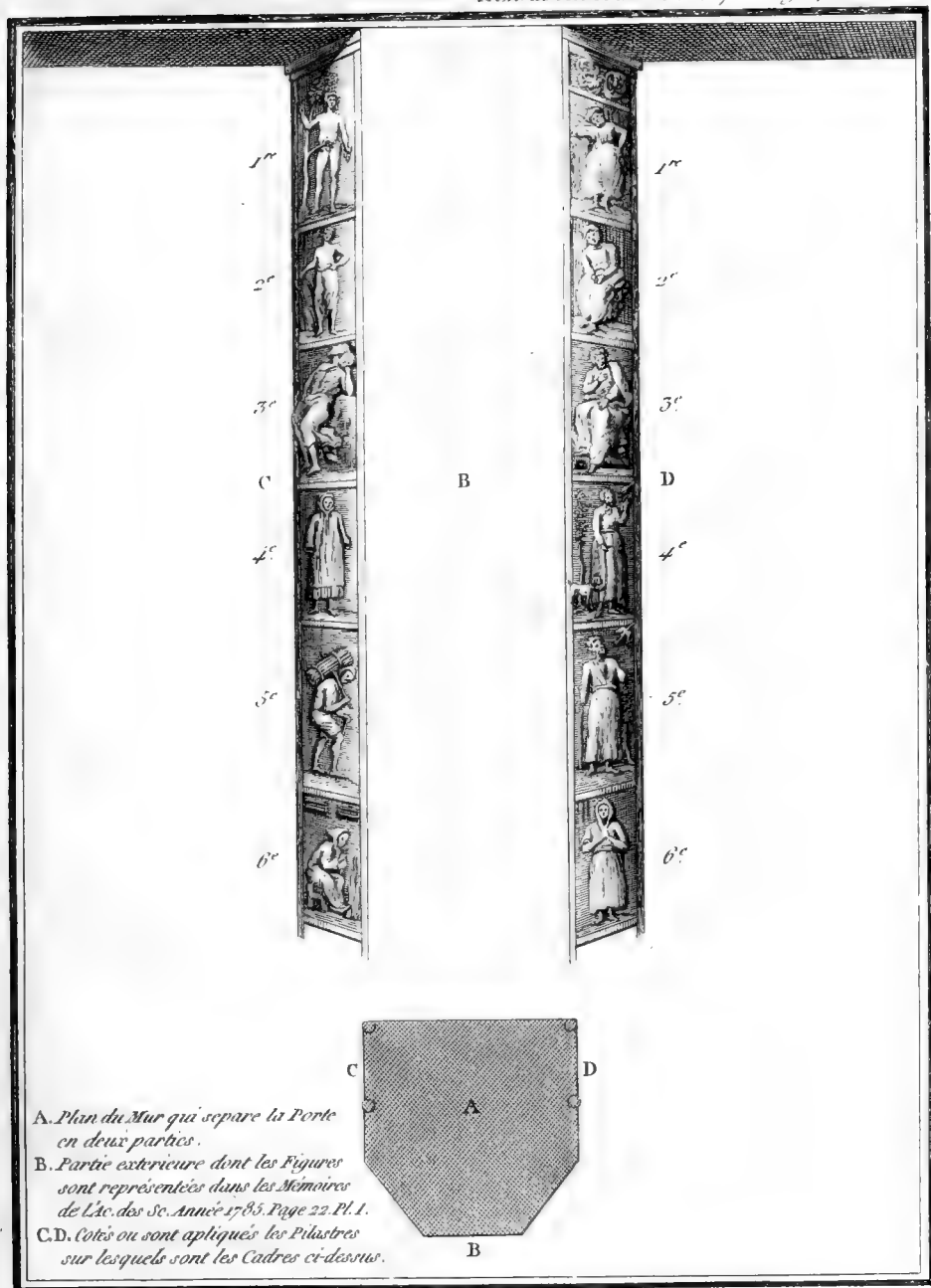
A Saint - Denys, l'espèce de lézard à huit pattes qui tient lieu du Scorpion, n'empêche pas que le Scorpion ne soit en effet caché à cette même place sous la forme de ce lézard. Nous jugeons de même de ce jeune homme qui dans le zodiaque Indien, tient la place des Gémeaux; ce signe - ci y est toujours, caché sous l'emblème d'un jeune homme: cela tient sans doute à quelque coutume du pays, ou à quelque usage plus récent, comme l'usage étoit en Egypte de peindre un ibis à la place du Cancer, &c. Peut-être seroit-il possible de rendre raison de ce symbole qu'on voit dans le zodiaque Indien. Nous la hasarderons une autre fois.

« Quoi qu'il en soit, nous avons des obligations à M. le » Gentil, conclut enfin M. de Lalande, d'avoir publié un » monument aussi curieux que celui de Notre - Dame, &

» c'est pour tendre au même but que nous avons placé ici
» les réflexions que M. Dupuis nous avoit communiquées
» au mois d'octobre 1786, sur ce monument de la religion
» payenne de nos ancêtres. »

La conclusion de M. de Lalande est flatteuse assurément, & je lui fais gré, ainsi qu'à M. Dupuis, de leurs observations ; & comme il paroît que nous tendons les uns & les autres au même but, c'est pour ne pas nous en écarter que nous venons de faire les réflexions ptécédentes sur celles de MM. Dupuis & de Lalande au sujet du zodiaque de Notre - Dame ; monument à la vérité aussi curieux qu'intéressant, & dont nous croyons avoir assigné l'origine ; mais où nous ne remarquons aucune trace particulière d'ancien temple Egyptien.





A. Plan du Mur qui sépare la Porte en deux parties.

B. Partie extérieure dont les Figures sont représentées dans les Mémoires de l'Ac. des Sc. Année 1785. Page 22. Pl. I.

C.D. Côtés où sont appliqués les Pilastres sur lesquels sont les Cadres ci-dessus.

Fossier del.

J. Le Gouaz sc.

Figures Symboliques qui sont sur les côtés du Pilastre qui est au milieu de la Porte de la Tour septentrionale de l'Eglise de N.D. de Paris.



OBSERVATIONS

Sur une espèce de Varech qui croit sur les côtes occidentales de la Basse - Normandie, & sur une petite Coquille qui se loge dans le tronc de cette plante, & y prend son accroissement.

Par M. LE GENTIL.

PENDANT les différens séjours que j'ai faits sur les bords de la mer, en 1787 & 1788, pour y observer les réfractions horizontales, je me suis en même temps occupé d'observations de physique en tout genre. Celle que je vais rapporter ici, m'a paru mériter l'attention de l'Académie.

Les naturalistes connoissent beaucoup d'espèces de plantes de varech. M. de Jussieu, de cette Académie, en a particulièrement une très - belle collection & très - bien conservée, qu'il a bien voulu me faire voir ; mais je n'y ai pas bien parfaitement reconnu celle qui fait le sujet de ce Mémoire, & j'ignore si elle est bien connue des naturalistes qui ont parlé de ces plantes. Ayant consulté M. de Jussieu, qui a bien voulu m'aider de ses lumières, nous l'avons cherchée dans Linné, & M. de Jussieu a trouvé qu'elle est dans la classe du *fucus palmatus*.

La tige de cette plante s'élève à la hauteur de deux à trois pieds, ronde, sur une grosseur qui va peu en diminuant : je n'en ai pas vu qui eussent plus de onze à douze lignes de diamètre. Son pied est garni d'une prodigieuse quantité de fortes racines qui doivent la tenir fermement attachée sur les rochers ; elle croît fort avant dans la mer, à ce qu'on m'a assuré. Du haut de la tige part une grande feuille, de même longueur à peu - près, large de quatre à cinq ou six pouces au moins, mince, lisse ; & ce qui est plus remarquable, cette feuille est d'une très - belle couleur verte, pendant que

la tige est jaunâtre, ce qui n'est pas ainsi des autres espèces connues; mais l'un & l'autre perdent cette couleur en se desséchant. Cette feuille ressemble à un large ruban, & est si mince, qu'elle ne peut se soutenir; elle retombe sur elle-même le long de la tige. Si on la prend dans le sens de sa longueur, elle se déchire avec la plus grande facilité, & on la trouve rarement sans l'être, ce qui au premier coup-d'œil me fit croire que cette plante avoit en effet plusieurs grandes feuilles; mais je reconnus par la suite, en l'examinant bien, qu'elles n'étoient que la même feuille, plus ou moins déchirée par les vents & les lames de la mer qui bat perpétuellement ces plantes, soit lorsqu'elles sont sur pied, soit en les arrachant de leur place pour les amener au plein; car, comme je l'ai dit, elles y viennent de fort loin. Ces feuilles prises en travers ou dans le sens de leur largeur, ne souffrent pas qu'on les déchire avec la même facilité; elles résistent fortement avant qu'on en vienne à bout.

Cette plante n'est pas fort commune, du moins sur la côte que j'ai visitée, si on la compare à l'immense quantité des autres espèces dont le fond de la mer est tapissé. On en trouve peu de celle-ci, & rarement d'entières, hors le temps des grandes marées, encore n'en voit-on pas à toutes les grandes marées. Ce fut une de ces marées extraordinaires, arrivées à la fin de février 1788, & dont je parlerai ailleurs, qui apporta plusieurs plantes de cette espèce sur la grève que j'habitois alors, & qui par ce moyen me procura le plaisir de l'examiner à mon aise; car je n'en avois encore trouvé que quelques fragmens.

Les premières marées m'en ayant donc procuré quelques-unes d'assez entières, ce qui me surprit, fut de remarquer à presque toutes les tiges de ces plantes, qu'elles avoient, principalement vers le pied, tout près des racines, une cavité parfaitement elliptique de quatre, cinq & six lignes, plus ou moins, de profondeur, lisse & polie, & de la plus grande régularité. Curieux d'en savoir la cause, je parcourus la côte ce jour-là, dans une étendue de plus d'une lieue;

je

je trouvai encore çà & là quelques-unes de ces plantes fort entières au milieu d'une prodigieuse & immense quantité d'autres plantes de varech, que les paysans des environs enlevoient pour leur servir d'engrais. C'étoit l'ouvrage de la mer pendant les deux premiers jours de la marée. Or, je remarquai à chacune des plantes que je trouvai, la même cavité elliptique plus ou moins profonde, & par conséquent plus ou moins grande; je ne trouvai rien de plus. Enfin, le jour même de la plus forte marée, après la retraite des eaux, je rencontrai un gros paquet de ces plantes, & dans les tiges de quelques-unes, trois petites patelles qui étoient enfoncées dans chacune de ces cavités elliptiques dont j'ai parlé; l'extrémité de leur sommet assez saillant, étoit lisse & polie, & me parut ressembler à une petite perle. La coquille étoit de la couleur de la plante, savoir, olivâtre. En les touchant, je sentis que ces coquilles étoient fortement adhérentes au fond de leurs cellules; je parvins cependant à les ôter, sans les endommager: je détachai ensuite l'animal du fond de la coquille avec le bout d'un canif; mais je fus surpris de voir que cet animal qui étoit de la couleur même de la coquille, nageoit alors en quelque sorte dans une liqueur d'un bleu superbe. Je regardai pour-lors la coquille avec la loupe, & je vis qu'en effet le fond en étoit bien de la couleur de la tige; mais que de plus cette petite coquille étoit partagée, depuis son sommet jusqu'à sa base, par plusieurs bandes ou rubans d'un très-beau bleu; & que ces bandes étoient encore toutes séparées dans le même sens par autant de lignes ponctuées, & du même bleu, ce qui produit à la loupe un bel effet, & fait regretter que cette coquille ne soit pas plus grande: mais il semble que cet animal soit destiné à tirer sa subsistance de cette plante, & que par conséquent les plus grandes coquilles ne puissent excéder le diamètre de la tige. La plus grande de ce genre que j'ai trouvée, n'a que cinq lignes dans la plus grande largeur, & six dans son grand axe.

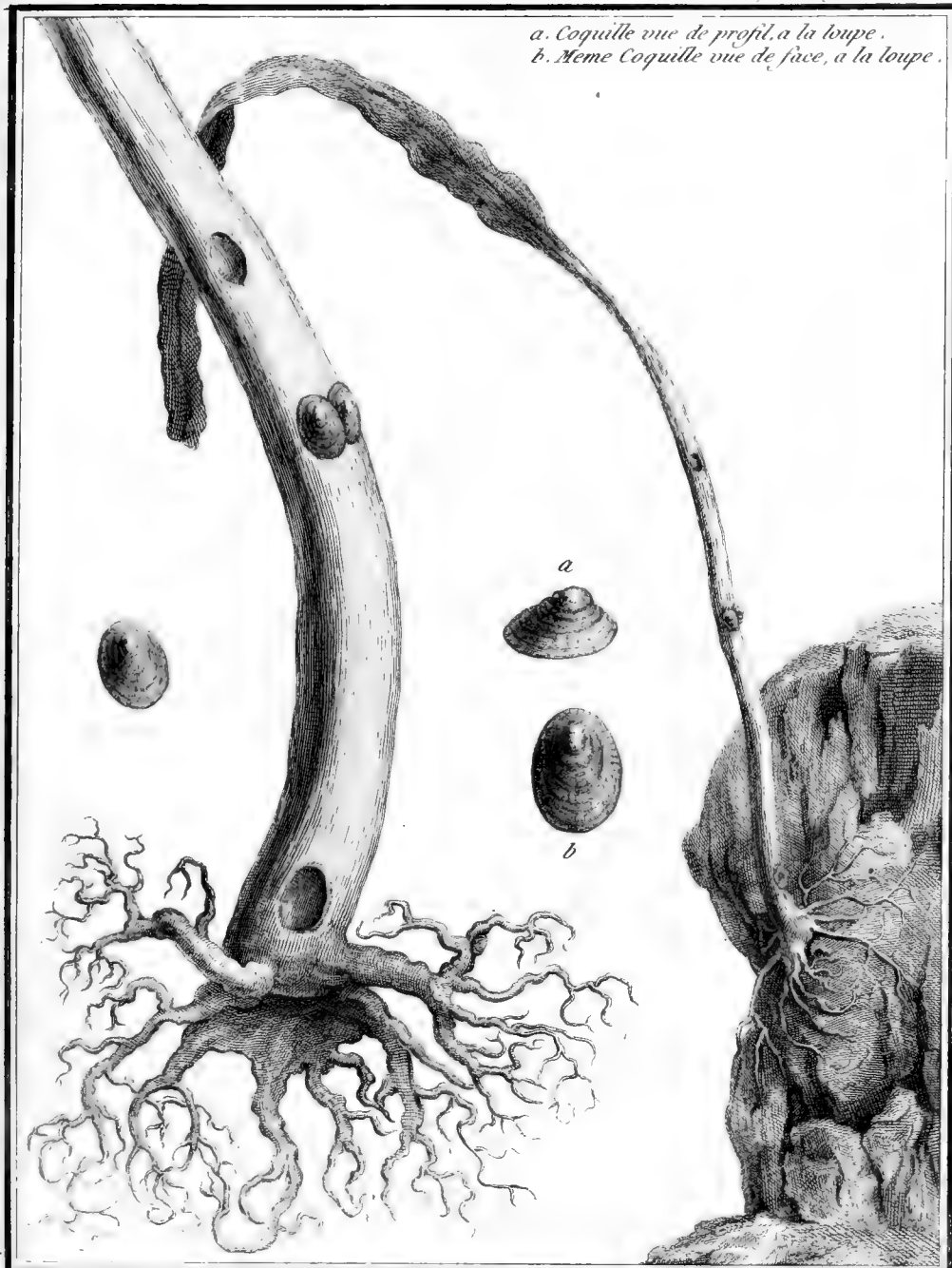
Je pense que la mer entraîne avec elle ça & là du frai ou semence de cet animal ; que ce frai s'attache à ces plantes quand il en rencontre ; qu'il y trouve l'aliment qui lui convient , qu'il en fait sa nourriture en se creusant en même temps une cellule , qu'il agrandit par conséquent à mesure qu'il prend son accroissement. Aussi une fois détaché de sa demeure & entraîné par la mer , il doit périr , par ce qu'il est difficile qu'il puisse rejoindre une semblable plante , & un autre aliment qui lui soit propre.

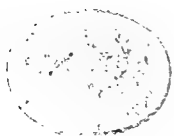
J'ai vu dans le cabinet de M. de Jussieu deux ou trois coquilles que j'ai reconnues pour être de l'espèce de celles - ci ; elles sont de la même grandeur , elles ont vraisemblablement la même origine.

J'ai fait faire un dessin de la plante & des coquilles , que je joins à ce Mémoire.



a. Coquille vue de profil, a la loupe.
b. Meme Coquille vue de face, a la loupe.





RECHERCHES

Sur un Arbrisseau connu des Anciens sous le nom de Lotos de Lybie.

Par M. DESFONTAINES.

LES naturalistes anciens avoient donné , comme l'on fait , le nom de *lotos* à diverses espèces de plantes économiques , parmi lesquelles il en est deux qui ont eu la plus grande célébrité.

L'une , particulière à l'Égypte , croissoit dans les canaux qui servoient à conduire les eaux du Nil pour arroser & fertiliser les campagnes. C'est le nénufar des Arabes , connu des botanistes modernes sous le nom de *nymphaea lotus*, Lin. dont Prosper Alpin nous a laissé une histoire très-exacte & très-détaillée (a). Cette plante remarquable par la beauté de ses fleurs qui ressembloit beaucoup à celles de notre violet blanc , *nymphaea alba*, Lin. est décrite dans les ouvrages de Théophraste & de Pline , sous le nom de *lotos* d'Égypte. Ses semences & ses racines étoient employées autrefois , & le sont encore aujourd'hui , à la nourriture des hommes (b).

L'autre espèce de *lotos* qui va faire le sujet de ce Mémoire , aussi célèbre , mais beaucoup moins connue que

(a) Alpin, *Exot. p.* 213.

(b) On voit aussi sur d'anciennes médailles , sur des pierres gravées & sur des monumens Egyptiens , le fruit d'une autre espèce de *lotos* , qui est évasé comme un ciboire , & percé de trous ronds à son extrémité. Ce fruit appartient au *nymphaea nelumbo* Lin. Il paroît que c'est la fleur de cette plante qu'un poëte présenta comme une merveille à Hadrien , sous le nom de *lotos antioïen*. Elle est représentée sur plusieurs monumens anciens , servant de siège à un enfant que Plutarque dit être le crépuscule , à cause de la couleur rose de la fleur du *nelumbo*. (*Acad. des Inscriptions*, tome III, année 1723 , p. 179).

la précédente, croissoit naturellement sur les côtes de la Lybie, & avoit donné son nom à un peuple nombreux de ces contrées, auquel elle servoit de principale nourriture.

La plupart des naturalistes & des historiens anciens ne nous en ont laissé que des descriptions très-imparfaites, & d'après lesquelles il est difficile de s'en former une idée juste; aussi leurs interprètes & leurs commentateurs ont-ils fait des efforts inutiles pour le reconnoître, & rarement même s'accordent-ils entr'eux. Les uns ont dit que c'étoit l'alifier, *cratagus torminalis* Lin. D'autres l'ont pris pour le micocoulier, *celtis australis* Lin. Quelques-uns ont pensé que c'étoit une espèce de plaqueminer, *diospyros lotus* Lin. Mais en lisant attentivement les descriptions du *lotos*, que Théophraste, Polybe & Pline nous ont transmises, & en les comparant avec les arbres dont il vient d'être mention, on voit qu'elles ne peuvent s'y rapporter; & pour réfuter plus sûrement encore toutes ces conjectures, il me suffira d'assurer qu'aucun de ces arbres ne se trouve dans le pays des anciens Lotophages, où j'ai séjourné pendant longtemps, & que j'ai visité avec beaucoup de soin.

Il est hors de doute que ces peuples habitoient particulièrement dans le voisinage du golfe qui porte le nom de petite Syrte, sur les confins de la partie méridionale du royaume de Tunis, où se trouve l'île *Gerba*, connue des anciens sous le nom de *Lotophagitis*, parce qu'elle produisoit abondamment du *lotos*.

Strabon désigne le pays des Lotophages de manière à ne nous laisser aucun doute sur sa position. « A l'entrée de » la petite Syrte, dit ce géographe célèbre, est une île » oblongue, d'une moyenne étendue, nommée *Cercinna*, tout » près on en trouve une plus petite, appelée *Circinnitis*: (c)

(c) Ces deux îles, situées exactement comme le dit Strabon, ont conservé leur ancien nom; on les appelle encore aujourd'hui les îles *Cercinna* ou *Karkana*.

» Là, ajoute le même auteur, commence la petite Syrte
» ou Syrte des Lotophages; sa circonférence est d'environ
» 1600 stades, & sa largeur de 600. Vis-à-vis les deux
» promontoires qui forment l'entrée du golfe, sont deux
» îles voisines du continent; l'une est celle de *Cercinna*,
» qui vient d'être citée; l'autre se nomme *Meninx*, que l'on
» croit être le pays des Lotophages, dont Homère a parlé,
» parce que le *lotos*, dont le fruit a une saveur très-agréable,
» y croît en abondance ».

Pline confirme exactement ce que dit Strabon sur la situation de ce pays célèbre. « La partie de l'Afrique qui
» regarde l'Italie, produit un arbre remarquable connu sous
» le nom de *lotos*; il vient en grande quantité aux environs
» des Syrtes..... Son fruit a un goût si délicieux qu'il a
» donné son nom à un peuple nombreux, & à toute l'étendue
» du pays où il croît naturellement ».

C'est donc dans la partie méridionale du royaume de Tunis, & particulièrement aux environs de la petite Syrte, qu'il faut rechercher le *lotos*. Il est presque impossible qu'un végétal qui y fut autrefois assez abondant pour servir de principale nourriture aux hommes, & pour fournir, comme le dit Pline, à la subsistance des armées Romaines lorsqu'elles traversoient l'Afrique, ne se soit pas conservé dans ces contrées.

Le *lotos* de Lybie étoit un arbre, & non une herbe comme celui d'Egypte; c'est un fait attesté par tous les naturalistes anciens qui en ont parlé, & que l'on ne peut révoquer en doute, comme nous le verrons ci-après.

Pendant le séjour que j'ai fait sur les côtes de Barbarie, & dans les lieux même où croissoit anciennement le *lotos*, je n'ai rien négligé pour découvrir un végétal aussi intéressant. J'avois lu avec attention les descriptions qu'en ont laissées les anciens, & entr'autres celles de Théophraste de Pline, & de Polybe qui avoit observé lui-même le *lotos*.

Les recherches que j'ai faites m'ont conduit à croire que c'étoit une espèce particulière de jujubier sauvage, qui est

encore aujourd'hui très-répandue dans toute la partie méridionale du royaume de Tunis, sur les bords du désert & aux environs de la petite Syrte. Le Docteur Schaw avoit le premier embrassé cette opinion, sans cependant qu'il l'ait appuyée sur des preuves aussi fortes que celles que je vais offrir. D'ailleurs, il n'en a donné qu'une description très-imparfaite à la fin du catalogue des plantes imprimé à la suite de ses voyages, avec une figure qui n'en représente ni les fleurs ni les fruits, & d'après laquelle il est très-difficile, pour ne pas dire impossible, de le reconnoître. Il le nomme *ziziphus sylvestris inst. rei herb.* dénomination qui manque d'exactitude, puisque Tournefort désigne par cette phrase, une plante différente de celle qui est en question.

Le jujubier décrit par Linné sous le nom de *rhamnus lotus*, paroît bien être l'arbrisseau dont j'offre ici l'histoire; mais il faut avouer en même temps que les caractères qui le distinguent, ont échappé à ce célèbre naturaliste; il paroît même qu'il n'en a parlé que d'après le Docteur Schaw. Je vais en donner une description abrégée, & je discuterai ensuite les passages de quelques auteurs anciens où il est fait mention du *lotos*, & d'après lesquels il me paroît évident qu'il n'y a que l'arbrisseau en question qui puisse raisonnablement s'y rapporter.

Le *rhamnus lotus* s'élève à la hauteur de quatre à cinq pieds. Ses rameaux nombreux & recourbés vers la terre, sont garnis d'épines qui naissent deux à deux, & dont l'une est droite & l'autre courbe, comme celles du jujubier cultivé.

Ses feuilles tombent pendant l'hiver; elles sont alternes, ovales, obtuses, légèrement crénelées, larges de trois à quatre lignes, & marquées de trois nervures longitudinales.

Les fleurs naissent en petits groupes aux aisselles des feuilles, quelquefois elles sont solitaires.

Le calice est à cinq divisions ovoïdes, ouvertes, partagées longitudinalement par une petite ligne saillante.

La corolle est composée de cinq pétales plus courts que le calice, & creusés en forme de demi-entonnoir.

Les étamines, au nombre de cinq, sont opposées aux pétales, & les deux styles sont courts & rapprochés.

Le fruit est un drupe pulpeux à peu-près sphérique, de la grosseur d'une prunelle sauvage, renfermant un noyau osseux, à une seule loge. En mûrissant, il prend une couleur rousse approchant de celle de la jujube.

Le *rhamnus lotus* fleurit en mai, & ses fruits sont mûrs dans le courant d'août & de septembre : leur goût approche de celui de la jujube, mais il est plus agréable.

Il est évident, d'après ce que je viens de dire, que cet arbrisseau a de grands rapports avec le jujubier cultivé, dont il diffère sur-tout par la forme de son fruit, qui est sphérique, & au moins une fois plus petit que celui du précédent. Ses feuilles sont aussi moins allongées proportionnellement à la longueur. Le jujubier s'élève à la hauteur de vingt à vingt-cinq pieds : Le *rhamnus lotus* forme toujours un buisson ; il se trouve abondamment dans presque toutes les plaines sablonneuses & arides du royaume de Tunis, particulièrement sur les bords du désert & aux environs de la petite Syrte.

Je vais maintenant rapporter les passages des auteurs anciens où il est fait mention du *lotos*, afin de les comparer avec mes observations, & d'établir les raisons qui me portent à croire que c'est le jujubier que je viens de décrire, qui est le véritable *lotos* de Lybie.

Hérodote dit que le fruit du *lotos* a la forme des graines du lentisque, qu'il a une saveur aussi agréable que la datté, qu'il sert d'aliment aux Lotophages, & qu'ils en font du vin. Ce récit ne nous donne à la vérité que peu de connaissance sur le *lotos* ; mais du moins la comparaison que l'auteur fait de son fruit avec la semence du lentisque, est exacte & conforme à ce que j'ai dit de celle du jujubier.

que je regarde comme le *lotos* : elles ont l'une & l'autre une figure à peu-près sphérique , & elles ne diffèrent sensiblement que par la grosseur.

Selon Théophraste , le *lotos* qu'il nomme *celtis* , est à peu-près de la grandeur d'un poirier ; les feuilles sont découpées & ressemblent à celles de *lillex*. Le fruit est de la grosseur de la fève d'Egypte (ou colocase) ; il mûrit comme les raisins en changeant de couleur , & naît comme ceux du myrte , sur les deux côtés des tiges qui sont nombreuses & touffues. . . . Sa saveur est douce , il ne fait aucun mal (d). Celui qui est sans noyau est préféré à l'autre : on en fait du vin , & l'arbre produit une très-grande quantité de fruits , &c.

Pline parle du *lotos* à peu-près dans les mêmes termes que Théophraste ; il le compare au *celtis* d'Italie , mais il dit que le climat l'a fait changer , qu'il est de la grandeur d'un poirier , quoique cependant Cornélius Népos assure qu'il a moins d'élévation. Ses rameaux sont touffus comme ceux du myrte. La couleur du fruit qui imite celle du safran , change souvent avant la maturité , comme dans les raisins. Si ces deux descriptions ne sont ni aussi précises ni aussi détaillées qu'on pourroit le désirer , du moins elles renferment plusieurs caractères qui conviennent mieux à notre jujubier , qu'à aucun autre arbre du pays des anciens Loto-phages. Ce que Théophraste & Pline disent de la forme du fruit , de sa grosseur , de son goût , de sa couleur , de la manière dont il naît sur des rameaux touffus comme ceux du myrte , &c. se rapporte parfaitement à l'arbrisseau dont je viens de parler. Il ne paroît pas d'ailleurs que ces deux auteurs ayent eu des notions bien précises sur le *lotos* ; aucun d'eux ne dit l'avoir observé , & l'on voit qu'ils n'en parlent que sur la foi d'autrui ; il n'est donc pas étonnant que leurs descriptions manquent d'exactitude.

(d) Les noyaux des pêches , des cerises , des prunes , &c. s'oblitérent quelquefois par la culture. (Duham. *Traité des arbres fruitiers*).

Théophraste raconte que le *lotos* étoit si commun dans l'île Lotophagite & sur le continent adjacent, que l'armée d'Ophellus ayant manqué de vivres en traversant l'Afrique pour se rendre à Carthage, se nourrit des fruits de ces arbres pendant plusieurs jours ; & précisément la plupart des plaines arides & incultes, qui conduisent de la partie méridionale du royaume de Tunis, vers les ruines de l'ancienne Carthage, sont encore aujourd'hui couvertes en beaucoup d'endroits de l'espèce de jujubier que je prends pour le *lotos* : je n'y ai observé aucun autre arbre ou arbrisseau avec lequel on puisse le confondre.

Si nous consultons Polybe qui avoit vu le *lotos* de Lybie, cet historien nous offrira encore des rapprochemens plus frappans que ceux que je viens de rapporter.

« Le *lotos*, dit cet auteur, est un arbrisseau rude & armé d'épines ; ses feuilles sont petites, vertes, semblables à celles du *rhamnus*, mais plus larges & plus épaisses. Les fruits encore tendres ressemblent aux baies de myrte : lorsqu'ils sont mûrs, ils se teignent d'une couleur de pourpre ; ils égalent alors en grosseur les olives rondes ; & chacun renferme un noyau osseux dans son intérieur ».

On voit que ces observations sont parfaitement conformes avec la description que j'ai donnée du *rhamnus lotus*. Je sais que quelques commentateurs regardent le *lotos* de Polybe comme une espèce différente de celle de Théophraste & de Pline ; mais il me semble que c'est sans fondement, car les descriptions de ces deux naturalistes ont plus de rapport avec le jujubier que j'ai indiqué pour le *lotos*, & qui est le même que celui de Polybe, qu'avec aucun autre arbre qui croisse sur les côtes de Barbarie.

Polybe ne s'est pas seulement borné à le décrire, il nous apprend aussi la manière dont on le préparoit autrefois, & ce qu'il en dit, servira encore à confirmer l'opinion que j'ai embrassée.

« Lorsque le *lotos* est mûr, les Lotophages le recueillent, le broient & le renferment dans des vases. Ils ne

» font aucun choix des fruits qu'ils destinent à la nourriture
 » des esclaves, mais ils choisissent ceux qui sont de meilleure
 » qualité pour les hommes libres. Ils les mangent préparés
 » de cette manière : leur faveur approche de celle des figues
 » ou des dattes. On en fait aussi du vin, en les écrasant &
 » en les mêlant avec de l'eau. Cette liqueur est très-bonne à
 » boire, mais elle ne se conserve pas au-delà de dix jours,
 » c'est pourquoi ils n'en font qu'à mesure qu'ils en ont
 » besoin. »

Pline dit la même chose que Polybe sur la préparation du *lotos*, ce qui me porte d'autant plus à croire que c'est le même arbrisseau dont ils ont parlé l'un & l'autre; il ajoute seulement que le bois étoit recherché pour faire des instrumens à vent & divers autres ouvrages.

Aujourd'hui les habitans des bords de la petite Syrte & du voisinage du Désert, recueillent encore les fruits du jujubier que je prends pour le *lotos*; ils les vendent dans les marchés publics, les mangent comme autrefois, & en nourrissent même leurs bestiaux. Ils en font aussi de la liqueur, en les triturant & en les mêlant avec de l'eau. Il y a plus, c'est que la tradition que ces fruits servoient anciennement de nourriture aux hommes, s'est même conservée parmi eux.

D'après toutes ces considérations, il me paroît évident que c'est le jujubier que je viens de décrire, qui est le véritable *lotos* des Lotophages. Il est le seul végétal des contrées qu'ils habitoient autrefois, qui puisse s'accorder avec ce qu'en ont dit les anciens, & sur-tout Polybe qui l'avoit observé lui-même.

Il est vraisemblable que c'est ce même *lotos* dont Homère a parlé; mais son imagination féconde l'avoit entraîné un peu au-delà de la vérité, en lui faisant dire que « les fruits » de cet arbrisseau avoient un goût si délicieux, qu'ils faisoient » perdre aux étrangers le souvenir de leur patrie, » (*Odyssée*, liv. IX.)

*Extraits des Auteurs anciens où il est mention du
Lotos & des Lotophages , pour servir de preuves
au Mémoire.*

« CELTIS proprium genus præstat, magnitudine quanta Theophrastes.
» pyrus aut paulò minore incisuras foliorum habet ac ilicis
» esse videantur . . . Generaeius plura fructibus inter se discreti
» produntur. Fructus magnitudine fuscæ maturescit, uvarum
» modo variè colores immutat. Nascitur quemadmodum
» myrtha adversa inter se dentes super germina. Iditur ab
» iis quos Lotophagos vocant : prædictis, suavis, innocuus
» atque etiam bonæ frugis. Ventibus est suavior qui sine
» ligno interiori est ; nam vel genus huiusmodi redditur &
» vinum eo exprimitur. Multa hæc arbor fructuque copiosa
» est ; exercitum itaque Ophelli cum in Carthaginem profi-
» cisceretur vel eo fructu diebus pluribus pastum, commea-
» tum defectu , accepimus. Est igitur in insulâ Lotophagiâ,
» Pharide vocatâ, largâ copiâ, cæterum non minor in con-
» tinenti, &c. (*Theophr. hist. Plant. lib. IV, caput 4, pag. 321 ;*
» *edit. Amstelod. apud Henric. Laurentium. 1644,)*

» Eadem Africa, quâ vergit ad nos, insignem arborem loton. Plinius.
» gignit quam vocant celtim, & ipsam Italiæ familiarem, sed
» terrâ mutatam : præcipuè est circa Syrtes atque Nazamonas.
» Magnitudo quæ pyro, quanquam Nepos Cornelius brevem
» tradat ; incisuræ foliis crebriores alioquin ilicis viderentur.
» Differentiæ plures æque maximè fructibus fiunt : magnitudo
» huic fabæ, color croci . sed ante maturitatem alius atque
» alius sicut in uvis. Nascitur densus in ramis myrti modo,
» non ut in Italiâ cerasi, tam dulci ibi cibo ut nomen etiam
» terræ gentique dederit , nimis hospitali advenarum obli-
» vione patriæ. Ferunt ventris non sentire morbos qui eum
» comedant. Melior sine interiore nucleo qui in altero genere
» osseus videtur : vinumque exprimitur illi sine melle quod
» ultra denos dies negat durare idem Nepos ; baccasque

» contusas cum alica ad cibos doliis condi. Quin & exercitus
 » pastos eo accepimus, ultrò citròque conmeantes per Afri-
 » cam. Ligno color niger; ad tibiaram cantus expetitur, &
 » radice cutellis capulos, brevesque alios usus excogitant.
 » Hæc ibi natura loti.

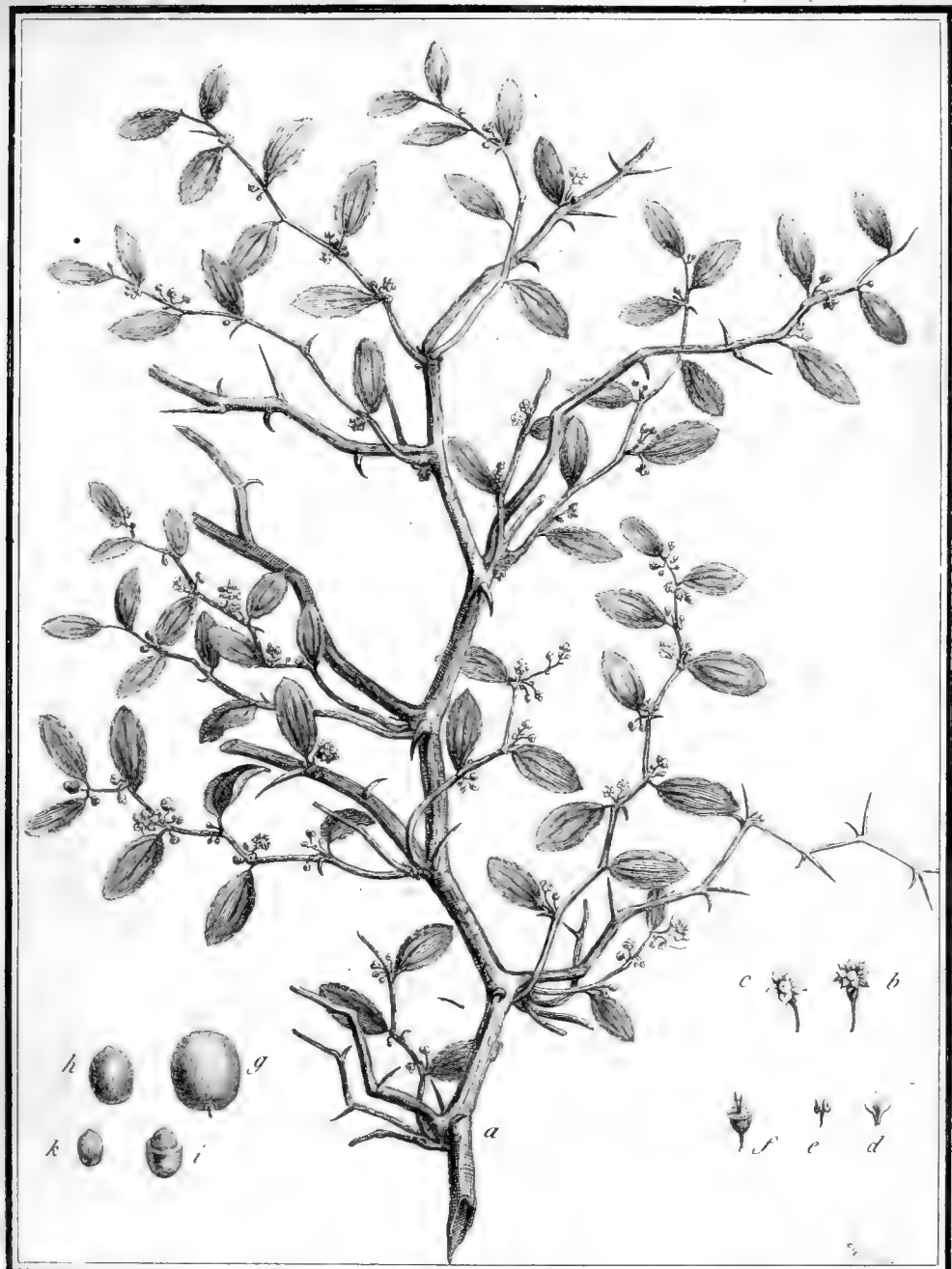
» Est autem eodem nomine & herba in Egypto caulis, in
 » palustrium genere; recedentibus enim aquis Nili riguis
 » provenit similis fabæ, caule foliisque densâ congerie
 » stipatis, brevioribus tantum gracilioribusque, cui fructus
 » in capite papaveri similis incisuris omnique alio modo,
 » intus grana ceumilium. Incolæ capita in acervis putrefaciunt,
 » mox separant lavando & siccata tundunt, eoque pane utuntur.
 » Mirum est quod præter hæc traditur, sole occidente papa-
 » vera ea comprimi & integri foliis, ad ortum autem aperiri,
 » donec maturescant, flosque qui est candidus decidat : . . .
 » radicem lotosque habet mali cotonei magnitudine, oper-
 » tam nigro cortice qualis & castaneas tegit, interius candidum
 » corpus gratum cibus sed crudum, gratius coctum sive aquâ
 » sive prunis, nec aliundè magis quam purgamentis ejus sues
 » crassescunt. (*Plin. lib. XIII, cap. 17 & 18.*)

Herodotus.

» Horum Gindanorum oram in mare porrectam incolunt
 » Lotophagi qui è solo loti fructu victitant, qui fructus est
 » instar fructûs lentisci, assimilis fructui palmarum : ex hoc
 » fructu Lotophagi vinum conficiunt. Lotophagis secundum
 » mare vicini sunt Machyles loto & ipsi vescentes, sed minùs
 » quàm superiores : pertingunt usque ad ingentem amnem;
 » nomine Tritonem, in quo est insula quæ dicitur *Phla*.
 » (*Herod. lib. IV, pag. 123; edit. Henrici Stephani.*)

Strabo.

» In principio Syrtis insula quædam est oblonga nomine
 » Cercinna, justæ magnitudinis, quæ urbem habet eodem no-
 » mine, item altera minor, Cercinnitis : his continua est minor
 » Syrtis quam Lotophagitin Syrtim vocant. Hujus sinûs am-
 » bitus est mille & sexentorum fere stadiorum, oris latitudo
 » sexentorum. Juxta utrumque promontorium quæ os effi-
 » ciunt, insulæ adjacent continenti, Cercinna scilicet de qua



Fossier del.

Jubier lotos .

Rhamnus lotus.

T. Le Couaz sc.



» diximus, & Meninx, magnitudine æquales. Menigem Lophagorum terram putant cujus Homerus meminit...
 » nam lotos arbor crebra in eâ est, fructu suavissimo. (*Strabo*, p. 545, edit. *Basil.*)

» Differit de loto dictâ in Lybiâ Polybius Megalopolitanus Polybius apud Athenæum
 » hoc pacto, *libro histor.* 120, quam se ipsum vidisse dicit :

» Est arbor loti non magna, at & aspera est, spinis armata,
 » foliumque habet viride exiguum, rhamnoque simile, at
 » latius & crassius. Fructus verò & colore & magnitudine
 » similis est à principio albis myrti fructibus perfectis : ubi
 » verò creverit, colore fit puniceus, magnitudineque similis
 » limus olivis rotundis : at ubi perfectus est exiguum habet
 » nucleum. Ubi verò factus fuerit maturus, eum colligunt
 » atque hunc quidem famulis cum chondro cædentes in vasculâ
 » constipant, illum autem deligentes eodem modo liberis
 » parant, atque sic his vescuntur ; est autem hoc epulum
 » ficui persimile atque palmarum fructibus, odoris tamen
 » suavitate jucundius. Vinum fit ex eo fructu irrigato atque
 » cum aquâ confuso, quod gustui quidem est suave, voluptatibus
 » temque affert, ac simile est mulso quo sine aquâ utuntur ;
 » ut non potest per majus spatium decem dierum perdurare
 » quo fit ut paulatim faciant, veluti usus ratio postulat. Faciunt
 » ex illis acetum etiam. (*Polybius apud Athenæum, lib. XIV, caput. 12.*)

Explication de la Planche.

- a. Une branche du *rhamnus lotus*.
- b. Une fleur.
- c. Le calicé.
- d. Un pétale.
- e. Une étamine.
- f. Le pistil.
- g. Le fruit.
- h. Le noyau.
- i. Le noyau ouvert.



M É M O I R E

SUR LES INTÉGRALES DOUBLES.

Par M. LE GENDRE.

Présenté le
12 Decemb.
1789.

JE me propose d'indiquer dans ce Mémoire, un moyen de transformation auquel on n'a pas fait attention jusqu'à présent, & qui paroît très propre à faciliter l'évaluation des intégrales doubles ou multiples, lesquelles servent à déterminer les solidités des corps, leurs surfaces courbes, la position de leurs centres de gravité, &c. L'objet que j'ai particulièrement en vue, est d'intégrer par ce moyen les formules qui donnent l'attraction d'un sphéroïde elliptique quelconque sur un point extérieur ; d'où résultera la démonstration directe de ce théorème déjà connu : *Si deux sphéroïdes elliptiques ont leurs trois sections principales décrites des mêmes foyers, les attractions qu'ils exercent sur un même point extérieur, auront la même direction, & seront entr'elles comme leurs masses.*

Cette proposition que j'avois démontrée rigoureusement pour les sphéroïdes de révolution (*Sav. étrang. Tom. X*), & qui devenoit infiniment probable pour ceux dont toutes les coupes sont elliptiques, a l'avantage de ramener le cas des points extérieurs à celui des points situés sur la surface du sphéroïde, & de réduire ainsi à une forme très-simple la valeur absolue de l'attraction. Mais si la vérité de ce théorème peut être constatée assez facilement par l'induction & par une approximation poussée très-loin, il n'est pas aussi facile de s'en procurer une démonstration rigoureuse, & je ne crains pas de dire que cette question est une des plus épineuses de l'analyse. La seule solution qui en existe, est celle que M. de la Place a donnée dans les

Mém. de l'Académie, année 1783; mais la méthode de ce savant géomètre, quelque ingénieuse qu'elle soit, laisse à désirer un procédé plus direct, & ne répand d'ailleurs aucune lumière sur l'intégration indéfinie.

La difficulté consiste en ce que la valeur de l'attraction, qui se réduit immédiatement à une intégrale double $\int P dx dy$, ne peut plus s'intégrer par les voies ordinaires, ni par rapport à x ni par rapport à y : l'une ou l'autre de ces intégrations ne pourroit donc s'effectuer qu'en introduisant des transcendentes dont il seroit très-difficile de se débarrasser pour obtenir le résultat final sous la forme la plus simple. En vain essayeroit-on de rendre l'une des deux intégrations possible par la transformation des coordonnées; ce moyen qui réussit dans d'autres occasions, ne seroit dans celle-ci d'aucun secours.

Mais si la transformation des coordonnées, telle que la géométrie l'enseigne, est un moyen limité & insuffisant, nous serons voir que le changement des variables peut se faire d'une manière beaucoup plus générale; d'où résulte un principe que je regarde comme très-fécond dans ces recherches, & très-propre à faciliter l'évaluation des intégrales doubles ou multiples.

Ce principe auquel j'étois parvenu par des considérations géométriques, & que j'ai examiné ensuite avec plus de soin, ne s'est point trouvé différent d'un moyen de transformation indiqué par M. de la Grange dans les Mémoires de Berlin, *an. 1773, pag. 125*. La propriété en appartient donc à cet illustre géomètre; il ne me reste que la nouvelle forme sous laquelle j'ai présenté ce principe & l'usage que j'en ai indiqué, usage auquel il paroît que M. de la Grange n'a pas pensé, ou dont au moins il n'a fourni aucun exemple.

L'application de ce principe à la formule de l'attraction, offre tout d'un coup le moyen d'effectuer l'une des intégrations désirées, & de parvenir ainsi à la solution du problème. Mais si la possibilité est manifestée au premier

abord, l'exécution souffre encore de grandes difficultés ; par l'extrême complication qu'entraîneroient les procédés ordinaires, complication telle que l'usage de la méthode deviendrait illusoire, puisqu'il seroit à peu-près impossible d'en tirer le résultat final. Je pense que les géomètres verront avec plaisir les moyens que j'ai mis en usage pour vaincre ces difficultés ; ils m'ont fourni de nouvelles propriétés générales de l'attraction des sphéroïdes, & m'ont enfin conduit à la proposition désirée.

Avant de traiter la question dans toute sa généralité, j'ai remarqué qu'il y avoit un cas particulier très-étendu, où la formule de l'attraction étoit intégrable immédiatement par les moyens ordinaires. Ce cas qui n'avoit été aperçu, ni par moi ni par aucun de ceux qui se sont occupés de cette matière, est celui où le point attiré est situé dans le plan d'une des trois sections principales du sphéroïde. Il est clair que l'attraction d'un sphéroïde de révolution sur un point quelconque placé au dehors, n'est qu'une sous-division de ce cas particulier, puisqu'on peut toujours supposer que le plan attiré est situé dans le plan d'un méridien, & que ce méridien est une des trois sections principales du sphéroïde. J'ai donc cru qu'il n'étoit pas inutile de donner à ce cas tout le développement qu'il méritoit.

Principe de transformation, pour faciliter l'évaluation des intégrales doubles ou multiples.

ON peut toujours regarder une intégrale double $\int P dx dy$, comme représentant la solidité d'un corps, comprise depuis le plan de projection, qui est celui des coordonnées x & y , jusqu'à la surface courbe dont l'équation est $z = P$. Lorsqu'on intègre par rapport à l'une des deux indéterminées, en regardant l'autre comme constante, on ne fait autre chose que diviser la projection en une infinité de bandes parallèles dans le sens des coordonnées ; & évaluer la partie de solidité qui répond à chaque bande de

de la projection. Si on change les coordonnées d'une manière quelconque usitée en géométrie, le procédé d'intégration, par rapport aux nouvelles variables, suppose toujours qu'on divise la projection ou la base du solide en une infinité de parties, suivant des lignes parallèles ou tendantes à un point donné. Or, il peut se faire que cette manière de diviser la projection, ne soit pas la plus propre à donner une expression simple pour les portions de solide correspondantes.

Relativement à l'objet qu'on se propose, peu importe de quelle manière on divise la base du solide, pourvu qu'on tienne compte de toutes ses parties. Il faut donc s'attacher à partager cette base par des lignes quelconques tracées suivant un paramètre variable, de manière qu'entre deux courbes consécutives, la partie solide correspondante soit facile à évaluer analytiquement. Il n'y aura plus qu'à faire varier le paramètre dans une seconde intégration, & à étendre l'intégrale jusqu'aux limites du solide.

La même idée peut être exprimée analytiquement; elle n'en acquerra que plus de simplicité & de généralité.

Soit prise une équation quelconque entre x , y & un paramètre variable p , & soit tiré de cette équation $d y = a d p + C d x$. Puisque dans l'élément $P d x d y$, la différence $d y$ suppose x constant, on aura simplement $d y = a d p$; & $P d x d y = a P d x d p$. On substituera donc dans $a P$ la valeur de y en p & x tirée de l'équation supposée, & l'intégrale $\int P d x d y$ sera généralement transformée en celle-ci $\int a P d x d p$. Dans les cas particuliers, on verra le plus souvent avec assez de facilité, quelle fonction de x & y il convient de prendre pour p , afin que la transformée $\int a P d x d p$ soit la plus simple qu'il est possible.

Tel est le principe ou le moyen de transformation très-simple, mais très-général, que nous avons annoncé comme devant faciliter beaucoup l'évaluation des intégrales doubles

ou multiples. Un seul exemple va faire juger de ses avantages.

Soit proposée la différentielle

$$\frac{P}{Q} dx dy \sqrt{\left(\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h}{a'x^2 + b'xy + c'y^2 + f'x + g'y + h'} \right)}$$

dans laquelle P & Q sont des fonctions rationnelles & entières de x & y . Cette formule dans l'état où elle est, n'est intégrable ni par rapport à x ni par rapport à y ; pour rendre l'une des deux intégrations possible, soit

$$\sqrt{\left(\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h}{a'x^2 + b'xy + c'y^2 + f'x + g'y + h'} \right)} = p;$$

La valeur de y tirée de cette équation, fera de la forme

$$A + Bx + \sqrt{C + Dx + Ex^2},$$

A, B, C, D, E étant des fonctions de p . La valeur de dy prise, comme il convient, en supposant x constante, ne renfermera non plus d'autre radical que $\sqrt{C + Dx + Ex^2}$; d'où il suit qu'en introduisant la variable p à la place de y dans la différentielle proposée, la transformée ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{C + Dx + Ex^2}$, & par conséquent l'intégration par rapport à x pourra s'effectuer au moyen des arcs de cercle & des logarithmes.

L'exemple que nous venons d'apporter, renferme comme cas très-particulier la formule de l'attraction des sphéroïdes; il est donc possible d'en effectuer l'intégration par les moyens ordinaires. Mais revenons aux formules générales. Dans la transformation précédente, on n'a changé qu'une variable; on peut suivant le même principe changer toutes les deux.

Soient p & q les deux variables qu'on doit introduire à la place de x & y ; supposons qu'entre ces quatre quantités on ait établi deux équations quelconques, d'où

l'on tire

$$dx = A dp + B dq$$

$$dy = A' dp + B' dq.$$

La valeur de dx dans l'élément $P dx dy$ doit toujours supposer y constant, de sorte que pour la substitution on aura $A' dp + B' dq = 0$, ou $dq = -\frac{A'}{B'} dp$;

donc $dx = \frac{A B' - A' B}{B'}$ dp , & par conséquent $\int P dx dy$ devient d'abord

$$\int \frac{A B' - A' B}{B'} \cdot P dp dy;$$

ainsi à la place des deux variables x & y , nous avons déjà p & y . Il faut encore introduire q à la place de y ; pour cela,

observons que le dy de l'élément $\frac{A B' - A' B}{B'} P dp dy$,

suppose p constant; on a donc $dy = B' dq$, & finalement le résultat de la transformation des deux variables sera

$$\int (A B' - A' B) P dp dq.$$

Il faut observer que l'élément $dx dy$ devant être toujours positif, ainsi que $dp dq$, s'il arrivoit que $A B' - A' B$ fût négatif, cette différence de signe ne seroit relative qu'à la manière d'être des variables x, y, p, q entre elles; il n'en faudroit pas moins prendre $(A B' - A' B) dp dq$, positivement. Quant à la quantité P , elle peut varier dans son signe, puisqu'il peut y avoir des parties de l'intégrale à soustraire des autres parties, par exemple, des attractions qui agissent en sens contraire & qui doivent être retranchées les unes des autres.

On peut étendre toutes ces transformations à un plus grand nombre de variables. Considérons, par exemple,

l'intégrale triple $\int P dx dy dz$.

Si on ne veut changer qu'une ou deux variables, on aura les mêmes formules que précédemment; mais si on veut changer toutes les trois à la fois, on s'y prendra ainsi.

Soient prises à volonté trois nouvelles variables p, q, r , & trois équations qui déterminent x, y, z , en p, q, r ; soit, en vertu de ces équations,

$$dx = A dp + B dq + C dr$$

$$dy = A' dp + B' dq + C' dr$$

$$dz = A'' dp + B'' dq + C'' dr.$$

La valeur de dx dans l'élément $P dx dy dz$, supposant toujours y & z constans, on fera

$$0 = A' dp + B' dq + C' dr$$

$$0 = A'' dp + B'' dq + C'' dr;$$

d'où résulte

$$dq = \frac{A' C' - A' C''}{B' C'' - B'' C'} dp.$$

$$dr = \frac{A' B'' - A'' B'}{B' C'' - B'' C'} dp.$$

Substituant ces valeurs dans celle de dx , on aura

$$dx = \frac{A(B' C'' - B'' C') + B(A' C'' - A' C') + C(A' B'' - A'' B')}{B' C'' - B'' C'} dp.$$

Je représente cette valeur par $T dp$; ainsi à la place de $dx dy dz$, on aura $T dp dy dz$. Dans ce nouvel élément dy suppose p & z constans; ainsi on a

$$dy = B' dq + C' dr$$

$$0 = B'' dq + C'' dr;$$

donc $dy = \frac{B' C'' - B'' C'}{C''} dq$, & l'élément devient

$$T \left(\frac{B' C'' - B'' C'}{C''} \right) dp dq dz. \text{ Enfin le } dz \text{ de cet}$$

élément supposant p & q constans, on a $dz = C'' dr$. Donc enfin l'intégrale $\int P dx dy dz$ devient par le

changement des trois variables, $\int (B' C'' - B'' C')$
 $TP dp dq dr$; ou en remettant la valeur de T ,
 $\int P dp dq dr [A(B' C'' - B'' C') + B(A'' C' - A' C'')]$
 $+ C(A' B'' - A'' B')$.

Ce résultat est entièrement conforme à celui qu'on trouve dans les Mémoires de Berlin, année 1773, p. 125; ainsi le principe qui sert de base à ces transformations appartient à M. de la Grange; mais il ne paroît pas que cet illustre géomètre ait songé aux applications qu'on en peut faire.

Formules à intégrer pour déterminer l'attraction d'un sphéroïde elliptique sur un point extérieur.

SOIENT f, g, h les trois coordonnées du point attiré, dM une molécule quelconque du sphéroïde, r sa distance au point attiré, q l'angle que fait le rayon r avec la coordonnée h , p l'angle que fait dans le plan de f & g , la projection du rayon r avec la coordonnée g . Au moyen des trois variables, p, q, r , la molécule dM que nous représentons par son volume, sera $r^2 dr dp dq \sin. q$, son attraction $dr dp dq \sin. q$, & la partie de cette attraction dirigée parallèlement à la coordonnée f , sera $dr dp dq \sin.^2 q \sin. p$. Il est inutile de considérer les attractions dans le sens des deux autres coordonnées, puisqu'une simple permutation de lettres fera connoître ces attractions, quand on connoîtra celle qui est dirigée suivant la coordonnée f .

La différentielle $dr dp dq \sin. p \sin.^2 q$, s'intègre facilement par rapport à r : soit R' la valeur de ce rayon à l'entrée du sphéroïde, R'' sa valeur à sa sortie, en sorte que la partie comprise dans le sphéroïde soit $R'' - R'$, la formule de l'attraction sera réduite à cette intégrale double,

$$\int (R'' - R') dp dq \sin. p \sin.^2 q,$$

formule où il faut substituer pour R'' — R' sa valeur tirée de la nature du sphéroïde elliptique.

Prenons pour origine des coordonnées f, g, h , le centre même du sphéroïde ; appelons a, b, c ses trois demi-axes que nous supposérons parallèles aux coordonnées f, g, h ; & soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface parallèles à ces axes ; l'équation de la surface du sphéroïde est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Mais si on appelle R le rayon vecteur qui convient à un point quelconque de la surface, on trouve

$$x = f - R \sin. p \sin. q$$

$$y = g - R \cos. p \sin. q$$

$$z = h - R \cos. q.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la surface, & faisant, pour abréger,

$$\Delta = \sin.^2 q \sin.^2 p + \frac{a^2}{b^2} \sin.^2 q \cos.^2 p + \frac{a^2}{c^2} \cos.^2 q$$

$$\epsilon = f \sin. q \sin. p + \frac{a^2}{b^2} g \sin. q \cos. p + \frac{a^2}{c^2} h \cos. q$$

$$\zeta = f^2 + \frac{a^2}{b^2} g^2 + \frac{a^2}{c^2} h^2 - \epsilon^2,$$

on aura

$$\Delta R^2 - 2 \epsilon R + \zeta = 0.$$

Les deux racines de cette équation ont été appelées ci-dessus R' & R'' ; ainsi on aura

$$R' = \frac{\epsilon - \sqrt{(\epsilon^2 - \Delta \zeta)}}{\Delta}, \quad R'' = \frac{\epsilon + \sqrt{(\epsilon^2 - \Delta \zeta)}}{\Delta};$$

donc $R'' - R' = \frac{2 \sqrt{(\epsilon^2 - \Delta \zeta)}}{\Delta}$, & la valeur de l'attraction sera

$$\int \frac{2 p d q \sin. p \sin.^2 q}{\Delta} \sqrt{(\epsilon^2 - \Delta \zeta)}.$$

Cette intégrale doit être prise pour toutes les valeurs possibles de p & de q ; elle aura pour limites les points où le rayon R devient une tangente du sphéroïde, de sorte qu'on a pour déterminer ces limites l'équation $R'' - R' = 0$, ou $\epsilon^2 - \Delta \zeta = 0$.

Cette formule, dans l'état où elle est, n'est point intégrable par les moyens ordinaires; mais si on avoit $h = 0$, c'est-à-dire, si le point attiré étoit situé dans le plan des deux axes principaux a & b , alors l'intégration réussiroit immédiatement par rapport à p . Ce cas est d'autant plus intéressant à développer, qu'il avoit échappé à tous ceux qui se sont occupés de cette matière, & que la théorie de l'attraction des sphéroïdes de révolution s'y trouve comprise dans toute sa généralité.

Développement du cas où le point attiré se trouve dans le plan de deux axes principaux.

APPELANT a & b les deux demi-axes dans le plan desquels se trouve le point attiré, on aura $h = 0$. Soit, pour

abrégier, $\frac{a^2}{b^2} = m$, $\frac{a^2}{c^2} = n$, ce qui donne

$$\Delta = \sin.^2 q \sin.^2 p + m \sin.^2 q \cos.^2 p + n \cos.^2 q$$

$$\epsilon = \sin. q (f \sin. p + m g \cos. p);$$

$$\zeta = f^2 + m g^2 - a^2,$$

$$\begin{aligned} \text{on aura } \epsilon^2 - \Delta \zeta = & \sin.^2 q \sin.^2 p (f^2 - \zeta - n \zeta \cot.^2 q) \\ & + 2 \sin.^2 q \sin. p \cos. p \cdot m f g \\ & + \sin.^2 q \cos.^2 p (m^2 g^2 - m \zeta - n \zeta \cot.^2 q). \end{aligned}$$

On fera disparaître le second terme de cette expression, en prenant $p = \alpha + \theta$, & déterminant l'angle constant α par la formule

$$\text{tang. } 2 \alpha = \frac{2 f g}{a^2 - b^2 - f^2 + g^2}.$$

Appelant ensuite $\pm \mu$ la limite de θ , on aura

$$\sin.^2 \mu = \cos.^2 \alpha + \frac{b^2 - g^2}{fg} \sin \alpha \cos. \alpha - \frac{n \zeta \sin. \alpha \cos. \alpha}{m f g} \cot.^2 q,$$

ce qui donnera

$$\epsilon^2 - \delta \zeta = \frac{m f g}{\sin. \alpha \cos. \alpha} \sin.^2 q (\sin.^2 \mu - \sin.^2 \theta).$$

Substituant $\alpha + \theta$ à la place de p dans la valeur de δ , & faisant, pour abrégér,

$$f' = \sin.^2 \alpha + m \cos.^2 \alpha + n \cot.^2 q$$

$$g' = (1 - m) \cdot 2 \sin. \alpha \cos. \alpha$$

$$h' = \cos.^2 \alpha + m \sin.^2 \alpha + n \cot.^2 q,$$

on aura $\delta = \sin.^2 q (f' \cos.^2 \theta + g' \cos. \theta \sin. \theta + h' \sin.^2 \theta)$; donc enfin la formule différentielle de l'attraction deviendra

$$2 d q \sin. q \sqrt{\left(\frac{m f g}{\sin. \alpha \cos. \alpha} \right)} \cdot \frac{d \theta \sin. (\alpha + \theta) \sqrt{(\sin.^2 \mu - \sin.^2 \theta)}}{f' \cos.^2 \theta + g' \cos. \theta \sin. \theta + h' \sin.^2 \theta}.$$

Pour faire disparaître le radical, soit

$$\text{tang. } \mu = v, \text{ tang. } \theta = v \sin. \varphi;$$

nous aurons cette nouvelle formule

$$\frac{2 \sin.^2 \mu}{\cos. \mu} d q \sin. q \sqrt{\left(\frac{m f g}{\sin. \alpha \cos. \alpha} \right)} \cdot \frac{d \varphi \cos.^2 \varphi (\sin. \alpha + v \cos. \alpha \sin. \varphi)}{(1 + v^2 \sin.^2 \varphi) (f' + g' v \sin. \varphi + h' v^2 \sin.^2 \varphi)},$$

laquelle doit être intégrée depuis $\varphi = 0^\circ$, jusqu'à $\varphi = 90^\circ$, car ces valeurs ont lieu lorsque $\epsilon^2 - \delta \zeta = 0$.

Pour procéder à l'intégration, nous ferons suivant les méthodes ordinaires

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \sin.^2 \varphi) (\sin. \alpha + v \cos. \alpha \sin. \varphi)}{(1 + v^2 \sin.^2 \varphi) (f' + g' v \sin. \varphi + h' v^2 \sin.^2 \varphi)} \\ &= \frac{A + B v \sin. \varphi}{1 + v^2 \sin.^2 \varphi} + \frac{C + D v \sin. \varphi}{f' + g' v \sin. \varphi + h' v^2 \sin.^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Nous aurons d'abord

$$A = \frac{1 + v^2}{v^2} \cdot \frac{\sin. \alpha}{1 - m}, \quad B = \frac{1 + v^2}{v^2} \cdot \frac{\cos. \alpha}{m - 1}.$$

Quant

Quant aux valeurs de C & D , on les déduira commodément de cette équation qui se trouve en faisant $\sin. \varphi = \pm 1$

$$(C \pm Dv)(1 + v^2) + (A \pm Bv)(f' \pm g'v + h'v^2) = 0.$$

Maintenant l'intégrale de la partie $\frac{A + Bv \sin. \varphi}{1 + v^2 \sin.^2 \varphi} d\varphi$, prise depuis $\varphi = -90^\circ$, jusqu'à $\varphi = 90^\circ$, est évidemment la même que celle de $\frac{2 A d\varphi}{1 + v^2 \sin.^2 \varphi}$ prise depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 90^\circ$. Celle-ci se trouve $= \frac{A\pi}{\sqrt{(1 + v^2)}}$, en appelant π la demi-circonférence dont le rayon est 1. Ainsi en substituant la valeur de A & observant que $v = \text{tang. } \mu$, on aura pour la première partie de notre intégrale

$$\frac{\pi \sin. \alpha}{1 - m} \cdot \frac{\cos. \mu}{\sin.^2 \mu}.$$

La seconde partie

$$\frac{C + Dv \sin. \varphi}{f' + g'v \sin. \varphi + h'v^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi,$$

étant intégrée à l'ordinaire depuis $\varphi = -90^\circ$, jusqu'à $\varphi = +90^\circ$, donne pour résultat,

$$\frac{C(f' + h'v^2 + E) - Dg'v^2}{E\sqrt{[(E + f')^2 - h'^2v^2]}} \cdot \pi,$$

la quantité E étant mise pour $\sqrt{[(f' + h'v^2)^2 - g'^2v^2]}$. Il ne s'agit plus que de faire les substitutions de manière à éviter la prolixité, ce qui exige que nous entrions dans quelques détails.

Rappelons nous qu'aux limites de l'intégrale on a $\epsilon^2 - \Delta \zeta = 0$, ou $\Delta = \frac{\epsilon^2}{\zeta}$; mais en substituant $\alpha + \theta$, à la place de p dans la valeur de ϵ , & faisant, pour abrégér,

$$a' = f \sin. \alpha + m g \cos. \alpha$$

$$b' = f \cos. \alpha - m g \sin. \alpha,$$

on a $e = (a' \cos. \theta + b' \sin. \theta) \sin. q$. Aux limites de l'intégrale θ devient $\pm \mu$, & on a en même temps $\Delta = \sin.^2 q (f' \cos.^2 \mu \pm g' \cos. \mu \sin. \mu - h' \sin.^2 \mu)$; donc à cause de $\tan g. \mu = v$, on aura

$$\begin{aligned} f' + g' v + h' v^2 &= \frac{(a' + b' v)^2}{\zeta} \\ f' - g' v + h' v^2 &= \frac{(a' - b' v)^2}{\zeta}. \end{aligned}$$

Soit, pour abrégér,

$$P = \frac{a' + b' v}{\sqrt{\zeta}}, \quad Q = \frac{a' - b' v}{\sqrt{\zeta}},$$

on aura

$$\begin{aligned} f' + h' v^2 &= \frac{a' a' + b' b' v^2}{\zeta} = \frac{P^2 + Q^2}{2} \\ g' v &= \frac{2 a' b' v}{\zeta} = \frac{P^2 - Q^2}{2} \\ E &= \frac{a' a' - b' b' v^2}{\zeta} = P Q \\ f' + h' v^2 + E &= \frac{(P + Q)^2}{2}; \end{aligned}$$

donc la quantité $\frac{C(f' + h' v^2 + E) - D g' v^2}{E \sqrt{[(E + f')^2 - h' v^2]}} \cdot \pi$ se change d'abord en celle-ci

$$\frac{C(P + Q) - D \sqrt{P - Q}}{P Q \sqrt{(2E + 2f' - 2h' v^2)}} \cdot \pi$$

Mais on a

$$\begin{aligned} C + D v &= -(A + B v) \cdot \frac{P^2}{1 + v^2} = \frac{P^2 (\sin. \alpha - v \cos. \alpha)}{(m-1) v^2} \\ C - D v &= -(A - B v) \cdot \frac{Q^2}{1 + v^2} = \frac{Q^2 (\sin. \alpha + v \cos. \alpha)}{(m-1) v^2}; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que la quantité à réduire devient

$$\frac{\pi}{(m-1) v^2} \cdot \frac{P (\sin. \alpha - v \cos. \alpha) + Q (\sin. \alpha + v \cos. \alpha)}{\sqrt{(2E + 2f' - 2h' v^2)}}.$$

Remettant les valeurs de P & Q , on a le numérateur

$$P (\sin. \alpha - v \cos. \alpha) + Q (\sin. \alpha + v \cos. \alpha)$$

$$= \frac{2 a' \sin. \alpha - 2 b' v^2 \cos. \alpha}{\zeta}.$$

Reste à réduire le dénominateur : or par les valeurs primitives de f' & h' , on a $h' - f' = (1 - m) \cos. 2 \alpha = g' \cot. 2 \alpha$; combinant cette valeur avec celles de $f' + h' v^2$ & g' , on en tirera aisément

$$\sqrt{2 E + 2 f' - 2 h' v^2} = 2 \sqrt{\left[\frac{(a' + b' v^2 \tan. \alpha)(a' - b' v^2 \cot. \alpha)}{\zeta (1 + v^2)} \right]};$$

nous aurons donc pour la seconde partie de notre intégrale

$$\frac{\pi \cos. \mu \sqrt{(\sin. \alpha \cos. \alpha)}}{(m - 1) \sin.^2 \mu} \cdot \sqrt{\left[\frac{a' \sin. \alpha \cos.^2 \mu - b' \cos. \alpha \sin.^2 \mu}{a' \cos. \alpha \cos.^2 \mu + b' \sin. \alpha \sin.^2 \mu} \right]}.$$

Il reste à substituer dans le radical les valeurs de a' , b' , & $\sin.^2 \mu$, savoir,

$$a' = f \sin. \alpha + m g \cos. \alpha$$

$$b' = f \cos. \alpha - m g \sin. \alpha$$

$$\sin.^2 \mu = \cos.^2 \alpha + \frac{b^2 - g^2}{fg} \sin. \alpha \cos. \alpha - \frac{n \zeta \sin. \alpha \cos. \alpha}{m fg} \cot.^2 \alpha,$$

c'est ce qui n'a plus de difficulté, pourvu qu'on fasse attention aux valeurs de ζ & $\tan. 2 \alpha$. Le résultat sera

$$\frac{\pi \cos. \mu}{(m - 1) \sin.^2 \mu} \sqrt{\left(\frac{f \sin. \alpha \cos. \alpha}{g} \right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{n}{m} \cot.^2 \alpha}{1 + n \cot.^2 \alpha} \right)};$$

donc en réunissant les deux parties de l'intégrale, l'attraction du sphéroïde parallèlement à l'axe a , sera réduite à cette intégrale simple,

$$\frac{2 \pi f \sqrt{(m)}}{m - 1} \cdot \int d q \sin. q \left[\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{n}{m} \cot.^2 q \right)}}{\sqrt{(1 + n \cot.^2 q)}} - \sqrt{\left(\frac{g \sin. \alpha}{f \cos. \alpha} \right)} \right].$$

Remettons à la place de m & n , leurs valeurs $\frac{a^2}{b^2}$ & $\frac{a^2}{c^2}$,

& introduisons la masse M du sphéroïde à la place de son

volume $\frac{4 \pi a b c}{3}$; appelons $\pm \cos. \mathcal{C}$ la limite de $\cos. q$,

& faisons $\cos. q = x \cos. \mathcal{C}$, $\frac{c}{\cos. \mathcal{C}} = K$; l'attraction du sphéroïde, suivant la direction de l'axe a sera égale à l'intégrale suivante, prise depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$

$$-\frac{3 Af}{(a^2 - b^2) K} \int dx \left[\frac{\sqrt{[K^2 + (b^2 - c^2)x^2]}}{\sqrt{[K^2 + (a^2 - c^2)x^2]}} - \sqrt{\left(-\frac{g \sin. a}{f \cos. a}\right)} \right].$$

Quant à la limite $\cos. \mathcal{C}$, ce n'est autre chose que la valeur de $\cos. q$, qui répond à $\sin. \mu = 0$, & on trouve après les réductions convenables,

$$\frac{c^2}{\cos.^2 \mathcal{C}} = K^2 = f^2 + c^2 - a^2 + fg \cot. a.$$

Maintenant il est évident que la valeur de $\tan. 2 \alpha$, celle de K , & enfin celle de l'attraction elle-même, ne contiennent d'autre fonction de a , b , c , que les différences $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, d'où il suit qu'étant supposés deux sphéroïdes, dont les trois sections principales soient décrites des mêmes foyers, les attractions que ces deux corps exercent sur un même point situé dans le plan d'une section principale, auront la même direction, & seront entr'elles comme leurs masses. Car cette proposition a lieu immédiatement par rapport à l'attraction partielle dirigée suivant l'axe a ; il en est de même de celle qui agit suivant l'axe b ; la troisième est nulle, donc l'attraction totale a la même direction dans les deux sphéroïdes, & suit la raison de leurs masses.

On peut donner au résultat final une forme un peu plus simple que la précédente. En effet, si on a la différentielle

$$dx \sqrt{\left(\frac{1 + m x^2}{1 + n x^2}\right)}$$

à intégrer depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$, & qu'on fasse

$$\frac{x^2}{1 + p(1 - x^2)} = y^2,$$

qu'on prenne ensuite $p = \frac{-n}{1+n}$, $q = \frac{n}{1+n}$, on aura la transformée

$$V(1+p) \cdot \frac{dy(1+qy^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+py^2)^{\frac{1}{2}}}$$

à intégrer pareillement depuis $y = 0$, jusqu'à $y = 1$. Celle-ci étant intégrée par parties, on en conclura

$$f dx V\left(\frac{1+mx^2}{1+nx^2}\right) = V(1+q)$$

$$- q V(1+p) \cdot \int \frac{y^2 dy}{V(1+py^2) \cdot V(1+qy^2)}.$$

L'application de cette formule donne pour la valeur de l'attraction réduite à la forme la plus simple,

$$\frac{3Mf}{H} \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{[H^2 + (c^2 - a^2)y^2]} \cdot \sqrt{[H^2 + (b^2 - a^2)y^2]}};$$

cette intégrale étant prise depuis $y = 0$, jusqu'à $y = 1$, & la quantité H^2 n'étant autre chose que $K^2 + a^2 - c^2$; mais en éliminant tout-à-fait l'angle α de la valeur de K , on aura directement

$$H^2 = \frac{f^2 + g^2 + a^2 - b^2 + \sqrt{[(f^2 + g^2)^2 - 2(f^2 - g^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2]}}{2};$$

l'attraction parallèlement à l'autre axe b , se trouvera en permutant les lettres a & b , ainsi que f & g , de sorte qu'en faisant

$$L^2 = \frac{f^2 + g^2 + b^2 - a^2 + \sqrt{[(f^2 + g^2)^2 - 2(f^2 - g^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2]}}{2};$$

cette attraction sera

$$\frac{3Mg}{L} \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{[L^2 + (c^2 - b^2)y^2]} \cdot \sqrt{[L^2 + (a^2 - b^2)y^2]}};$$

& on voit que $L^2 = H^2 + b^2 - a^2$.

Il est inutile d'ajouter que la troisième attraction parallèle à l'axe c est nulle; c'est une suite de l'hypothèse, que le point attiré est situé dans le plan des deux axes a & b .

Ces formules sont susceptibles d'une intégration absolue dans le cas du sphéroïde de révolution. Alors on aura $a = c$, & les résultats s'accorderont parfaitement avec ceux que j'ai trouvés autrefois, par une méthode toute différente. (*Voy. Sav. Étr. tom. X, pag. 425*).

Intégration générale de la formule de l'attraction.

POUR abréger un peu les expressions, nous ferons

$$\frac{a^2}{b^2} = m; \quad \frac{a^2}{c^2} = n, \quad m g = k, \quad n h = l,$$

$$\cot. p = x, \quad \cot. q = y \sin. p;$$

la formule de l'attraction dans le sens de l'axe a deviendra

$$X = \int \frac{2 dx dy \sqrt{[(f + kx + ly)^2 - \zeta(1 + mx^2 + ny^2)]}}{(1 + mx^2 + ny^2)(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette formule ne peut être intégrée par rapport à x ou à y , qu'à l'aide de transcendentes qui ne sont point encore introduites dans le calcul. L'usage de ces transcendentes ne seroit peut-être pas aussi impraticable qu'il paroît au premier coup-d'œil; mais jusqu'à ce que cette possibilité soit manifestée d'une manière bien précise, nous ne pouvons mieux faire que d'employer une transformation qui rende l'une des deux intégrations possibles par les moyens ordinaires, c'est-à-dire, par les arcs de cercle & les logarithmes: or nous savons déjà qu'on y parvient aisément en faisant

$$\sqrt{\left[\frac{(f + kx + ly)^2 - \zeta(1 + mx^2 + ny^2)}{1 + x^2 + y^2} \right]} = \omega.$$

Cette équation étant ordonnée par rapport à y , donne

$$(\omega^2 + n\zeta - l^2)y^2 - 2l(f + kx)y + \omega^2 + \zeta - (\omega^2 + m\zeta)x^2 - (f + kx)^2 = 0..(a').$$

Si on la représente par $Fy^2 - 2Gy + H = 0$,

& qu'on la différencie en supposant x constante, on aura

$$(Fy - G)dy = \omega d\omega(1 + x^2 + y^2).$$

Ainsi, en substituant la valeur de $d y$, & mettant $\sqrt{(G^2 - FH)}$ à la place de $F y - G$, on aura la transformée

$$X = \int \frac{2 \omega^2 d \omega d x}{(\gamma^2 + m x^2 + n y^2) \sqrt{(G^2 - FH)}},$$

où il ne reste plus qu'à éliminer y dans le terme $n y^2$.
Soit, pour abréger,

$$\begin{aligned}\lambda &= \omega^2 + \zeta \\ \mu &= \omega^2 + m \zeta \\ \nu &= \omega^2 + n \zeta,\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}F &= \nu - l^2 \\ G &= l (f + k x) \\ H &= \lambda + \mu x^2 - (f + k x)^2;\end{aligned}$$

& pour exprimer $G^2 - FH$, soit

$$\begin{aligned}A &= \mu \nu - \mu l^2 - \nu k^2 \\ B &= f k \nu \\ C &= \lambda \nu - \lambda l^2 - \nu f^2,\end{aligned}$$

nous aurons

$$\sqrt{(G^2 - FH)} = \sqrt{(-Ax^2 + 2Bx - C)}.$$

Maintenant pour rendre cette quantité rationnelle, faisons

$$B^2 - AC = F(f^2 \mu \nu + k^2 \lambda \nu + l^2 \lambda \mu - \lambda \mu \nu) = D^2,$$

$$A x - B = D \cos. \varphi;$$

nous aurons

$$\sqrt{(G^2 - FH)} = \frac{D}{\sqrt{A}} \sin. \varphi;$$

de sorte que les valeurs de x & y s'exprimeront ainsi par le moyen de l'angle φ

$$x = \frac{B}{A} + \frac{D}{A} \cos. \varphi$$

$$y = \frac{f l \mu}{A} + \frac{k l D}{A F} \cos. \varphi + \frac{D}{F \sqrt{A}} \sin. \varphi.$$

On aura en même temps $\frac{dx}{\sqrt{(G^2 - FH)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(A)}}$.

Par toutes ces substitutions, la formule de l'attraction deviendra

$$X = \int \frac{2 \omega^2 d\omega \cdot A^{\frac{1}{2}} d\varphi}{A^2 + m(B + D \cos. \varphi)^2 + n(f^2 \mu + \frac{k l D}{F} \cos. \varphi + \frac{D \sqrt{(A)}}{F} \sin. \varphi)^2}.$$

Avant d'aller plus loin, observons que la transformation que nous venons de faire, suppose A positif, c'est-à-dire, suppose que pour toutes les valeurs de ω , l'équation (a') appartient à une ellipse. Or en développant la valeur de A , on a

$$A = \omega^4 + (n\zeta - l^2)\omega^2 + mn\zeta^2 - ml^2\zeta - nk^2\zeta + (m\zeta - k^2)\omega^2.$$

$$\text{Mais à cause de } g = \frac{k}{m}, h = \frac{l}{n},$$

$$\text{on a } \zeta = f^2 + \frac{k^2}{m} + \frac{l^2}{n} - a^2;$$

$$\text{donc } mn\zeta^2 - ml^2\zeta - nk^2\zeta = mn\zeta(f^2 - a^2).$$

Donc pour que la valeur de A soit positive, même lorsque $\omega = 0$, il faut qu'on ait $f > a$, & alors elle sera positive à plus forte raison pour toutes les valeurs de ω .

Au reste, nous pouvons poursuivre le calcul dans la supposition de $f > a$, & le résultat total sera indépendant de cette supposition; car il ne doit exister qu'une formule analytique qui représente la valeur de l'attraction, & cette formule ne suppose d'autre condition, sinon que le point attiré est hors du sphéroïde ou sur sa surface, c'est-à-dire, que ζ est positif ou zéro. Donc la formule trouvée pour le cas fictif de $f > a$, ne doit différer en rien de la formule générale. C'est une remarque qu'on peut appliquer à beaucoup d'autres questions d'analyse; d'où il résulte que les formules analytiques sont souvent indépendantes des hypothèses qu'on a faites pour y parvenir.

Il ne

Il ne sera pas inutile dans la question actuelle, de se rendre compte plus particulièrement du cas où A peut devenir négatif.

J'observe que l'équation (a'), où l'on regarde ω comme constant, n'est autre chose (en multipliant les x & y par une même constante) que l'équation de la courbe tracée sur le plan des axes b & c , ou sur un plan parallèle, par le rayon mené du point attiré, suivant toutes les positions où ω conserve une même valeur quelconque. Lorsque $\omega = 0$, le rayon est par-tout tangent au sphéroïde; lorsque ω est à son *maximum*, ce qui arrive lorsqu'on a $D = 0$, ou

$$f^2 \mu \nu + k^2 \lambda \nu + l^2 \lambda \mu - \lambda \mu \nu = 0,$$

le rayon n'a absolument qu'une position, & la courbe représentée par l'équation (a') se réduit à un point.

Or, si on a $f > a$, on se représente aisément toutes les tangentes au sphéroïde partant du point attiré, & formant un cône à base elliptique; & on voit que l'intersection de ce cône, par le plan des axes b & c , est nécessairement une ellipse. A plus forte raison en est-ce une, lorsque le rayon pénètre dans le sphéroïde pour passer par toutes les positions où ω a une valeur constante au-dessus de zéro.

Mais si on a $f < a$, il est également facile de voir que l'intersection du cône tangent au sphéroïde avec le plan des axes b & c , sera une hyperbole. A mesure que ω augmentera, le cône où ω est constant diminuera d'amplitude, & son intersection avec le plan des axes b & c passera par tous les degrés, depuis l'hyperbole jusqu'à l'ellipse, & finira par être un point, lorsque ω est à son *maximum*.

On voit maintenant quel sera le procédé de l'intégration par rapport aux nouvelles variables ϕ & ω . Nous imaginons que le sphéroïde soit divisé en une infinité de couches ou enveloppes, par des surfaces coniques qui diminuent

successivement d'amplitude, depuis le cône tangent où ω est zéro, jusqu'à la ligne droite, ou cône infiniment mince, qui répond au *maximum* de ω . L'intégrale étant prise depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 360^\circ$, donnera l'attraction d'une de ces enveloppes coniques; il faudra ensuite intégrer le résultat depuis $\omega = 0$, jusqu'à $\omega = \text{maximum}$.

Il s'agit d'abord d'intégrer la quantité

$$\frac{A^{\frac{1}{2}} d\varphi}{A^2 + m(B + D \cos. \varphi)^2 + n \left(fl \mu + \frac{k l D}{F} \cos. \varphi + \frac{D \sqrt{A}}{F} \sin. \varphi \right)^2} \dots (B')$$

depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 360^\circ$. Le moyen qui paroît le plus simple pour cela, est de faire $\text{tang } \frac{1}{2} \varphi = z$, ce qui donne $\sin. \varphi = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos. \varphi = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\varphi = \frac{2 dz}{1+z^2}$; alors cette différentielle deviendra de la forme

$$\frac{2 A^{\frac{1}{2}} dz (1+z^2)}{A' + B' z + C' z^2 + D' z^3 + E' z^4},$$

& il faudra l'intégrer pour toutes les valeurs de z , depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \text{tang. } 180^\circ$.

Il est inévitable pour cette intégration, de chercher les deux facteurs réels du dénominateur; mais comme les coefficients A' , B' , &c. sont déjà fort composés, si on entreprenoit cette recherche par les moyens ordinaires, on pourroit désespérer d'y réussir, à cause de l'extrême complication de l'équation du troisième degré dont ces facteurs dépendent. En effet, pour parvenir au théorème que nous avons en vue, il faut que le résultat de l'intégration ne soit pas simplement indiqué; il doit être entièrement développé, & réduit à la forme la plus simple.

Pour faciliter un peu la recherche des facteurs du dénominateur, j'observe qu'à la place de φ on peut mettre $\varphi + \epsilon$, & déterminer ϵ comme on voudra, sans rien changer à

l'intégrale. Après avoir fait la substitution, je prends
 $\text{tang. } \epsilon = \frac{l\sqrt{A}}{k v}$, & faisant, pour abrégér,

$$A = R^2 = \mu v - k^2 v - l^2 \mu$$

$$Q^2 = f^2 \mu v + k^2 \lambda v + l^2 \lambda \mu - \lambda \mu v$$

$$P^2 = k^2 v + l^2 \mu,$$

la différentielle (b') devient

$$R^2 d\varphi$$

$$R^4 + m \left(f k v + \frac{Q}{P} k v \cos. \varphi - \frac{Q}{P} l R \sin. \varphi \right)^2 + n \left(f l \mu + \frac{Q}{P} l \mu \cos. \varphi + \frac{Q}{P} k R \sin. \varphi \right)^2.$$

Cette expression ne paroît pas fort simplifiée; cependant
 si on fait

$$f + \frac{Q}{P} \cos. \varphi = x; \quad \frac{Q}{P} \sin. \varphi = y,$$

le dénominateur devient

$$R^4 + m (k v x - l R y)^2 + n (l \mu x + k R y)^2.$$

Supposons maintenant que cette quantité

$$= T (1 + p x + q y) (1 + p' x - q y);$$

puisque les valeurs de x & y donnent l'équation

$$y^2 + x^2 - 2 f x = \frac{Q^2}{P^2} - f^2 = (f^2 - \lambda) \frac{R^2}{P^2},$$

on pourra, en prenant un coëfficient indéterminé H ,
 regarder comme identique l'équation

$$R^4 + m (k v x - l R y)^2 + n (l \mu x + k R y)^2$$

$$+ H (f^2 - \lambda) \frac{R^2}{P^2} + 2 H f x - H x^2 - H y^2$$

$$= T (1 + p x + q y) (1 + p' x - q y);$$

d'où l'on tirera

$$T = R^4 + (f^2 - \lambda) \frac{R^2 H}{P^2}$$

$$T (p + p') = 2 f H$$

$$T q (p' - p) = - 2 k l R^2 (m v - n \mu)$$

$$T p p' = m k^2 v^2 + n l^2 \mu^2 - H$$

$$T q^2 = H - (m l^2 + n k^2) R^2.$$

Soit $H = \frac{P^2 R^2}{Z}$, ensuite

$$Z - \lambda = L$$

$$m Z - \mu = M$$

$$n Z - v = N,$$

on trouvera pour déterminer Z , cette équation d'une forme très-simple,

$$L M N + f^2 M N + k^2 L N + l^2 L M = 0 \dots (d');$$

c'est l'équation auxiliaire du troisième degré, de laquelle dépend la décomposition de notre dénominateur. La valeur de Z étant donc censée connue, ainsi que celles de L, M, N , les coefficients des facteurs seront

$$T = \frac{R^2}{Z} (f^2 + L)$$

$$p = \frac{f P^2}{R^2 (f^2 + L)} - \frac{k l (M v - N \mu)}{R^2 (f^2 + L)} \sqrt{\left(\frac{L}{M N}\right)}$$

$$p' = \frac{f P^2}{R^2 (f^2 + L)} + \frac{k l (M v - N \mu)}{R^2 (f^2 + L)} \sqrt{\left(\frac{L}{M N}\right)}$$

$$q = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{M N}{L}\right)}.$$

Toutes ces quantités doivent être regardées comme réelles, car des trois valeurs que doit avoir $\frac{M N}{L}$ d'après l'équation (d') , il y en a certainement une positive; c'est une suite des propriétés générales des équations, mais on peut s'assurer dans le cas présent, qu'il existe en effet une racine de l'équation (d') , au moyen de laquelle $\frac{M N}{L}$ est positif: cette racine ou valeur de Z est comprise entre les deux plus petites des quantités $\lambda, \frac{\mu}{m}, \frac{v}{n}$.

Faisons, pour abrégér,

$$\frac{k l (M \nu - N \mu)}{(f^2 + L) \sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}} = S, \quad \frac{f P^2}{f^2 + L} = V$$

$R^2 + (S + V)f = E, \quad R^2 + (V - S)f = E';$
l'expression à intégrer deviendra

$$(f') \dots \frac{\frac{Z}{f^2 + L} \cdot R^3 d\varphi}{\left[E + (V + S) \frac{Q}{P} \cos \varphi - \frac{RQ}{P} \sin \varphi \sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)} \right] \left[E' + (V - S) \frac{Q}{P} \cos \varphi + \frac{RQ}{P} \sin \varphi \sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)} \right]}.$$

Soit $\text{tang. } \frac{1}{2} \varphi = z$, nous aurons la transformée

$$\frac{Z R^3}{f^2 + L} \cdot \frac{2 d z (1 + z z)}{(A + B z^2 - 2 C z) (A' + B' z^2 + 2 C z)} \dots (f'),$$

dans laquelle on a pris, pour abrégér,

$$A = R^2 + (V + S) \left(f + \frac{Q}{P} \right)$$

$$A' = R^2 + (V - S) \left(f + \frac{Q}{P} \right)$$

$$B = R^2 + (V + S) \left(f - \frac{Q}{P} \right)$$

$$B' = R^2 + (V - S) \left(f - \frac{Q}{P} \right)$$

$$C = \frac{RQ}{P} \sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}.$$

L'intégrale de la formule (f') doit être prise depuis $z = 0$; jusqu'à $z = 0$, en passant par $z = \infty$; on trouve qu'elle est composée de deux parties, l'une

$$= \frac{R^3 Z}{f^2 + L} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{(AB - C^2)}} \cdot \frac{2(B - A)(A'B - AB') + 4C^2(A + B + A' + B')}{(A'B - AB')^2 + 4C^2(A + A')(B + B')};$$

l'autre ne diffère de celle-ci que par le signe de $\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}$;

ainsi nous ne la rapporterons que dans le résultat final. La difficulté est maintenant de faire les substitutions, en évitant la prolixité autant qu'il est possible. Comme l'opération est

embarrassante, & que c'est sur-tout à la forme du résultat que sera dû le succès de ces recherches, j'en vais détailler les principales parties.

1.^o La quantité $AB - C^2$ aura d'abord pour facteur $\frac{R^2}{(f^2 + L)^2}$. Si dans l'autre facteur on élimine R, Q, P , au moyen de leurs valeurs en λ, μ, ν , qu'ensuite on élimine λ, μ, ν eux-mêmes, au moyen des valeurs

$$\lambda = Z - L$$

$$\mu = m Z - M$$

$$\nu = n Z - N,$$

& qu'enfin on fasse usage de l'équation auxiliaire (d') autant de fois qu'il paroîtra nécessaire pour simplifier les expressions, on aura pour résultat

$$\sqrt{(AB - C^2)} = \frac{RZ}{f^2 + L} \sqrt{\left\{ mn(f^2 + L)^2 - (f^2 + L)(Mn + mN) + (f^2 - L)(nk^2 + ml^2) - 2fkl(Mn - mN) \right\} V\left(\frac{L}{MN}\right)}$$

2.^o L'expression

$$\frac{2(B + A)(A'B - AB') + 4C^2(A + B + A' + B')}{(A'B - AB')^2 + 4C^2(A + A')(B + B')}$$

devient par une première substitution des valeurs de A, B , &c.

$$\frac{VS + SS + \frac{MN}{L}(R^2 + Vf)}{R^2 S^2 + \frac{MN}{L}(R^4 + 2R^2 Vf + V^2 f^2 - \frac{V^2 Q^2}{P^2})}$$

3.^o Le dénominateur de cette quantité traité de la même manière que $AB - C^2$, se réduit à

$$\frac{R^2 K^2 Z}{(f^2 + L)^2} \left[(L + f^2)(Mn + mN) + L(nk^2 + ml^2) + MN + Mll + Nkk \right],$$

4.° Son numérateur devient pareillement

$$\frac{-f^2 Z}{(f^2 + L)^2} [(L + f^2)(Mn + mN) + L(nk^2 + m^2) \\ + fkl(Mn - mN)\sqrt{\frac{L}{MN}}].$$

Rassemblant tous ces résultats & faisant, pour abrégér,

$$F = (L + f^2)(Mn + mN) + L(nk^2 + m^2) \\ + MN + M^2 + N^2$$

$$G = (L + f^2)(Mn + mN) + L(nk^2 + m^2) \\ + fkl(Mn - mN)\sqrt{\frac{L}{MN}}$$

$$H = mn(f^2 + L)^2 - (f^2 + L)(Mn + mN) \\ + (f^2 - L)(nk^2 + m^2) - 2fkl(Mn - mN)\sqrt{\frac{L}{MN}}$$

désignant de plus par G' & H' ce que deviennent G & H , lorsqu'on change le signe de $\sqrt{\frac{L}{MN}}$, on aura pour le

résultat de l'intégration par rapport à ϕ , ou pour l'attraction de chaque enveloppe conique, cette expression,

$$\frac{2\pi\omega^2 d\omega}{F} \left(\frac{G}{\sqrt{H}} + \frac{G'}{\sqrt{H'}} \right) \dots (g');$$

formule qu'il faudra intégrer depuis $\omega = 0$, jusqu'à $\omega = \text{maximum}$, pour avoir l'attraction totale du sphéroïde dans la direction de l'axe a .

L'expression (g') seroit d'une extrême complication s'il falloit y substituer les valeurs de L , M , N en ω , tirées de l'équation auxiliaire (d') ; mais il suffit d'exprimer L , M , N & ω en fonctions d'une nouvelle indéterminée, & c'est ce qui peut se faire d'une manière très-simple. En effet, soit

$$L = \frac{\theta}{a^2 c}, \quad M = -\frac{\theta}{c^2}, \quad N = -\frac{\theta}{a^2};$$

l'équation auxiliaire (d') donnera

$$\theta = l^2 a + k^2 c - f^2 a c.$$

Ainsi L , M , N sont déjà exprimées par le moyen de α & ζ ; mais il y a de plus une relation fort simple entre α & ζ ; car au moyen des valeurs de L , M , N , on trouve

$$\begin{aligned} m L - M &= \mu - m \lambda = (1 - m) \omega^2 \\ n L - N &= \nu - n \lambda = (1 - n) \omega^2; \end{aligned}$$

donc

$$\omega^2 = \frac{\theta (m + \alpha)}{(1 - m) \alpha \zeta} = \frac{\theta (n + \zeta)}{(1 - n) \alpha \zeta}.$$

Prenant une nouvelle indéterminée ψ , on aura

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - m) \psi - m \\ \zeta &= (1 - n) \psi - n \\ \omega^2 &= \frac{\theta \psi}{\alpha \zeta}. \end{aligned}$$

On voit donc que ω^2 , L , M , N s'expriment rationnellement & d'une manière fort simple au moyen de la variable ψ :

on en déduit $\frac{2 \omega d \omega}{F} = \frac{d \psi}{\theta}$, $\frac{L}{M N} = \frac{1}{\theta}$; de

forte que la quantité (g') ne contiendra plus que des radicaux du second degré.

Quoique la difficulté se trouve ainsi considérablement diminuée, elle n'est cependant pas réduite au point où elle doit être pour faire sortir du résultat le théorème que nous avons en vue. Sans doute qu'une substitution ultérieure réduiroit les choses à leur dernier état de simplicité; mais cette substitution ne se présente pas naturellement, & faute de l'apercevoir, il n'y auroit presque aucune conclusion à tirer de tant de calculs. Heureusement une considération particulière sur la forme de l'expression (g') , nous dispense d'attaquer de front cette difficulté algébrique, & va nous conduire au résultat d'une manière très-simple.

J'observe que dans la quantité $\frac{2 \pi \omega^2 d \omega}{F} \left(\frac{G}{\sqrt{H}} + \frac{G'}{\sqrt{H'}} \right)$
résultat

réultat de l'intégration , après avoir éliminé λ , μ , ν , il n'est resté aucun terme affecté de Z . Or on a

$$L = Z - \lambda = Z - \zeta - \omega^2$$

$$M = mZ - \mu = mZ - m\zeta - \omega^2$$

$$N = nZ - \nu = nZ - n\zeta - \omega^2.$$

Soit $Z - \zeta = Z'$, on aura

$$L = Z' - \omega^2$$

$$M = mZ' - \omega^2$$

$$N = nZ' - \omega^2;$$

donc la valeur de Z' trouvée par l'équation auxiliaire (*d'*), fera indépendante de ζ ; il en sera de même de L , M , N , c'est-à-dire, que ces quantités seront fonctions des constantes m , n , f , g , h , & de la variable ω , mais ne seront nullement affectées de ζ .

Donc l'expression $\frac{2\pi\omega^2 d\omega}{F} \left(\frac{G}{\sqrt{H}} + \frac{G'}{\sqrt{H'}} \right)$, qui représente l'attraction d'une enveloppe conique où ω a une valeur donnée, est indépendante de ζ : elle est la même pour tous les sphéroïdes semblables & semblablement situés.

En effet, dans ces sphéroïdes m & n demeureront constans; f , g , h , coordonnées du point attiré, le seront pareillement; ils ne différeront entr'eux que par la quantité ζ , qui n'entre point dans la valeur de l'attraction.

Cette conclusion peut s'étendre à toutes les valeurs de ω , & aux parties de l'attraction dirigées suivant les autres axes; d'où résulte ce théorème remarquable:

Si on imagine plusieurs sphéroïdes semblables, dont la densité soit la même & les axes situés dans la même direction, & que ces sphéroïdes agissent sur un même point extérieur, l'attraction du plus petit sphéroïde sera équivalente à celle d'une portion de chacun des autres, retranchée par la surface conique dans l'étendue de laquelle ω est égal au maximum de cette quantité dans le plus petit sphéroïde.

Mém. 1788.

P P P

En effet, chaque enveloppe conique où ω est le même, quoique dans différens sphéroïdes, exerce la même attraction sur le même point; donc l'attraction totale du petit sphéroïde sera égale à l'attraction de la portion de chacun des autres, comprise depuis $\omega = 0$, c'est-à-dire, depuis la surface conique tangente, jusqu'à la surface conique dans laquelle ω auroit la plus grande valeur qu'il peut avoir dans le plus petit sphéroïde. Cette proposition se vérifiera très-aisément dans le cas des sphères concentriques.

Nous avons déjà donné l'équation par laquelle on détermine le *maximum* de ω dans le sphéroïde donné; cette équation revient à celle-ci:

$$\left. \begin{aligned} & (\omega^2 + \zeta) (\omega^2 + m \zeta) (\omega^2 + n \zeta) \\ & - f^2 (\omega^2 + m \zeta) (\omega^2 + n \zeta) \\ & - m^2 g^2 (\omega^2 + \zeta) (\omega^2 + n \zeta) \\ & - n^2 h^2 (\omega^2 + \zeta) (\omega^2 + m \zeta) = 0. \end{aligned} \right\} (h')$$

D'ailleurs ω dans chaque sphéroïde représente la quantité $\sqrt{(\epsilon^2 - \delta \zeta)}$; il est donc facile de déterminer géométriquement dans les sphéroïdes semblables, les portions de ces corps qui exerceroient sur un point donné la même attraction que le plus petit d'entr'eux. Les surfaces qui servent à retrancher les parties d'égale attraction, sont des cônes à base d'ellipse, ou des cônes scalènes ordinaires; car on peut démontrer que la surface indéfinie de tout cône à base d'ellipse, ne diffère point de celle du cône scalène à base circulaire.

Il paroît par ces propriétés, qu'on peut faciliter beaucoup la recherche de la valeur de l'attraction, & obtenir un résultat moins composé que l'expression (g'). En effet, si on fait usage du sphéroïde dont la surface passe par le point attiré, on aura $\zeta = 0$; donc $\sqrt{(\epsilon^2 - \delta \zeta)} = \epsilon$, & la question se réduit à intégrer la quantité

$$\frac{2 \, d p \, d q \, \sin. p. \sin.^2 q \, (f \sin. q \sin. p + m g \sin. q \cos. p + n h \cos. q)}{\sin.^2 q \sin.^2 p + m \sin.^2 q \cos.^2 p + n \cos.^2 q}$$

pour toutes les valeurs de q & p qui peuvent avoir lieu entre les limites

$$f \sin. q \sin. p + m g \sin. q \cos. p + n h \cos. q = 0$$

$$f \sin. q \sin. p + m g \sin. q \cos. p + n h \cos. q = \omega,$$

ω étant le *maximum* déterminé par l'équation (h') . Il est remarquable dans ce cas que la surface où l'intégrale se termine, & en général toutes celles où ω est constant, sont des cônes droits dont l'axe commun se confond avec la perpendiculaire à la surface du sphéroïde.

L'intégration que nous indiquons, peut s'effectuer par les moyens ordinaires, mais elle ne laisse pas d'offrir encore quelques difficultés à cause des limites auxquelles il faut avoir égard : voici un moyen infiniment plus simple de parvenir au même but.

Puisque l'attraction de chaque enveloppe conique est indépendante de ζ , on peut supposer que la valeur de ω qui a lieu dans cette enveloppe, est précisément le *maximum* de ω dans un sphéroïde plus petit. Je reviens donc à la valeur générale de X , & j'observe que dans le cas du *maximum* de ω , on a $D = 0$; la formule (X) se réduit alors à celle-ci :

$$\int \frac{2 \omega^2 d\omega \cdot A^{\frac{1}{2}} d\phi}{A^2 + m B^2 + n f^2 l^2 \mu^2} \dots\dots\dots (i').$$

Il faut l'intégrer depuis $\phi = 0$, jusqu'à $\phi = 360^\circ$, ce qui donne pour l'attraction d'une enveloppe conique quelconque,

$$\frac{2 \omega^2 d\omega \cdot 2 \pi A^{\frac{1}{2}}}{A^2 + m B^2 + n f^2 l^2 \mu^2}.$$

Remettons les valeurs de A , B , μ en ω , ou plutôt, comme la valeur de ζ que suppose cette intégration, dépend de la résolution de l'équation du 3.^e degré,

$$\lambda \mu \nu - f^2 \mu \nu - m^2 g^2 \lambda \nu - n^2 h^2 \lambda \mu = 0,$$

tâchons d'exprimer A , B , μ & ω par le moyen d'une

484 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
nouvelle indéterminée. Soit donc

$$\lambda = \frac{\theta}{\alpha \epsilon}, \mu = \frac{\theta}{\epsilon}, \nu = \frac{\theta}{\alpha};$$

on aura d'abord

$$\theta = f^2 \alpha \epsilon + m^2 g^2 \epsilon + n^2 h^2 \alpha;$$

mais les valeurs de λ, μ, ν donnent

$$m \lambda - \mu = (m - 1) \omega^2 = \frac{\theta (m - \alpha)}{\alpha \epsilon}$$

$$n \lambda - \nu = (n - 1) \omega^2 = \frac{\theta (n - \epsilon)}{\alpha \epsilon},$$

donc en prenant une nouvelle indéterminée ψ , toutes nos variables s'exprimeront très-simplement par le moyen de ψ ; ainsi on aura

$$\alpha = m - (m - 1) \psi$$

$$\epsilon = n - (n - 1) \psi$$

$$\omega^2 = \frac{\theta \psi}{\alpha \epsilon} = \psi \left(f^2 + \frac{m^2 g^2}{\alpha} + \frac{n^2 h^2}{\epsilon} \right).$$

Reprenant les valeurs de A & de B qui sont

$$A = \mu \nu - m^2 g^2 \nu - n^2 h^2 \mu$$

$$B = m f g \nu,$$

on aura, en faisant les substitutions,

$$A = \frac{f^2 \mu \nu}{\lambda} = f^2 \theta$$

$$A^2 + m B^2 + n f^2 \mu^2 = f^2 \theta^2 \left(f^2 + \frac{m^2 g^2}{\alpha^2} + \frac{n^2 h^2}{\epsilon^2} \right).$$

D'ailleurs on trouvera

$$2 \omega d \omega = \left(f^2 + \frac{m^2 g^2}{\alpha^2} + \frac{n^2 h^2}{\epsilon^2} \right) d \psi;$$

donc enfin l'expression (i') se réduit à cette forme infiniment

simple $\frac{2 \pi f d \psi \sqrt{\psi}}{\sqrt{\alpha \epsilon}}$, ou

$$\frac{2 \pi f d \psi \sqrt{\psi}}{\sqrt{[m - (m - 1) \psi] \cdot [n - (n - 1) \psi]}}.$$

C'est l'expression générale de l'attraction d'une enveloppe

conique quelconque, ce n'est autre chose que l'expression (g') présentée sous la forme la plus simple. Il ne reste plus qu'à intégrer cette quantité depuis $\psi = 0$, jusqu'à la valeur de ψ qui répond au *maximum* de ω dans le sphéroïde donné.

Remettons au lieu de m & n leurs valeurs $\frac{a^2}{b^2}$ & $\frac{a^2}{c^2}$; introduisons la masse M du sphéroïde à la place de son volume $\frac{4\pi abc}{3}$, & supposons que ω étant à son *maximum*,

on ait $\psi = \frac{a^2}{K^2}$. Si on fait en général $\psi = \frac{a^2 \zeta^2}{K^2}$, l'attraction totale du sphéroïde dans la direction de l'axe a , se trouvera par l'intégrale suivante prise depuis $\zeta = 0$, jusqu'à $\zeta = 1$,

$$\frac{3}{K} \frac{Mf}{K} \cdot \int \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{[K^2 + (b^2 - a^2)\zeta^2]} \cdot \sqrt{[K^2 + (c^2 - a^2)\zeta^2]}}$$

Quant à la valeur de K^2 , pour la trouver directement, on observera que suivant les formules précédentes

$$\psi = \frac{\omega^2}{\lambda} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \zeta}; \text{ de sorte que } \omega \text{ étant à son maximum,}$$

$$\text{on aura } \frac{K^2}{a^2} = \frac{\omega^2 + \zeta}{\omega^2}, \text{ ce qui donne } \omega^2 = \frac{a^2 \zeta}{K^2 - a^2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (h'), on aura

$$K^2 (K^2 + b^2 - a^2) (K^2 + c^2 - a^2) - f^2 (K^2 + b^2 - a^2) (K^2 + c^2 - a^2) - g^2 K^2 (K^2 + c^2 - a^2) - h^2 K^2 (K^2 + b^2 - a^2) = 0,$$

équation dont il faudra prendre la plus grande racine pour valeur de K^2 .

On voit par cette équation, que la valeur de K ne contient d'autre fonction de a, b, c que $b^2 - a^2$ & $c^2 - a^2$; il en est de même de la valeur de l'attraction, d'où résulte enfin le théorème qu'il s'agissoit de démontrer :

Si deux sphéroïdes ont leurs ellipses principales décrites des mêmes foyers, les attractions qu'ils exercent sur un même point, auront la même direction, & seront entr'elles comme leurs masses.

Quoique dès les premiers pas la résolution de ce problème parût rentrer dans les règles ordinaires, on voit cependant qu'il a fallu beaucoup d'artifices de calcul pour parvenir au résultat. Ce problème est vraisemblablement un de ceux auxquels la méthode synthétique ne seroit point applicable; car pour rendre l'intégration possible, il ne paroît pas qu'il y ait d'autre moyen que de décomposer, comme nous avons fait, le sphéroïde en couches ou enveloppes coniques dans lesquelles ω est constant: or l'attraction d'une de ces enveloppes exige une intégration très-difficile & fort au-dessus des moyens ordinaires de la synthèse. Ce n'est qu'après l'intégration, que la circonstance de la disparition de ζ donne lieu aux propriétés que nous avons énoncées, & permet de simplifier considérablement le résultat.



OBSERVATIONS

Faites dans un voyage aux Terres australes, en 1773

& 1774.

Par M. LE PAUTE D'AGELET *.

LE désir de faire dans cette expédition quelque chose qui pût être utile à l'astronomie, me déterminà à m'embarquer en 1773 pour les Terres Australes, par le conseil & les soins de M. de la Lande. Cette campagne annonçoit des occasions intéressantes pour un observateur, mais les circonstances qui en ont empêché le succès, m'ont aussi ôté les occasions de faire beaucoup d'observations; mon seul regret est de n'en avoir pu rapporter un plus grand nombre, malgré la dureté & les fatigues d'un long & pénible voyage.

* Ce Mémoire, lû à l'Académie en 1775, étoit destiné à paroître dans le recueil des Mémoires présentés par des Savans étrangers, ainsi que plusieurs autres Mémoires que M. d'Agelet, avant son départ pour le voyage autour du monde, avoit lûs à l'Académie; on les publiera successivement, ainsi que de nombreuses observations d'étoiles dont les journaux sont entre les mains de M. de la Lande. La troisième comète de 1790 a donné lieu d'y recourir pour avoir les positions de plusieurs étoiles vers lesquelles elle a passé, & dont on n'auroit pu trouver ailleurs des positions assez exactes.

M. de Pagès, dans ses Voyages publiés en 1782, donne une relation de cette expédition; il parle des observations, mais il ne nomme point l'auteur.

M. d'Agelet avoit aussi donné un petit extrait de ce voyage dans le Journal des Savans, juin 1775, mais on n'y trouve pas les observations qui font l'objet de ce Mémoire.

Cet Académicien, né en 1753, commença en 1768 à s'occuper d'astronomie avec M. de la Lande. Il a été élu à l'Académie le 15 janvier 1785; il est parti le 1.^{er} août suivant avec M. de la Pérouse pour faire le tour du monde. Au moment où ceci s'imprime (17 juin 1790) on n'en a point de nouvelles; les dernières étoient de Botany-bay, à la Nouvelle-Hollande, mars 1788.

Nous sortîmes du port de Brest le 26 mars 1773, avec le vaisseau le *Roland* de soixante-quatre, commandé par M. Kerguelen, chef de cette expédition; & la frégate l'*Oiseau*, par M. de Rosnevet, officier distingué par ses connoissances dans tous les genres, & par son zèle pour le progrès des sciences.

Nous avions à bord de chaque bâtiment une horloge marine de M. Berthoud, & les instrumens d'astronomie nécessaires à nos opérations.

La précipitation avec laquelle se fit notre embarquement, ne nous laissa point le temps de régler nos montres à Brest avant de mettre à la voile, & nous ne pûmes faire aucune épreuve sur leurs marches dans la traversée de France au cap de Bonne-espérance.

Les observations de distances de la lune au soleil, faites dans cette traversée, semblent fournir la remarque suivante sur la position de l'île que l'on appelle la *Trinité*, mais qui me paroît n'être que l'île de l'*Ascençon*, répétée deux fois sur nos cartes géographiques. Dans la carte méridionale du Neptune François de M. Bellin, les îlots de Martin Vas sont placés par les $26^{\text{d}} \frac{1}{2}$ de longitude occidentale, & $20^{\text{d}} 20'$ de latitude méridionale; la longitude estimée du bâtiment étant de $26^{\text{d}} 23'$, l'île de la *Trinité* nous restoit O. $\frac{1}{4}$ S. O. distance treize lieues, & le plus est des îlots de Martin Vas dans le sud, à sept lieues de distance. Le même jour, un peu après midi, on eut connoissance de ces îlots du haut des mâts; ils restoient dans le O. $\frac{1}{4}$ S. O. du monde; on estimoit leur distance de sept à huit lieues. La longitude vraie, déduite des observations de distances faites les jours précédens, & réduite au moment du relèvement, étoit de $31^{\text{d}} 53'$, ce qui ne diffère pas beaucoup de la longitude à laquelle on place l'île de l'*Ascençon* dans nos cartes. Cette erreur de position pourroit bien venir de l'effet des courans, qui paroissent constamment porter à l'ouest, comme nous l'avons éprouvé.

Le 27 mai, nous mouillâmes au cap de Bonne-espérance,
dans

dans la baie de Falſe, en rade de Simon's bay, par treize braſſes, fond de ſable olive. Après avoir établi un obſervatoire à terre, pour vérifier l'erreur des inſtrumens & faire nos obſervations, nous déterminâmes la marche de nos montres marines; je trouvai le retard journalier de n.^o 11, le thermomètre étant à 13^d au-deſſus de la congélation, de 11",2. La latitude du magafin qui eſt dans le fond de cette baie, déterminée par plufieurs hauteurs d'étoiles priſes au nord & au ſud, avec un quart-de-cercle d'un pied de rayon, fait par Bird, eſt de 34^d 11' 50" au ſud. L'inclinaifon de l'aiguille que j'obſervai avec une bouſſole faite par M. Magny à Paris, me donna les réſultats ſuivans, que je rapporte pour montrer la différence que j'ai trouvée par le retournement de cette bouſſole, ſoit dans le méridien magnétique ou dans le méridien du lieu; j'ai trouvé de même des différences dans toutes les latitudes ſud où j'ai fait l'obſervation. Je craignois alors que la bouſſole n'eût ſouffert quelques dérangemens, ou reçu quelques ſcouſſes, qui peut-être occaſionneroient cette différence; mais M. l'Abbé de la Caille (*Mém. Acad. 1751, p. 45.*) & M. le Gentil dans ſon voyage de l'Inde, avoient déjà trouvé des variations ſemblables, avec des bouſſoles du même auteur.

La déclinaifon de l'aiguille, le 22 juin, étoit de 20^d $\frac{1}{4}$ N. O le thermomètre 15^d $\frac{1}{2}$, temps clair; j'ai trouvé les réſultats ſuivans, avec la bouſſole d'inclinaifon.

<i>Dans le méridien magnétique.</i>	<i>Dans le méridien du lieu.</i>
$\left. \begin{array}{ll} 44^d & 30' \\ 47 & 30 \end{array} \right\} \text{plonge}$	$\begin{array}{ll} 41^d & 45' \\ 44 & 50 \end{array}$
<i>à 90^d du méridien magnétique.</i>	
$\begin{array}{ll} 85^d & 0. \\ 89 & 45. \end{array}$	

Ainsi l'on voit qu'il y a plusieurs degrés de différence dans l'inclinaison donnée par le retournement. La même boussole à Paris donnoit cependant la même chose en 1772 (*Conn. des temps* 1775, page 350), & je m'en étois assuré plusieurs fois, en répétant les observations.

La hauteur des marées mesurée les 21, 22 & 23 de juin 1773, sur une grande règle graduée & placée contre un des piliers du pont, dans le fond de la baie, a été de quatre pieds neuf pouces à cinq pieds : l'établissement du port deux heures après le passage de la lune au méridien.

Je mesurai la hauteur de la montagne qui est en face du mouillage des vaisseaux, par le moyen du baromètre, en employant la méthode de M. de Luc, & je trouvai que la plus haute, qui est à côté de la montagne appelée la *Reconnoissance*, a 237 toises d'élevation au-dessus du niveau de la mer, le baromètre étant à 28 pouces 2 lignes $\frac{1}{2}$ à bord, & à 26 pouces 8 lignes $\frac{1}{2}$ au sommet; le thermomètre étoit à 14^d au bas, & 10 $\frac{1}{2}$ au sommet: j'avois commencé à faire des relèvemens pour dresser un plan plus exact de cette baie, mais l'ordre que nous reçûmes du commandant de partir pour Madagascar, m'obligea d'abandonner ce travail, qui pouvoit être utile aux navigateurs.

Arrivés à Madagascar le 20 juillet, nous mouillâmes à Foulpointe: j'établis les instrumens à terre pour faire quelques observations, mais le temps fut presque continuellement couvert, en sorte que je ne pus faire que très-peu d'observations. Je trouvai la latitude par des hauteurs méridiennes de plusieurs étoiles, de 17^d 40' 35". Par un milieu entre plusieurs observations de distances faites à terre, & les hauteurs des astres prises avec un quart-de-cercle, je trouve sa longitude 47^d 35'. Par la montre n.^o 11, en déterminant sa marche à l'Isle-de-France, je trouve 47^d 15'. Comme cette traversée a été fort courte, quoique la marche ait

avancé assez sensiblement, il est certain que le résultat ne doit point être très-éloigné; ainsi, il me semble qu'en prenant $47^{\text{d}} 20'$ pour la longitude de Foulpointe, on doit être à peu-près sûr de ce résultat, à moins d'un quart de degré. Il diffère de $1^{\text{d}} 50'$ de la longitude à laquelle il est placé dans le Neptune François, & de $10' 30''$ de celle qui résulte d'une éclipse d'Antarès par la lune, observée dans le même lieu par M. le Gentil, que j'ai vue depuis dans la *Connoissance des temps de 1775*, $3^{\text{h}} 10' 10''$ (ou $47^{\text{d}} 30'$).

J'observai la hauteur des marées dans la nouvelle & pleine lune, de 3 pieds $\frac{1}{2}$. Voici une table de l'inclinaison de l'aiguille aimantée, dans laquelle on voit les changemens occasionnés par le retournement, que j'avois déjà éprouvé à Falsbay. Le 7 août 1773, temps couvert, thermomètre $19^{\text{d}} \frac{3}{4}$, la déclinaison observée à 3^{h} après midi, $17^{\text{d}} \frac{1}{4}$ N. O. l'inclinaison comme il suit.

Dans le Méridien magnétique.		Dans le Méridien du lieu.		A 90^{d} du Méridien magnétique.		A 90^{d} du Méridien.	
D.	M.	D.	M.	D.	M.	D.	M.
$50^{\text{d}} 40'$	} plonge au sud.	$47^{\text{d}} 30'$	} ...	$87^{\text{d}} 45'$	} plonge à l'ouest.	$79^{\text{d}} 40'$	} plonge à l'est.
$50 30$		$47 30$		$87 30$		$80 0$	
$50 25$		$51 20$		$85 30$		$74 15$	
$46 0$		$51 20$		$85 30$		$74 30$	
$45 45$							

Le 10 août 1773 nous partîmes de Madagascar pour l'Isle-de-France, où nous fûmes à l'ancre le 19. J'observai l'éclipse de lune du 30 septembre au soir. Le commencement ne fut point visible; à $8^{\text{h}} 17'$ j'aperçus la lune à travers les nuages, & je vis la pénombre qui étoit sur le bord, mais sans l'éclipser. Comme le vent étoit très-fort, je fus obligé d'abandonner la lunette de 7 pieds $\frac{1}{2}$.

& d'observer avec celle d'un quart-de-cercle de 2 pieds $\frac{2}{3}$ de rayon, qui avoit plus de solidité. Voici les taches que j'ai pu observer.

8 ^h 44' 30"	Émerſion d'Ératosthène.
49. 33.	Copernic.
55. 10.	Comm. de <i>Mare ſerenitatis</i> .
9. 4. 21.	<i>Manilius</i> .
18. 23.	<i>Dionyſius</i> .
18. 43.	<i>Cleomedes</i> .
22. 21.	Commencement de <i>Mare criſum</i> .
26. 37.	<i>Infula finis medii</i> .
9. 29. 43.	Immersion de <i>Gaffendus</i> .
39. 27.	<i>Promontorium acut. Cenſorinus</i> .
10. 44. 12.	<i>Inf. fin. medii</i> .
11. 0. 3.	<i>Mare criſum</i> .
4. 31.	<i>P. oclus</i> .

J'observai la fin de l'éclipse avec une lunette acromatique de 7 pieds $\frac{1}{2}$ de M. l'abbé Bouriot, qui grossit 64 fois, 11^h 23' 20". Le ciel étoit alors fort clair, & les nuages totalement dissipés. La différence des méridiens est de 3^h 40' 32" suivant M. de la Caille; c'est le résultat d'un grand nombre d'observations, plus concluantes que les éclipses de lune.

La déclinaison de l'aimant observée le 9 octobre, étoit de 15^d 45' O. l'inclinaison à 2^h après midi, thermomètre 21^d, baromètre 28 p. 3 l. temps clair.

<i>D ns le Méridien n agnet que.</i>	<i>Aer dien du lieu.</i>	<i>A 90^d du Aer die. magnétique.</i>	<i>A 90^d d. Méridien.</i>
54 ^d 0' } au ſud. 50 15 }	54 ^d 20' } 51 0 }	83 ^d 20' } à l'eſt. 79 15 }	85 ^d 50' 82 20

On appareilla de l'Isle-de-France le 17 octobre pour l'Isle de Bourbon.

Enfin, le 29 octobre, nous mîmes à la voile pour aller chercher les Terres Australes; départ que nous désirions avec impatience, comme devant être l'époque de nos travaux les plus curieux, & où chaque événement alloit devenir intéressant pour nous.

Dès que nous nous fûmes élevés par les 32^d de latitude méridionale, étant par les 40^d de longitude à l'est de Paris, nous commençâmes à trouver des brumes épaisses, la mer grosse, houleuse, le vent fort frais; nous vîmes beaucoup d'oiseaux de mer. Par les 43 & 45 degrés de latitude, & 38 de longitude, on eut beaucoup d'indices de terre, du goëmont, des oiseaux en quantité, des plongeurs & des loups marins; on n'aperçut pourtant aucun changement dans la couleur de la mer. Il est probable que nous étions près des îles arides découvertes par M. Marion l'année précédente, à en juger par la position que les officiers de son bord ont donnée depuis de ces terres; mais le mauvais temps qui ne cessoit point, fut cause que l'on continua la route sans faire aucune recherche pour s'en assurer, & l'on s'éleva jusque par les 49 & 50^d de latitude méridionale.

Si l'on jugeoit de l'hémisphère austral par le temps que nous y éprouvâmes pendant toute cette traversée, on le trouveroit bien rigoureux. Le ciel fut presque toujours couvert; depuis les 44 degrés de latitude, le thermomètre à mercure, fait sur l'échelle de M. de Réaumur, étoit, dans la plus grande chaleur du jour, c'est à dire, vers 2^h $\frac{1}{2}$ après midi, à 2, 3, 4 & 5 degrés seulement au-dessus de la congélation, & souvent pendant la nuit à 1 & à 2 au-dessous, quoique ce fût alors le temps du solstice d'été. La mer fut presque toujours mauvaise, ou bien l'on avoit des brumes épaisses, parmi lesquelles l'on pouvoit à peine conserver les bâtimens ensemble; à cela succédoit la pluie, la neige ou la grêle, & à peine pourrions-nous compter deux jours de suite de beau temps dans une croisière de deux mois. On jugera de la température de ce climat

494 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

par la table suivante, où il paroît qu'il faisoit auffi froid qu'à Paris, où l'on avoit cependant la saison opposée. J'ai joint à cette table les vents qui régnoient dans le temps de ces observations, avec la disposition de l'air.

MOIS & JOURS	LATIT. mérid.	LONG. orient.	BAROM. à midi.	THER. M. R. à 3 ^h	THER. pend. lanuit.	VENTS ET DISPOSITION DE L'AIR.
1773.	D. M.	D. M.	P. L.	D.	D.	
Nov. 6.	28 ^d 50'	41 ^d 48'	28 ^P 21	22.	...	S. E. variable presque calme, beau temps.
18.	42. 52.	37. 31.	27. 8.	10.	6.	N. N O. bon frais, temps couvert & pluvieux.
20.	43. 40.	38. 12.	27. 9.	8.	...	N. NO. O. bon frais, temps sombre, couvert.
21.	44. 0.	38. 30.	27. 9.	4.	0 $\frac{1}{4}$.	O S O. ON O. grand frais, temps couvert.
23.	44.	40. 48.	28. 3.	3.	— $\frac{1}{2}$.	O S O. S O. grand frais, temps brumeux.
25.	45. 10.	41. 0.	28. 6.	3 $\frac{1}{2}$.	0.	N E. NNE. foible beau temps.
28.	49.	43. 0.	27. 6.	4.	0.	S S O. O. & N O. bon frais, temps sombre, brumeux, neige.
30.	49. 30.	44. 0.	27. 4.	2.	— 1.	NO. S O. bon frais, temps par grains, neige, grêle.
Déc. 1.	49. 45.	48. 0.	26. 11.	3 $\frac{1}{2}$.	0.	N O. O. calme, temps par grains, neige, grêle.
2.	49. 39.	50. 0.	27. 4.	2.	— 1.	N O. ON O. grand frais, pluie, neige.
5.	49. 30.	56. 0.	28. 1.	4.	2.	NN O. ON O. N O. grand frais, temps couvert.
7.	49. 30.	57. 30.	27. 5.	5.	3.	N. grand frais, brume, pluie, neige, grêle.
11.	48. 54.	62. 11.	27. 6.	5.	4.	NO. N. bon frais, temps sombre & brumeux.
14.	49. 9.	66. 0.	28. 0.	2.	0.	O N O. temps couvert, joli frais.
17.	48. 10.	66.	27. 9.	2.	0.	O. ON O. joli frais, beau temps.
19.	48. 0.	64. 45.	28. 4.	5.	2 $\frac{1}{2}$.	NN O. N. ON O. joli frais, beau temps.
28.	47. 30.	65.	27. 1.	2 $\frac{1}{2}$.	0 $\frac{1}{2}$.	N O. O. grand frais, grains violens, temps couvert.
1774.						
Janv. 2.	47. 30.	66.	27. 4.	5.	5.	N O. N. grand frais, grains violens, temps nébuleux.
9.	48. 0.	65.	27. 3.	— 2 $\frac{1}{2}$.	— 3 $\frac{1}{2}$.	S O. bon frais, pluie, neige, grêle.
10.	47. 40.	65. 30.	27. 1.	— 1.	...	NN O. & ON O. bon frais, temps sombre.
15.	46. 30.	64. 30.	27. 9.	3.	...	E. au N. grand frais, temps pluvieux.
19.	44. 53.	65. 0.	28. 0.	6.	...	E. bon frais, beau temps.

Les variations du baromètre paroissent être assez grandes

dans ces mers. Le 1.^{er} décembre à 5^h du soir, par les 47^d de longitude orientale & 49^d $\frac{1}{2}$ de latitude, le thermomètre à 2^d $\frac{1}{2}$ au $\frac{1}{2}$ dessus de la congélation, le baromètre étoit à 26 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$; il avoit descendu uniformément depuis trois jours; le temps étoit sombre & brumeux, & nous eûmes les jours suivans de très-grands vents. La plus grande hauteur à laquelle il ait monté, fut le 21 décembre à la vue de terre; à 3^h après midi, le thermomètre à 4^d $\frac{1}{4}$ au-dessus de la glace, temps clair & fin, le baromètre étoit à 28 pouces 5 lignes $\frac{1}{2}$.

Enfin le 14 décembre au matin on reconnut la terre qui couroit à peu-près nord $\frac{1}{4}$ NE. & sud $\frac{1}{4}$ SE. Cette côte est très-élevée, & peut s'apercevoir à 10 ou 12 lieues au moins par un temps clair; on n'y voyoit ni arbre ni arbruste, pas même de verdure; les montagnes dont elle est composée étoient toutes couvertes de neige, & dans le nord-est il y avoit plusieurs bancs de glace qui paroissent très-considérables. Nous atterrâmes par 49^d 14' de latitude, & par 65^d de longitude; mais on abandonna cette partie de la terre pour aller chercher un mouillage dans la partie du nord, espérant qu'elle seroit moins difficile & moins exposée aux vents qui régnoient dans ces parages.

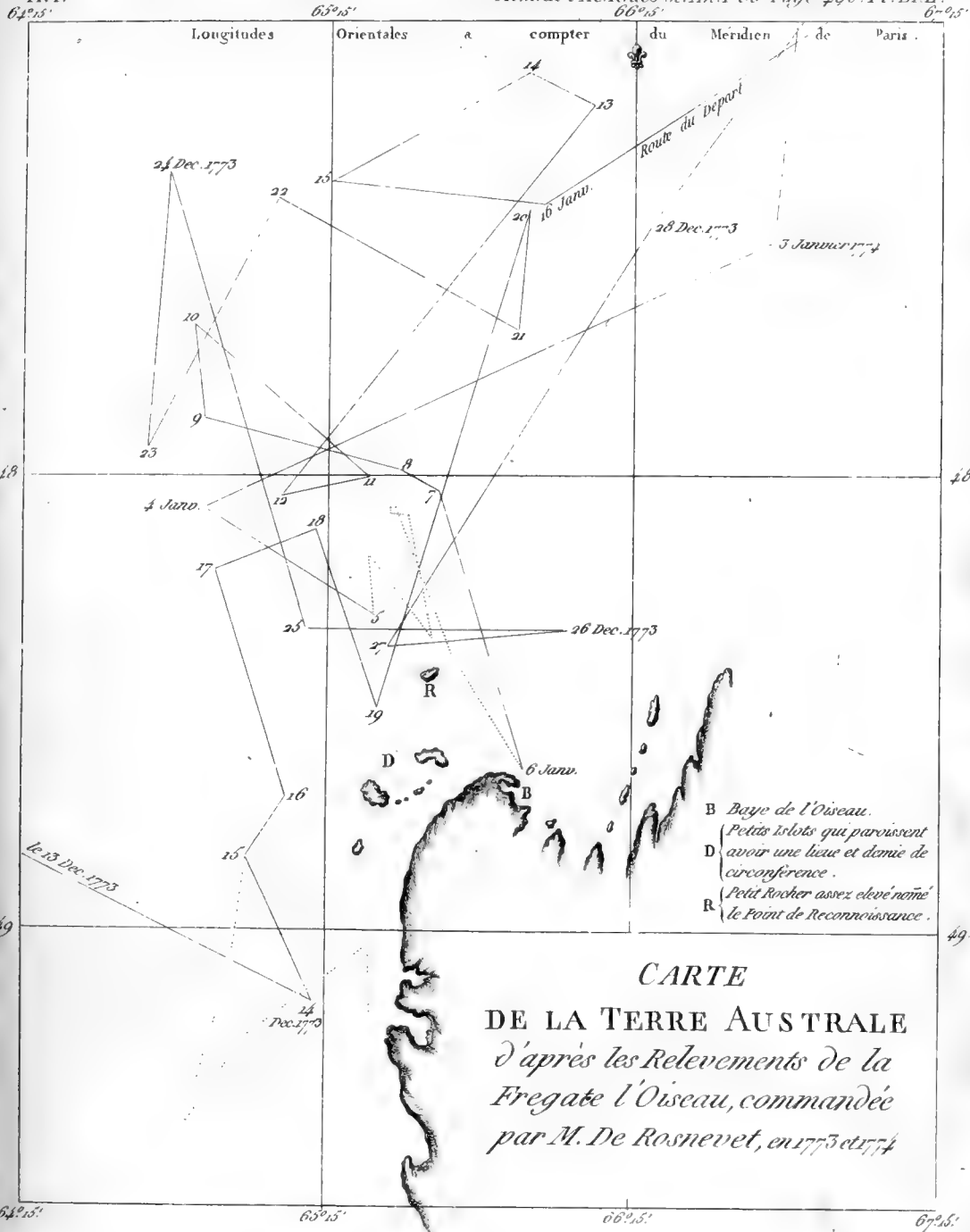
Le 15 décembre, à 9^h $\frac{1}{2}$ du soir, on vit une aurore australe qui dura plus d'une heure; elle avoit 30 à 35^d d'étendue à l'horizon & à peu-près autant de hauteur perpendiculaire; elle inclinoit du côté de l'est: la lumière étoit moins rouge & moins vive que celle qu'on remarque assez communément dans nos aurores boréales; on y distinguoit plusieurs jets ou faisceaux bien terminés, & qui durèrent assez long-temps avant de s'affoiblir & de changer de lumière. Le baromètre étoit à 27^p 9 l., le thermomètre à 2^d au-dessus de la congélation: nous étions à 12 & 15 lieues de la terre.

Le pôle magnétique de la terre étant par les 29^d du pôle austral, & vers les 123^d de longitude suivant la théorie de M. Euler (*Mem. de Berlin* 1757), la les

aurores ont leur émanation principale vers ce point là ; elles doivent en effet décliner un peu vers l'est dans la position où nous étions.

On passa plusieurs jours à reconnoître la partie de cette terre qui se prolongeoit dans le nord. Ayant été séparés par un coup de vent , qui nous obligea de nous éloigner de la terre jusqu'au 4 de janvier 1774 , l'on ne put rien faire pour s'assurer d'un mouillage. Le 6 janvier, voyant que le temps étoit favorable, on passa entre deux îlots qui sont par les 48^d 35' de latitude, & une espèce de rocher qui en est éloigné de 3 à 4 lieues dans le N. E. Faisant porter sur un gros cap qui est dans le S. E. de ce rocher à 5 à 6 lieues de distance, on aperçut derrière ce cap un enfoncement : on mit un canot à la mer pour aller s'assurer si c'étoit un mouillage. Nous étions assez près de terre pour distinguer très-facilement les oiseaux qui étoient en grande quantité sur le rivage. Ce cap est très-haut, fort à pic, & n'offre qu'un roc vif du côté de la mer, dans lequel on voyoit très-distinctement les couches horizontales & parallèles, coupées par des fentes perpendiculaires & verticales ; le sommet étoit couvert de neige. De l'autre côté, la côte est beaucoup moins élevée ; son extrémité, au bord de la mer, est terminée par une espèce de pyramide carrée, détachée & séparée de la montagne jusqu'au trois quarts de la hauteur. On verra dans la première planche de ce Mémoire le plan de ces îles.

Les officiers qui avoient été visiter cet enfoncement revinrent à bord, après avoir sondé & relevé un petit port qu'ils trouvèrent dans le fond de cette baie ; il est très-commode & à l'abri de tous les vents, excepté ceux de S. E. & S. E. $\frac{1}{4}$ E. qui nous ont paru être les moins fréquens & les moins violens de ces parages. Ils estimèrent sa largeur de 400 à 480 brasses, sa longueur d'un tiers de lieue ; le mouillage est fond de sable fin : dans le fond est une petite rivière d'eau douce fort bonne, qui vient
se

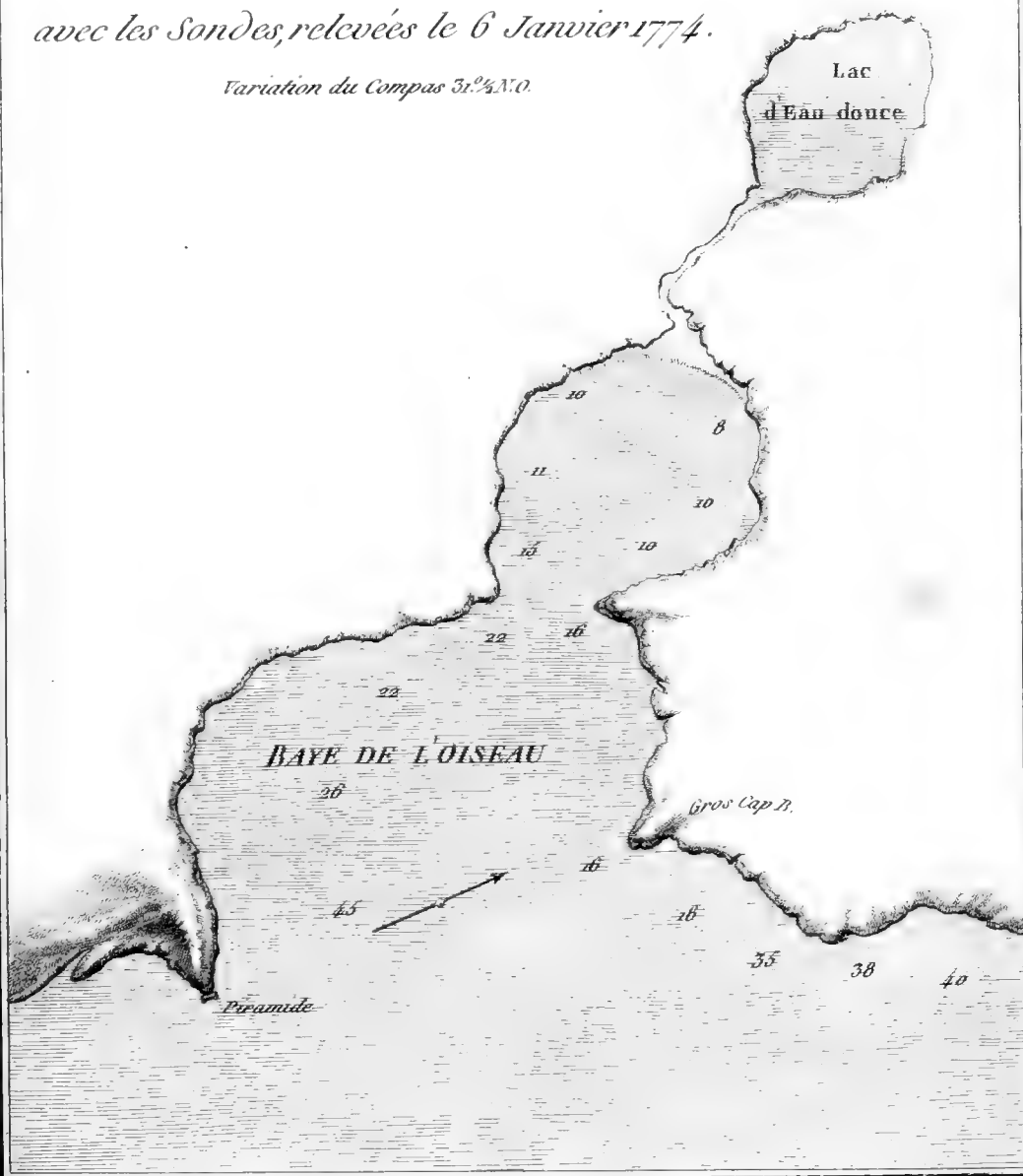




BAYE DE L'OISEAU

avec les Sondes, relevées le 6 Janvier 1774.

Variation du Compas 31° ¼ N.O.





se rendre à la mer en sortant d'un lac qui se trouve à 200 pas du rivage, qui a environ un tiers de lieue de circonférence. Je joins ici le plan de ce port, dressé d'après les relèvemens faits à terre, & l'estimation approchée de sa longueur & de sa largeur.

On prit possession de cette terre au nom du roi, & l'on y laissa plusieurs inscriptions dans des bouteilles, pour en constater l'époque; les unes furent enterrées sous de petites pyramides sur le rivage, d'autres accrochées aux roches. Elles renferment l'inscription suivante écrite sur vélin :

Ludovico XV, Galliarum rege, & D. de Boynes regi à secretis ad res maritimas, annis 1773 & 1774.

On n'apercevoit sur la partie découverte des montagnes qui entourent cette baie, qu'une mousse jaunâtre & aride, sans aucun vestige d'arbre ni d'arbruste; on trouva seulement au bord du lac quelques *gramen* qui étoient à la vérité d'une grande vigueur & d'une belle croissance. Des deux seules plantes que nous ayons rapportées de cette terre, l'une est l'argentine de Linné; elle fut prise sur un tas de goëmont ou varec à l'entrée de la baie; sa fleur étoit bien épanouie & de couleur jaune; elle paroissoit avoir été récemment détachée & entraînée par quelque chute d'eau: sa racine étoit encore environnée d'une terre noire & sablonneuse: l'autre est un *gramen* pris au bord du lac. J'ai remis ces deux plantes à M. Adanson. Tout le rivage étoit couvert d'oiseaux de différentes espèces. L'on y trouva aussi beaucoup de phoques, c'est-à-dire, de lous marins & des lions marins qui étoient fort grands; l'on en tua un des plus petits, qui avoit encore 12 pieds de long sur 6 à peu-près de circonférence. La latitude du gros cap qui est à l'ouverture de cette baie, est de 48^d 40', & sa longitude 65^d 50' orientale, par un milieu entre des observations de distances de la Lune au Soleil faites avec un sextant de Ramsden.

Mém. 1788.

R r r

Le vent & la brume qui survinrent tout-à-coup, nous obligèrent de prendre le large. Nous rejoignîmes, le 9 janvier, le commandant à qui l'on communiqua tout ce qu'on avoit fait depuis la séparation. Nous crûmes pendant plusieurs jours que l'on alloit profiter des connoissances & des relèvemens que nous avions faits pour relâcher à cette terre & en suivre la découverte; mais ce fut en vain, M. Kerguelen nous fit savoir le projet qu'il avoit formé d'abandonner sa mission. M. de Rosnevet lui demanda la permission de la continuer, mais il ne pût l'obtenir, & nous partîmes au grand regret de tous ceux qui avoient du zèle pour les observations & pour les découvertes. Je joins ici une carte de la position des terres que nous avons vues, dressée d'après nos relèvemens, & dans laquelle on peut voir les routes que nous y avons faites pendant notre séjour : ces routes ont été réduites par M. Daniers, lieutenant de la frégate, avec tout le soin & l'exactitude dont elles sont susceptibles; cela pourroit être utile dans le cas où l'on voudroit y retourner (*). La variation du compas étoit de $31^{\text{d}} \frac{1}{2}$ nord-ouest.

La mer étoit quelquefois lumineuse, sur-tout aux approches de terre, mais d'une couleur moins vive & moins brillante qu'entre les tropiques où ce phénomène est presque continuel.

Nous vîmes donc à Madagascar après avoir tenu la mer pendant 120 jours, & nous relâchâmes dans la baie d'Antongil le 16 février 1774.

Des contestations élevées par M. de Bienouski, qui commençoit un établissement dans cette partie de l'île, & qui ne vouloit point permettre à nos équipages de communication avec la grande terre, nous empêchèrent de descendre nos instrumens d'astronomie avant le 3 mars.

(*) M. de Pagès a donné aussi une carte & différentes vues de ces îles, dans le second volume de ses Voyages; mais la carte que l'on trouvera ici est plus détaillée, soit pour les routes soit pour la baie principale.

La latitude du fond de la baie de Voromboite près l'île Maroffe, est de $15^{\text{d}} 26' 59''$ selon les observations de M. Merfais, & $15^{\text{d}} 27' 15''$ selon les miennes.

Le 12 mars, nous observâmes l'éclipse de soleil. M. Merfais avoit une lunette de 7 pieds $\frac{1}{2}$, construite sous les yeux de M. l'abbé Bouriot, & qui grossissoit 64 fois; il observa le commencement à $0^{\text{h}} 23' 4''$, & la fin à $2^{\text{h}} 53' 10'' \frac{3}{4}$, temps vrai.

Celle qui m'a servi pour cette observation, étoit une excellente lunette acromatique de Dollond, qui grossissoit 74 fois, que j'avois fixée sur mon quart-de-cercle pour plus de solidité. J'observai le commencement à $0^{\text{h}} 23' 6''$, & la fin à $2^{\text{h}} 23' 14'', 5$. La conjonction à Paris, par les tables de Mayer, est arrivée à $10^{\text{h}} 4' 30''$. Par l'observation je trouve pour le temps de la conjonction $1^{\text{h}} 13' 32''$, ce qui donneroit $3^{\text{h}} 9' 2''$ pour la différence des méridiens : je n'ai fait nulle correction pour l'erreur des tables, n'ayant point trouvé à mon retour d'observations faites ce jour-là qui puissent me la déterminer. On trouve $3^{\text{h}} 11' 11''$ & $3^{\text{h}} 13' 15''$ dans la *Connoissance des temps de 1775*, d'après plusieurs observations de M. le Gentil. Par plusieurs observations de distances de la lune au soleil, que j'avois faites à l'entrée de cette baie, je trouve sa longitude de $47^{\text{d}} \frac{1}{4}$; ainsi l'on pourroit s'en tenir à $47^{\text{d}} 47'$, au lieu de $45^{\text{d}} 55'$ qu'on trouve dans nos cartes maritimes. C'est sûrement à cette fausse position de longitude de Madagascar, que l'on doit rapporter ce que disent les navigateurs de l'île de France, que les courans étoient si forts dans ces parages, qu'ils se trouvoient souvent avoir été entraînés de plus de deux degrés dans une traversée fort heureuse & fort courte, en allant d'une de ces îles à l'autre. C'est aussi cette ignorance de la longitude de Madagascar, qui a été la cause que plusieurs de nos bâtimens s'y sont échoués où perdus.

Le thermomètre à mercure étoit souvent à 34^{d} au-dessus de la congélation; il étoit à $32^{\text{d}} \frac{1}{4}$ pendant l'observation

de l'éclipse de soleil, dans la boîte de la pendule astronomique, quoique cette pendule fût elle-même sous une double tente au bord de la mer : il restoit pendant la nuit à 24. & 25. degrés.

Nous quittâmes avec joie cette relâche le 22 mars. Peu de jours après nous apprîmes la mort de M. Merfais astronome, embarqué sur le vaisseau de M. Kerguelen. Il avoit pris une fièvre chaude en observant pendant une partie des nuits, & faisant des signaux de comparaisons pour déterminer la marche de son horloge n.^o 8; elle avoit été arrêtée par la négligence des personnes qui s'étoient chargées de la monter pendant qu'il étoit à l'observatoire que nous avions établi à terre. Il se jeta dans la mer le 31 mars, dans un violent accès, & périt ainsi à l'âge de 23 ans. J'ai fait imprimer son éloge dans les Nouvelles littéraires de divers pays, publiées à Berlin en 1776. par M. Bernoulli. Ce jeune astronome qui avoit beaucoup d'esprit & des connoissances en astronomie, avoit commencé en 1766 à travailler sous M. de la Lande avec qui il avoit fait beaucoup d'observations & de calculs; il avoit été en 1772 en Amérique avec MM. de Verdun, de Borda & Pingré, qui en ont fait l'éloge, & l'on avoit lieu d'espérer que les travaux deviendroient utiles à l'astronomie & à la navigation. Ses papiers sont restés entre les mains de M. Kerguelen, à qui je les ai demandés inutilement.

Dans la traversée de Madagascar au cap de Bonne-espérance, nous éprouvâmes des courans très considérables, tantôt à l'est & tantôt à l'ouest, & nous eûmes des différences en latitude de 40' au sud par un temps presque calme & la mer belle, par les 21 $\frac{1}{2}$ degrés de longitude. D'autres fois ces différences furent de 30' & 15', mais quelquefois nous les éprouvâmes dans le sens contraire; c'est-à-dire, qu'alors les courans nous portoient vers le nord. M. Merfais m'a assuré que l'horloge n.^o 8, de M. Berthoud, depuis le cap de Bonne-espérance jusqu'à l'île de France,

ne lui avoit donné que 8 à 9 secondes de différence ou d'erreur, d'après la longitude déterminée pour l'un & l'autre endroit par M. l'abbé de la Caille, quoique leur traversée eût été de près de cinquante jours, & qu'ils y eussent perdu leur mâturation. Comme elle a été arrêtée dans toutes les autres traversées, on n'a rien pu apprendre sur son exactitude.

Le 26 juin, nous partîmes du cap de Bonne-espérance. Le 23 juillet, on vit l'île de l'Ascension à la distance de 10 lieues. Sa longitude, par les observations de distances faites les jours précédens, seroit $15^{\text{d}} 54'$. Par $n^{\circ} 11$, en supposant sa marche constante depuis la dernière relâche, $15^{\text{d}} 30'$; elle est de $15^{\text{d}} 42'$, d'après les observations de M. de la Caille.

M. le Gentil m'avoit recommandé d'observer l'inclinaison de l'aiguille par les 12 & 11^{d} de latitude nord & sud de la ligne; voici celle que j'ai trouvée: le 20 juillet par les $10^{\text{d}} 45'$ de longitude orientale, & par $11^{\text{d}} 13'$ de latitude méridionale, l'aiguille plongeoit $4^{\text{d}} \frac{1}{2}$ au-dessous de la ligne horizontale, déclinaison $14^{\text{d}} 50'$ N. O., thermomètre $19 \frac{1}{2}$, temps nébuleux. Le 21, je répétais la même observation par les 12^{d} de longitude & $10^{\text{d}} 3'$ de latitude, je trouvai $5^{\text{d}} \frac{1}{4}$ plong. au nord, à 90^{d} du méridien magnétique, elle plongeoit de 20^{d} du côté de l'ouest.

Le 28 juillet, nous passâmes sous la ligne; étant par $0^{\text{d}} 25'$ de latitude sud, & $18^{\text{d}} 50'$ de longitude occidentale; l'inclinaison étoit de 27^{d} plongeant au nord; à 90^{d} elle étoit de 83^{d} plongeant à l'est; le thermomètre à $23^{\text{d}} \frac{1}{2}$, temps couvert.

Le 4 août, par 23^{d} de longitude ouest & $12^{\text{d}} 45'$ de latitude nord, le thermomètre à 24^{d} , l'inclinaison étoit de 48^{d} plongeant au nord; à 90^{d} du méridien magnétique, elle étoit perpendiculaire. Le mouvement du vaisseau ne permet de faire ces observations qu'à peu-près, & l'on ne doit guère y compter qu'à $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ de degré près.

J'ai mis à la fin de ce Mémoire, une table où l'on voit le résultat de ce que j'ai trouvé dans les différentes latitudes pour la pesanteur de l'eau de mer avec l'aréomètre de M. Beaumé. Enfin, nous arrivâmes à Brest le 6 septembre. Je dois, sur-tout, rendre compte à l'Académie de l'exactitude avec laquelle nous avons toujours navigué, par le moyen des observations de distances faites avec de bons instrumens; j'en rapporterai quelques exemples, cela servira à faire voir qu'on peut compter assez exactement sur la longitude de la nouvelle terre, fixée d'après de semblables observations. Il y a des personnes qui croient qu'on ne doit compter sur ces sortes d'observations qu'à 2^d près, ce qui feroit 40 lieues marines; ce qui peut être vrai pour des observations faites avec des instrumens imparfaits, comme sont encore ceux de nos pilotes; mais depuis qu'on les travaille avec exactitude, il est constant qu'on n'est point exposé à commettre des erreurs aussi considérables.

Notre atterrage au cap de Bonne-espérance n'étoit en erreur que de 4 à 5 lieues, & cela par une suite d'observations qui s'accordoient toutes entr'elles aussi-bien qu'on peut le désirer pour la navigation. Dans celui de Madagascar à l'Isle de France, nous n'eûmes que 8 lieues d'erreur; des Terres australes à Madagascar un demi-degré: de Madagascar au Cap, en tenant compte des courans, nous eûmes 7 lieues, & du cap de Bonne-espérance en France 14 lieues; mais il y avoit six jours que nous n'avions pu faire d'observations. Le vaisseau commandant avoit, par son estime, 70 à 80 lieues d'erreur, ainsi que cela arrive fort communément dans des traversées un peu longues.

La méthode des distances devient très-courte & très-expéditive, au moyen de la formule de M. le chevalier de Borda, pour calculer la correction des réfractions & des parallaxes; c'est celle dont je me suis servi dans toute la campagne, & par ce moyen l'on peut, en moins d'une demi-heure, faire l'observation & en tirer le résultat.

T A B L E

DE LA PESANTEUR DE L'EAU DE MER,

D'après l'aréomètre de M. Beaumé, qui marque zéro dans l'eau distillée, & cent degrés dans un mélange d'eau & de sel à poids égaux. Dix parties de sel sur quatre-vingt-dix d'eau, font dix degrés de l'aréomètre.

ANNEES.	ARÉOMÈTRE.	LONGITUDES	LATITUDES.	THERMOMÈTRE.	BAROMÈTRE.
		D.	D. M.		P. L.
10 Avril 1773	4.	14. occid.	15 sept.	20 $\frac{1}{2}$.	28. 2. $\frac{1}{2}$.
16	3 $\frac{1}{2}$.	19. occid.	4. 30' S.	25.	28. 2.
18	3 $\frac{1}{2}$.	19. occid.	2. 15. S.	24 $\frac{3}{4}$.	28. 2.
28	3 $\frac{4}{5}$.	30. occid.	14. 7. M.	23.	28. 2.
2 Mai.....	3 $\frac{1}{4}$.	31. occid.	20. 15. M.	22 $\frac{1}{2}$.	28. 5.

Le Thermomètre plongé à cinq brasses étoit à 22^d $\frac{1}{2}$ en sortant; plongé à cinquante brasses, nous avons trouvé en le retirant qu'il étoit à 20^d $\frac{1}{2}$. Nous le replongeâmes en filant cent cinquante brasses, & en le retirant au bout de quinze à vingt minutes, en sortant il étoit à 15^d $\frac{1}{2}$ au-dessus de la congélation.

11 Nov. 1773.	3 $\frac{3}{4}$.	40 ^d 30' or.	34 ^d 50' M.	15 ^d $\frac{1}{2}$.	28 ^P 4 ⁱ
12	3 $\frac{3}{4}$.	40. o.	35. 15. M.	15.	28. 2.
29	4.	43. o.	49. 30. M.	1.	27. 5.
10 Décembre.	4.	63. o.	48. 54. M.	3.	27. 10.
15	4 $\frac{7}{8}$.	64. 40.	48. 50. M.	4.	27. 10.
10 Janv. 1774	4 $\frac{1}{6}$.	64. 30.	47. 40. M.	— 1 $\frac{1}{2}$.	27. 1.
24	4.	65. o.	40. 40. M.	13.	28. 0.
3 Février...	3 $\frac{2}{3}$.	61. o.	28. 40. M.	20.	
14	3 $\frac{1}{2}$.	49.	19. 10. M.	20 $\frac{1}{2}$.	
6 Juillet.....	3 $\frac{3}{4}$.	9. o. or.	27. 30. M.	14.	
9	3 $\frac{1}{4}$.	5. o. or.	25. o. M.	16.	
15	4.	2. occid.	19. o. M.	15 $\frac{1}{2}$.	28. 3.
18	3 $\frac{3}{4}$.	19. 30.	o. o.	24.	28. 2.
5 Août.....	3 $\frac{2}{3}$.	27. o.	13. o. S.	24 $\frac{1}{2}$.	28. 3.
27	3 $\frac{3}{4}$.	43. o.	38. 15.	23.	28. 4.

L' A R T
D E L A L I Q U A T I O N,
*Ou du départ de l'argent d'avec le cuivre par l'intermède
du plomb.*

Par M. D U H A M E L.

A V A N T - P R O P O S.

LES procédés qu'on met communément en usage pour parvenir à extraire l'argent des cuivres qui en contiennent, se nomment en général *liquation*; mais chaque opération a une dénomination qui lui est propre. Je décrirai les procédés dont il s'agit, séparément dans huit chapitres divisés en différentes sections. Je m'attacherai plus particulièrement à détailler les opérations qui regardent directement cet art, & je traiterai le plus succinctement qu'il me sera possible celles qui ne sont que secondaires & connues en France.

Schlutter, traduit de l'allemand par M. Hellot, & que j'aurai occasion de citer, a donné les procédés de la liquation; mais je ne les crois pas assez bien détaillés pour qu'on puisse les mettre en pratique en France, notamment dans les mines, où souvent il n'y a que des personnes peu instruites de la métallurgie. D'ailleurs, je donnerai une nouvelle méthode de faire commodément, dans un seul, & même fourneau de réverbère, les deux opérations de la liquation & du ressuage.

Je suivrai par ordre tous les procédés de la liquation & ceux qui y sont relatifs.

Le premier chapitre traitera du rafraîchissement du cuivre avec le plomb, ou autres matières qui contiennent ce métal.

Le

Le deuxième décrira le procédé de la liquation ou l'art de fondre le plomb uni au cuivre, sans faire couler ce dernier.

Le troisième concernera la torréfaction ou reffuage des pièces ou tourteaux de cuivre, après qu'on en a, par la liquation, extrait la majeure partie du plomb chargé de l'argent du cuivre.

Dans le quatrième, je donnerai une nouvelle méthode pour exécuter les deux derniers procédés, au moyen du fourneau que je propose & que je soumetts aux lumières de l'Académie.

Comme ces quatre chapitres regardent immédiatement la liquation, les détails en seront plus étendus que pour les autres opérations qui n'en sont que les accessoires.

Le cinquième chapitre traitera de l'affinage du plomb, à l'effet d'en obtenir l'argent dont il s'est chargé dans la liquation.

Le chapitre six fera un détail abrégé du raffinage du cuivre qui a passé à la liquation.

Le septième traitera de la fonte des crasses ou déchets résultant de toutes les opérations.

Enfin, dans le chapitre huit, je parlerai de la manière de raffiner l'argent affiné.

CHAPITRE I.^{er}

Du Raffraîchissement.

LES fourneaux dont on se sert en Allemagne pour l'opération du raffraîchissement, sont des espèces de fourneaux courbes ou à manche, les uns plus grands que les autres, sur-tout quant à ce qui concerne les dimensions intérieures; celui qu'on emploie pour cet usage à la fonderie de liquation de Grünthal en Saxe, m'a paru le mieux remplir les vues économiques qu'on doit toujours se proposer en faisant des établissemens. Ce fourneau ne consomme que peu de charbon, & il fond autant de matière que s'il avoit beaucoup

Mém. 1788.

SSS

plus de capacité. Je l'ai représenté dans la planche première. Voyez son explication.

P R E M I È R E S E C T I O N .

Du Fourneau de rafraîchissement.

LE fourneau dont je donne le dessin, a 23 pouces de longueur depuis le mur mitoyen qui porte la tuyère, jusqu'au devant de la chemise qui a 3 pouces d'épaisseur, ce qui fait qu'il ne reste que 20 pouces de longueur intérieure lorsque le fourneau est fermé par sa chemise. Sa largeur contre la tuyère, est de 13 pouces $\frac{1}{2}$, & elle n'est que de 8 pouces $\frac{1}{2}$ à l'endroit de la chemise. Sa hauteur, depuis le bas de la chemise, jusqu'à sa partie supérieure, est de 4 pieds $\frac{1}{2}$.

La brasque qui prend, à partir de la lèvre inférieure de la tuyère, va en pente égale, se terminer au bas de la chemise où est le trou de l'œil. Cette pente est de 10 pouces $\frac{1}{2}$, ce qui facilite l'écoulement des matières fondues dans le bassin de l'avant-foyer éloigné de la chemise de 4 pouces. Si l'on ne fait que de petites pièces de liquation du poids de 232 livres, ce bassin aura assez de capacité en ne lui donnant qu'un pied de profondeur & 10 pouces de largeur dans le haut, & un peu moins dans le bas où il doit se terminer en calotte ou portion sphérique.

La tuyère qui, comme il est dit, doit être élevée de 10 pouces $\frac{1}{2}$ plus haut que le bas de la chemise, est placée presque horizontalement; son inclinaison vers l'intérieur du fourneau ne doit pas excéder un degré. Comme les fondeurs n'ont pas d'instrumens propres à donner cette pente, ils y suppléent en laissant tomber un peu d'eau dans la tuyère qui a la pente requise lorsque ce fluide se détermine à couler; alors on la scelle dans la maçonnerie de manière qu'elle n'excède pas le mur mitoyen.

SECONDE SECTION.

De la Brasque.

L'on fait que la brasque servant à la préparation des fourneaux, est composée de charbon de bois pilé & tamisé, & d'argile séchée, à quoi on ajoute, dans certains cas, du sable. Il est des fontes qui exigent une brasque pesante, c'est-à-dire, environ autant d'argile que de charbon. Il en est d'autres où il faut employer de la brasque légère, c'est-à-dire, deux, trois & quatre parties de charbon sur une d'argile. Les Allemands, en cela, comme en toute autre chose, suivent leur routine ou coutume. Par exemple, dans la basse Allemagne, la brasque du fourneau de rafraîchissement est composée de trois parties de charbon & d'une d'argile. (*Voyez Schlutter, page 519*) ; & j'ai vû, avec feu M. Jars, qu'à la fonderie de liquation de Grünthal, on composoit la brasque, pour ce même objet, de deux parties d'argile & d'une seule de charbon, voilà une différence bien grande. La raison pour laquelle les ouvriers de cette fonderie mettent une aussi forte partie d'argile, est fondée sur ce qu'ils croient que de la brasque plus légère ne résisteroit pas bien, particulièrement au bassin de l'avant-foyer qui doit, autant qu'il est possible, conserver ses dimensions durant tout un rafraîchissement, afin qu'il ne contienne qu'autant de métal qu'il en est nécessaire pour former une pièce de liquation.

On peut remédier à l'agrandissement du bassin, en employant, pour cette partie seulement, de la brasque composée de parties égales de charbon & d'argile, & composer celle de l'intérieur du fourneau, de deux parties de charbon & d'une partie d'argile. Je pense que c'est la meilleure proportion pour le travail en question.

La brasque trop pesante est sujette à occasionner des amas de matières qui restent *infondues*, & qui obstruent le fourneau. D'un autre côté, il n'est pas nécessaire que la brasque soit

très-légère pour cette opération, car alors elle pourroit se détériorer avant la fin de la fonte qu'on s'est proposé d'y faire.

Lorsque la brasque est bien battue dans le fourneau & dans l'encaissement de l'avant-foyer, avec les instrumens accoutumés, on creuse le bassin & on lui donne les dimensions indiquées.

TROISIÈME SECTION.

De la Chemise du fourneau.

LORSQU'ON a des cuivres noirs chargés de beaucoup d'impuretés, ces matières hétérogènes sont sujettes à s'attacher sur le sol & aux côtés du fourneau, ce qui occasionne un travail très-pénible, sur-tout lorsque le fourneau est fermé par la chemise depuis le haut jusqu'au trou de l'œil par lequel on détache avec des ringards ces amas, ce qui ne s'opère que très-difficilement : l'œil est même souvent trop petit pour permettre la sortie des morceaux détachés ; alors on est forcé de démolir la partie inférieure de la chemise pour arracher ces amas, & de la reconstruire ensuite, ce qui occasionne une perte de temps, de matières métalliques qui se brûlent, & une consommation inutile de charbon.

Pour parer à ces inconvéniens, je conseille de suivre une méthode fort simple, en usage à Grünthal. Au lieu de fermer, par la chemise, toute la hauteur du fourneau, l'on ne ferme que la partie supérieure, & il reste, dans le bas, environ 15 pouces de vide. Cet espace se garnit avec des charbons de 5 à 6 pouces de longueur, bien rangés les uns sur les autres, en observant de laisser sur la brasque & au milieu de la largeur de la chemise, une ouverture de 18 lignes pour le trou de l'œil qui se formera facilement en plaçant sur la brasque un bâton de cette grosseur, & que l'on retirera lorsque l'espèce de muraille de charbons sera achevée. On enduit ces charbons à l'extérieur avec de l'argile

de l'épaisseur d'un pouce, de manière que cet enduit n'excède pas le devant de la chemise. L'on ne doit point mettre d'argile sur ces charbons dans la partie intérieure du fourneau.

On conçoit maintenant que s'il arrive quelques obstructions considérables au fourneau, il est aisé de démolir une partie & même la totalité des charbons qui ferment le bas de la chemise, d'arracher les amas par cette ouverture, & de la refermer en peu de momens avec des charbons & de l'argile par-dessus.

Au moyen de l'enduit d'argile, ces charbons tiennent au feu assez de temps pour faire 80 à 100 pièces de liquation, qui est tout ce qu'on peut faire dans une fonte. Il est bon d'observer qu'on doit choisir les meilleurs charbons & les plus compacts, parce qu'ils résistent plus long-temps au feu, & qu'ils sont moins sujets à se déranger que s'ils étoient tendres & friables.

Outre les avantages ci-dessus qui résultent de l'arrangement de la chemise avec des charbons, il en est deux autres que je regarde comme très-importans ; 1.^o celui de donner de la chaleur dans le fourneau, plus que ne pourroient faire des briques de la chemise, quoique échauffées, & principalement dans cette partie où elle est nécessaire pour que les matières qui ont été mises en fusion, en descendant devant la tuyère, puissent conserver la même fluidité lorsqu'elles passent par l'œil.

2.^o Celui d'empêcher qu'une partie des métaux, notamment le plomb, ne se scorifie ou ne se réduise en chaux en perdant son phlogistique, ce qui arrive avec une facilité incroyable à ce métal lorsqu'il se trouve exposé à la direction du vent. Or, dans la préparation que je viens de rapporter, quand bien même le vent réduiroit en chaux quelques parties de plomb & qu'il les pousseroit contre la chemise, les charbons qui ferment cette partie revivifieroient sur-le-champ cette chaux, ce qui ne peut pas avoir lieu lorsque toute la chemise est en briques ou en pierres.

QUATRIÈME SECTION.

Du Chauffage du fourneau avant la fonte.

ON ne doit fermer le bas de la chemise du fourneau de rafraîchissement avec les charbons, qu'après que le fourneau a été suffisamment chauffé pendant 8 à 9 heures de suite, chauffage qui se fait de la manière suivante. On met un panier de charbon dans l'intérieur du fourneau, on en remplit en même temps le bassin de l'avant-foyer, l'on en met aussi dans celui de réception qui est une forte poêle de fer coulé; on met le feu à tous ces charbons, on l'entretient pendant tout le temps prescrit ci-dessus, en y ajoutant des charbons de temps en temps, ensuite on ferme, ainsi qu'on l'a dit, la partie inférieure de la chemise pour commencer la fonte aussitôt après.

Le détail de la préparation du fourneau à rafraîchir le cuivre étant connu, je vais traiter de la manière de charger & de gouverner ce fourneau pour l'opération de la fonte du cuivre avec du plomb ou de la litharge, ou l'un & l'autre. Peut-être croira-t-on qu'il eût été plus régulier de commencer par donner la composition des charges pour en former les gâteaux ou pièces de liquation, que de parler de la manière dont ces charges doivent être portées au fourneau, mais comme elles ont un rapport immédiat à tout ce qui vient d'être décrit ci-dessus, je ne donnerai la composition des charges qu'après avoir parlé de la fonte.

CINQUIÈME SECTION.

De la Fonte, dite de rafraîchissement.

LE fourneau étant préparé & chauffé, comme il est dit dans les sections précédentes, on le remplit de charbon, on donne le vent, soit de la trompe, soit des soufflets, on charge tout de suite un baquet de scories provenant de la fonte de minéraux de cuivre. Ces scories, en fondant,

éduisent les parois d'une espèce de vernis qui augmente la chaleur du fourneau, & empêche qu'elle ne se perde en partie dans les murs. Bientôt après, on charge sur les charbons une vingtaine de livres du plomb destiné à former la première pièce de liquation, & tout de suite, à peu-près la moitié du cuivre qui doit entrer dans cette pièce, & par-dessus une trentaine de livres de litharge, & à leur défaut, on y supplée avec du plomb; pendant ce temps, l'aide-fondeur tient un petit panier d'environ 10 livres de charbon dont il recouvre les métaux ou matières métalliques dont on vient de parler. Sur ce charbon, le maître fondeur place le restant du cuivre du premier mélange destiné à former la première pièce de liquation, & aussitôt son aide recouvre ce cuivre d'un pareil panier de charbon; on laisse aller la fonte pendant environ un quart-d'heure au plus. L'on charge ensuite le plomb ou la litharge destiné à ce premier mélange, à l'exception néanmoins d'une trentaine de livres, & enfin un panier de charbon par-dessus.

Quand le bassin de l'avant-foyer est rempli environ aux trois quarts, on porte les trente livres de plomb réservées du premier mélange & un panier de charbon sur lequel on charge la moitié du cuivre du second mélange, de la litharge, comme il est dit pour la formation de la première pièce, en même temps le panier de charbon sur lequel on porte l'autre moitié du cuivre de ce second mélange, puis un panier de charbon.

Lorsque le bassin est plein, & qu'on juge que le premier mélange est entièrement fondu, on charge le plomb ou la litharge de la seconde pièce, en en réservant aussi une trentaine de livres que l'on ne charge également que lorsque le bassin est rempli aux trois quarts du mélange de la seconde pièce. On suit cette marche pendant toute la durée de la fonte.

Les matières fondues coulent incessamment par le trou de l'œil dans le bassin de l'avant foyer; mais comme elles seroient exposées au contact de l'air, & que celles de la surface perdroient leur phlogistique, on doit éviter cet

inconvenient en tenant toujours un peu de poussière de charbon sur ce bain.

Lorsqu'on n'emploie que du plomb & des litharges, cette fonte ne rend que très-peu de scories, sur-tout si le cuivre n'est pas trop chargé de substances étrangères, mais ces scories sont riches en cuivre & en plomb, & elles contiennent même un peu d'argent; on dira, *chapitre VII*, comment on doit traiter ces scories que nous nommerons déchets du rafraîchissement, pour les distinguer des déchets des autres opérations relatives à la liquation.

Le bassin de l'avant-foyer étant rempli des métaux d'un mélange, on en nettoie la surface, & on perce pour faire couler les matières dans la poêle de fer où l'on a entretenu un peu de feu de charbon jusqu'au moment de la première percée; mais avant de faire cette percée, on jette un peu d'eau dans la poêle & deux poignées d'argile sèche & pulvérisée qu'on délaye dans l'eau, & avec un balai on en enduit tout l'intérieur de la poêle, qui étant très-chaude, fait sécher l'enduit dans un moment.

Au lieu de percer, on peut puiser la matière dans le bassin & la porter dans la poêle avec une cuiller de fer également chauffée & enduite d'argile.

Il ne seroit pas possible de retirer la pièce du moule, sans un fort crochet de fer que l'on fait entrer d'environ 2 pouces dans le métal en fusion, de manière que la partie recourbée reste en dehors. Au moyen d'un bâton refendu ou d'une tenaille que l'on pose sur le bord du moule, on tient le crochet dans la position convenable, après quoi, on jette de l'eau sur les bords de la poêle; elle se répand sur la surface du métal: il n'en faut que peu dans le premier instant, mais ensuite on peut sans danger en remplir le moule entièrement. Comme elle ne tarde pas à bouillir, on la jette hors du moule avec un balai, & l'on y en substitue de fraîche, ce qu'on répète jusqu'à ce qu'on juge que la pièce soit entièrement figée; alors, avec un levier, soit de bois, soit de fer, de 7 à 8 pieds de longueur, & qu'on
passe

passé dans le crochet, on enlève la pièce de son moule. En frappant avec un marteau tout autour du crochet, on le dégage de la pièce pour le faire servir à une autre; mais comme il peut s'en rompre, il est bon d'en avoir plusieurs avant de commencer la fonte.

Aussitôt qu'une pièce de liquation est sortie de son moule, l'on y jette, comme on l'a déjà dit, de l'argile. S'il est resté un peu d'eau dans le moule, il n'est pas nécessaire d'y en ajouter; mais dans le cas qu'elle soit toute évaporée, l'on y en met un peu, & avec le balai l'on agite cette eau qui délaye l'argile, pour former le petit enduit dont on a parlé ci-dessus, qui conserve la poêle & qui facilite la sortie de la pièce. Tout ce travail doit être exécuté par un maître fondeur & deux aides.

Les Allemands nomment la fonte du cuivre noir tenant argent, avec du plomb ou des matières qui le contiennent, *rafraîchissement du cuivre*. Sans doute qu'ils ont donné cette dénomination à cette fonte, parce qu'elle exige un plus petit degré de chaleur pour mettre le cuivre en fusion, que lorsqu'on le fond seul. En effet, le plomb ou la litharge qu'on est forcé de faire entrer dans la composition de cette fonte, facilitent extrêmement la fusion du cuivre; c'est ce qui fait que cette opération va d'une vitesse incroyable. Nous avons vu à Grünthal en Saxe, faire sept pièces de liquation par heure, de manière qu'en un poste de 12 heures on en faisoit 84, pour lesquelles on consommoit environ 200 pieds cubes de charbon de bois.

On vient de voir la description entière de la fonte dite de *rafraîchissement*; l'on va, dans les sections suivantes, traiter de la composition des mélanges des matières soumises à cette fonte. Comme il est rare d'avoir tous cuivres qui contiennent la quantité d'argent requise pour faire les mélanges de la manière la plus avantageuse, on est souvent forcé de faire de deux espèces de *rafraîchissements*, qu'on désigne par *rafraîchissement riche* & *rafraîchissement pauvre*, ainsi qu'on va le voir dans la section suivante.

Différence du rafraîchissement riche au pauvre.

TOUT cuivre qui contient 12 onces ou environ d'argent par quintal, a la teneur convenable pour le soumettre au rafraîchissement riche. S'il en tient davantage, il reste de ce métal précieux dans le cuivre, quoiqu'on ait bien opéré, & d'autant plus que la teneur du cuivre surpasse les 12 onces. En pareil cas, on est forcé de repasser une seconde fois ce cuivre avec du plomb, & par tous les procédés relatifs à la liquation, pour en obtenir l'argent qui y étoit resté après la première opération; ce qui occasionne une double dépense.

Le rafraîchissement pauvre est celui dans lequel on n'emploie que des cuivres dont la teneur en argent n'est que de 4, 5 & 6 onces par quintal. L'inconvénient qui résulte de ce peu de richesse, est infiniment plus considérable que celui d'avoir des cuivres qui tiennent 15 à 20 onces & au-dessus d'argent, & que l'on est obligé de passer deux fois aux opérations de la liquation pour en obtenir tout l'argent, ainsi que je viens de le dire; car dans cette circonstance on obtient beaucoup d'argent, & dans celle du rafraîchissement pauvre, le plomb ou l'œuvre qui vient de la liquation, ne tient qu'une once $\frac{1}{2}$ à 2 onces par quintal, ce qui oblige de repasser cet œuvre avec d'autres cuivres de la même teneur ou à peu-près, & d'en faire de nouveau la liquation; alors la richesse du plomb sera portée à environ 3 onces $\frac{1}{2}$ par quintal.

L'on voit que si dès la première liquation on affinoit ce plomb, la dépense seroit double ainsi que le déchet ou l'évaporation du plomb, & qu'il convient mieux de le repasser une seconde fois avec de nouveau cuivre & de le liquéfier.

C'est d'après ces principes reconnus en Allemagne & dans toutes les fonderies de liquation bien entendues, qu'on doit se régler. Au reste, les exemples que je donnerai pour tous

les cas qui peuvent se présenter, faciliteront beaucoup l'intelligence de ce qui précède.

SEPTIÈME SECTION.

Des proportions des métaux dans les pièces de liquation.

En Allemagne, où il se liquéfie beaucoup de cuivre, on a des ateliers qui permettent de travailler en grand volume; en conséquence les pièces de liquation s'y font communément du poids de 350 livres chacune, & on les compose, savoir; de 3 quarts de quintal ou 75 livres de cuivre, & de 11 quarts de quintal ou 275 livres de plomb. Ils comptent par quart, afin de rendre les calculs plus faciles à faire. Ces proportions sont pour le rafraîchissement riche.

Quant au rafraîchissement pauvre, les pièces sont également composées de 75 livres de cuivre & seulement de 10 quarts ou 250 livres de plomb : d'où l'on voit que dans le travail riche les pièces sont du poids de 350 livres, & que dans le pauvre elles ne pèsent que 325 livres ou 25 livres de moins que dans le travail riche. On voit aussi que ce moins porte sur le plomb, & non sur le cuivre dont la quantité est invariablement la même dans les deux cas.

Comme il n'y a point en France de fonderies appartenant au Roi, ainsi qu'en Allemagne où elles sont la plupart pour le compte des Électeurs qui y font traiter beaucoup de cuivre; & que d'ailleurs chaque compagnie de mine n'a, chez nous, que son petit établissement proportionné à l'importance des produits de sa mine, je crois devoir conseiller de faire des pièces de liquation moins fortes que celles dont je viens de parler; elles seront plus aisées à manier; enfin on pourra, à cet égard, procéder suivant les circonstances. Je vais donner le poids des pièces qui m'a paru le plus convenable pour un petit établissement, & les proportions des métaux qui doivent les composer, sans avoir ici égard à leur teneur en argent.

Dans le cas d'un rafraîchissement riche, les pièces seront

composées de 50 livres de cuivre & de 182 livres de plomb, ce qui fait 232 livres pour le poids de chaque pièce de liquation. On peut voir que c'est la même proportion du cuivre, & à très-peu-près celle du plomb, observées pour les grandes pièces ci-dessus.

Quant au rafraîchissement pauvre, les pièces ne doivent peser que 216 livres, & être composées de 50 livres de cuivre & de 166 livres de plomb, qui'est aussi, à 2 tiers de livre près, la proportion de plomb requise dans cette circonstance.

HUITIÈME SECTION.

Dispositions préliminaires avant de faire les mélanges.

ON ne doit entreprendre la fonte du rafraîchissement que lorsqu'on a en magasin une certaine quantité de cuivre noir tenant argent, & du plomb ou des litharges en suffisante quantité. Il faut alors, 1.^o connoître très-parfaitement la teneur en argent de tous les cuivres, de laquelle on doit s'être assuré par des essais les plus exacts; 2.^o savoir le poids de chaque espèce de cuivre, afin que connoissant ce qu'un quintal doit rendre, on puisse juger de la quantité totale de l'argent contenu dans la masse entière de chaque espèce de cuivre; 3.^o enfin, il est essentiel de connoître le poids total de tous ces cuivres pris ensemble, & celui de tout l'argent qui y est contenu, pour pouvoir déterminer par une règle de proportion, ce que la masse entière de tous ces cuivres doit rendre d'argent par quintal.

C'est d'après toutes ces connoissances qu'on doit partir pour faire les mélanges de la manière la plus convenable, relativement aux différentes teneurs des cuivres en argent; c'est aussi par-là qu'on verra si ces cuivres sont en général d'une teneur convenable pour passer au rafraîchissement riche, ou s'il n'y en a qu'une partie qui-en soit susceptible, ou enfin, si leur totalité ne peut être traitée que par rafraîchissement pauvre.

Afin de donner le plus de lumières possibles sur une matière aussi importante, on va tracer un petit tableau par colonnes, contenant des cuivres noirs, leur poids, leur teneur en argent par quintal, & la quantité d'argent que la masse entière de chaque espèce de cuivre recèle.

T A B L E A U

DES CUIVRES TENANT ARGENT.

NUMÉROS des Cuivres, suivant l'ordre des essais.	POIDS des Cuivres.	TENEUR EN ARGENT de chaque quintal de Cuivre, d'après les essais.				TOTAL DE L'ARGENT contenu dans chaque espèce de Cuivre.			
		Mars.	Onces.	Gros.	Grains.	Mars.	Onces.	Gros.	Grains.
N. ^{os} 1.	3000.	2.	4.	2.	36.	76.	1.	3.	"
2.	2764.	"	4.	5.	18.	16.	"	5.	42 $\frac{1}{2}$.
3.	6218.	"	5.	3.	54.	42.	4.	0.	26 $\frac{1}{2}$.
4.	5601.	"	6.	2.	"	43.	6.	"	36.
5.	5567.	"	3.	7.	18.	27.	1.	4.	49 $\frac{1}{2}$.
6.	1535.	"	3.	1.	"	5.	7.	7.	54.
7.	1544.	"	4.	5.	36.	9.	0.	3.	"
8.	1939.	"	7.	6.	36.	18.	7.	3.	63.
9.	1826.	"	10.	1.	18.	23.	1.	3.	45.
10.	1593.	"	10.	7.	36.	21.	6.	1.	63.
11.	1541.	"	9.	3.	"	18.	0.	3.	54.
12.	1693.	"	5.	0.	45.	10.	5.	7.	56 $\frac{1}{2}$.
13.	1623.	"	5.	1.	45.	10.	4.	3.	41 $\frac{1}{3}$.
14.	3052.	"	5.	5.	22 $\frac{1}{2}$.	21.	2.	7.	2.
15.	1409.	"	5.	4.	38.	9.	6.	3.	28.
	40905.					355.	1.	3.	57 $\frac{1}{3}$.

Ce tableau fait voir; 1.^o qu'il y a quinze espèces de cuivre dont les teneurs en argent sont différentes; 2.^o que tous ces cuivres pèsent ensemble 40,905 livres; 3.^o que leur totalité doit contenir en argent 355 marcs 1 once 3 gros 57 grains $\frac{1}{2}$, ce dont on doit s'être assuré par des essais faits doubles de chaque cuivre en particulier. Si maintenant on dit: si 40,905 livres de cuivre tiennent 355 marcs 1 once 3 gros 57 grains, combien doivent tenir 100 livres de ces mêmes cuivres? on trouvera 6 onces 7 gros 41 grains $\frac{1}{2}$ pour la teneur moyenne de tous ces cuivres.

Ces éclaircissémens vont servir de base à la composition des mélanges & à leur préparation pour la fonte du rafraîchissement.

On se rappellera que j'ai dit que tout cuivre qui recèle 12 onces d'argent par quintal, a la teneur convenable pour être traité dans un rafraîchissement riche; celle de tous les cuivres portés au tableau, n'est, comme on vient de le voir, que de 6 onces 7 gros 41 grains $\frac{1}{2}$ par quintal; ce qui mettroit dans le cas de les traiter tous par rafraîchissement pauvre, s'il n'y en avoit pas parmi eux qui eussent une teneur plus forte.

Ce tableau fait voir que le cuivre n.^o 1.^{er} passe 20 onces ou 2 marcs $\frac{1}{2}$. Celui-ci seroit donc, d'après ce qui est dit, section VI.^e, dans le cas de passer deux fois aux opérations de la liquation, afin d'en pouvoir obtenir tout l'argent; mais comme il s'en trouve de plus pauvres également portés au tableau, on doit en faire entrer avec le premier les quantités convenables, pour que le tout résultant de ces parties, contienne environ douze onces d'argent par quintal; ce qui formera un rafraîchissement riche.

On a vu, dans la VII.^e section, qu'au travail riche, chaque pièce de liquation ne doit être composée, dans les petits ateliers, que de 50 livres de cuivre & de 182 livres de plomb; ce qui fait 232 livres pour le poids des pièces de liquation. Cela posé, il s'agit de trouver dans le tableau ceux des cuivres qui auront la teneur requise, c'est-à-dire,

à peu-près 12 onces par quintal, & 6 onces pour les 50 livres de cuivre qui entreront dans chaque pièce. L'on en va donner un exemple dans la composition du mélange qui suit :

PREMIER MÉLANGE

*Pour une pièce de liquation dans le cas du rafraîchissement.
riche.*

	Onces.	Gros.	Grains.
15 livres de cuivre du N. ^o 1. ^{er} , contenant 20 onces 2 gros 36 grains par quintal, les 15 l. donneront, ci	3.	"	27.
10 livres de cuivre N. ^o 4, dont la teneur par quintal est de 6 onces 2 gros, pour les 10 livres, ci..	"	5.	"
10 <i>Idem</i> , N. ^o 8, tenant 7 onces 6 gros 36 grains, ci pour les dix livres,	"	6.	18.
10 livres du N. ^o 9, à 10 onces 1 gros 18 grains, font, ci.....	1.	0.	9.
5 livres du N. ^o 10, à 10 onces 7 gros 36 grains, font.....	"	4.	27.
182 livres de plomb de litharge, dont la teneur en argent ne doit pas être comptée.....			
232 livres, dont 50 livres de cuivre contenant.....	6.	"	9.

REMARQUES.

Ce mélange fait voir que les 50 livres de cuivre qui entrent dans la composition de chaque pièce, tiennent

6 onces 9 grains d'argent, ou 12 onces 18 grains par quintal. On auroit bien trouvé par le calcul, la quantité qu'il eût été nécessaire de prendre de chaque espèce de cuivre pour n'avoir que 6 onces d'argent au lieu de 6 onces 9 grains; mais outre que cette précision n'est pas absolument nécessaire & qu'on peut même négliger les grains, cela occasionneroit de l'embaras dans les pesées des cuivres, une perte de temps & souvent des erreurs.

Deux considérations obligent de réduire ces cuivres noirs en petits morceaux gros comme des noix ou environ. Premièrement, il ne seroit pas possible sans cela d'en faire des pesées aussi petites que celles que les mélanges exigent. Secondement, ces petits morceaux présentent ensemble infiniment plus de surface que s'ils étoient en une seule masse; ce qui fait qu'étant jetés dans le fourneau, la chaleur les pénètre & les fait entrer beaucoup plus vite en fusion que des morceaux volumineux qui ne se fondroient qu'imparfaitement & très-long-temps après que le plomb seroit déjà rendu dans le bassin de l'avant-foyer: inconvénient qu'il faut éviter, parce qu'alors il se trouveroit des pièces de liquation qui contiendroient plus de cuivre que les autres, & par conséquent plus d'argent, dont le plomb laisseroit une forte partie dans le cuivre après l'opération de la liquation; & au contraire les pièces qui contiendroient plus de 182 liv. de plomb & moins de 50 livres de cuivre, seroient pauvres en argent, & le plomb très-difficile à liquéfier, sans en même temps faire couler avec lui une bonne partie du cuivre.

Dans son traité des fontes, Schlutter a donné une machine à casser le cuivre; elle est représentée sur la planche 48. Elle n'est utile que dans le cas où l'on a des cuivres en lingots ou gros plateaux, que l'on fait rougir pour les rendre plus faciles à casser. On peut se passer de machine pour cet objet, en cassant les gâteaux de cuivre noir à mesure qu'on les lève du bassin de réception; & tandis qu'ils sont rouges, on parvient aisément à les briser à coup de masse. Tous les petits morceaux qui en sont le

résultat

résultat se mettent en magasin, de manière qu'on forme un tas de toute une fonte de mattes grillées réduites en cuivre noir, sur lequel on place une planche portant le numéro de la fonte. Si c'est la première, on mettra n. 1.^{er}, & ainsi des autres. Ce sont ces cuivres qu'on prend pour en faire le rafraîchissement; mais pour en bien connoître la teneur en argent, il convient d'en prendre à deux différentes fois dans le bassin de réception, savoir; après avoir levé la première plaque de cuivre, & lorsqu'il y en a environ la moitié de levée: environ deux gros à chaque fois suffisent; on verse ce cuivre dans une petite lingotière ou dans un creuset; ces petits boutons résultant de toutes les coulées d'une fonte, sont fondus ensemble dans un creuset & jetés en lingot; on en coupe pour faire un essai double. On en fait autant pour toutes les fontes. Ces essais étant faits, l'on écrit sur la petite planche, au-dessous du n.º, la teneur en argent du cuivre du tas où elle se trouve; ceci est aisé à faire, & rend plus facile le choix des différens cuivres pour en faire les mélanges.

Si le cuivre étoit en lingot, on en couperoit deux petits boutons, l'un au-dessus & l'autre au-dessous de chaque lingot, & on fondroit tous ces petits boutons en une seule masse dont on feroit l'essai.

Je n'ai fait entrer dans le mélange ci-dessus que du plomb sous sa forme métallique, parce que, lorsqu'on fait un premier rafraîchissement, on peut n'avoir que cette matière à ajouter; mais lorsqu'on aura passé à la coupelle le plomb qui proviendra de la liquation, des pièces du premier rafraîchissement, on emploiera avec avantage des litharges dans les rafraîchissemens suivans; & comme elles ne rendent pas à beaucoup près leur poids en plomb, il faut, pour obtenir les 182 livres de ce métal, en employer une quantité suffisante pour, après leur revivification, faire la quantité de plomb requise à chaque pièce.

Schlutter, page 523, dit: « qu'il faut 35 livres de litharge pour tenir lieu d'un quart de quintal de plomb,

Mém. 1788.

U u u

» & 40 livres de test pour la même quantité; » d'où il s'en suivroit que les litharges ne rendroient que 71 liv. $\frac{7}{8}$ de plomb, & le test 62 liv. $\frac{1}{2}$. Il y a certainement erreur, car les litharges doivent donner plus de plomb. Quant au test, c'est à peu-près la teneur. Ce même auteur dit ailleurs que le quintal de plomb est de 116 liv.; c'est sans doute d'après cela qu'il a établi son calcul ci-dessus; en ce cas, 35 liv. de litharge devroient rendre 29 liv. de plomb, qui sont le quart du quintal de 116 liv.: & en suivant la même proportion, 100 liv. de ces litharges devroient rendre 82 liv. $\frac{6}{7}$ de plomb, ce qui, selon moi, est un peu trop pour la fonte dont il s'agit. Je ne compte régulièrement que sur 80 liv., non-seulement à cause du plomb qui se trouve vitrifié dans la fonte du rafraîchissement, mais aussi par l'augmentation du poids que le plomb éprouve, en passant de son état métallique à celui de chaux ou de litharge: augmentation connue par tous les chimistes.

Suivant Schutter, 160 liv. de test devroient rendre 116 liv. de plomb, ce qui fait que, selon lui, 100 liv. doivent rendre 72 liv. $\frac{1}{2}$ de plomb; mais ce résultat ne peut pas avoir lieu, non-seulement à cause du poids des cendres, mais aussi par rapport à l'augmentation du poids du plomb qui se trouve partie réduit en chaux, & partie vitrifié dans ses cendres. Je ne compte communément que sur 60 liv. de plomb par 100 liv. de test, ce qui fait 20 liv. de moins que la litharge, à cause des cendres contenues dans le test.

Il résulte de ceci que la litharge perd dans la fonte du rafraîchissement 20 par 100, & le test 40, au moyen de quoi, lorsqu'on n'ajoutera que de la litharge dans un rafraîchissement riche, il en faudra à chaque pièce 227 liv. $\frac{1}{2}$ pour obtenir les 182 liv. de plomb; & si on n'y employoit que du test, ce que je ne conseille pas, par les raisons que je déduirai ailleurs, il en faudroit 303 liv. $\frac{1}{3}$ pour obtenir la même quantité de plomb.

D'après ces éclaircissements, il sera aisé de faire les

mélanges en ne se servant que de litharges, qui feront pour le moins, un aussi bon effet que le plomb. Nous allons donner un mélange de cette espèce, en y faisant entrer les cuivres des mêmes numéros du premier.

SECOND MÉLANGE,

AVEC DE LA LITHARGE,

POUR UN RAFRAICHISSEMENT RICHE.

	Onces.	Gros.	Grains.
15 livres cuivre N. ^o 1. ^{er} , contenant 20 onces 2 gros 36 grains par quintal, les 15 livres rendront.	3.	"	27.
10 livres, <i>idem</i> , N. ^o 4, à 6 onces 2 gros par quintal, ci.....	"	5.	"
10 livres du N. ^o 8, à 7 onces 6 gros 36 grains, ci.....	"	6	18.
10 livres du N. ^o 9, à 10 onces 1 gros 18 grains, ci.....	1	0.	9.
5 livres du N. ^o 10, à 10 onces 7 gros 36 grains, font.....	"	4.	27.
182 livres de plomb ou 227 livres $\frac{1}{2}$ de litharge pour en tenir lieu.			
232 livres, poids de la pièce, argent y contenu.....	6.	"	9.

REMARQUES.

Le mélange précédent présente les mêmes résultats que le premier, quoiqu'on y fasse entrer toutes litharges au lieu de plomb; car on compte ici pour rien l'argent que ces

U u ij

litharges peuvent contenir, qui communément est depuis un gros jusqu'à un gros $\frac{1}{2}$ par quintal du plomb qui en provient. Si on comptoit cet argent, il se trouveroit en moins, après l'affinage du plomb provenant de la liquation, puisqu'il en reste encore autant dans les nouvelles litharges qui résulteroient de ce plomb, quoique l'affinage en soit bien fait.

Les deux mélanges ci-dessus sont dans le cas des rafraîchissemens riches; celui qui va suivre est pour un rafraîchissement pauvre. On a dit que les cuivres dont la teneur en argent n'est que d'environ 6 onces par quintal, doivent passer au rafraîchissement pauvre, sur-tout lorsqu'on n'en a pas d'autres plus riches à y mêler.

TROISIÈME MÉLANGE,

Pour un rafraîchissement pauvre.

		Onces.	Gros.	Grains.
25	livres de cuivre du N. ^o 4, dont la teneur est de 6 onces 2 gros pour les 25 livres, ci.	1.	4.	36.
25	livres du cuivre N. ^o 14, qui tient par quintal 5 onces 5 gros 22 grains $\frac{1}{2}$. Ces 25 livres doivent rendre.	1.	3.	23.
166	livres de plomb, ou pour en tenir lieu, 207 livres & demie de litharge.			
216	livres poids de la pièce, argent y contenu.	2.	7.	59.

REMARQUES.

CE mélange fait voir, 1.^o qu'on y a employé 16 livres

de plomb de moins que dans ceux destinés aux rafraîchissemens riches ; 2.^o que l'argent qui doit exister dans les 50 liv. de cuivre, n'est que de 2 onces 7 gros 59 grains, ce qui n'est pas la moitié de celui contenu dans les 50 liv. de cuivre des mélanges précédens ; c'est ce qui fait qu'on peut sans inconvénient supprimer une partie du plomb dans cette circonstance, comme on s'en convaincra en comparant ce mélange avec les précédens.

J'ai déjà dit que je ne conseillois pas d'ajouter de test dans les mélanges d'un rafraîchissement riche ; mais si on manquoit de plomb d'addition & de litharge, on pourroit dans celui-ci ajouter un tiers & même la moitié de test, & le surplus en plomb & litharge, ayant égard à ce qui est dit relativement à la teneur du test en plomb.

Le test, en raison des cendres, est plus difficile à fondre que la litharge, mais cela ne fait rien dans la fonte dont il s'agit, puisqu'il entre bien en fusion au degré de chaleur nécessaire à fondre le cuivre. Les motifs qui m'ont porté à ne pas conseiller d'en ajouter dans les rafraîchissemens riches, sont, 1.^o parce que ce test provenant de l'affinage du plomb liquéfié ou séparé du cuivre par la liquation, contient toujours un peu de ce dernier métal qui se retrouve dans le rafraîchissement, & qui augmente celui qu'on y ajoute ; 2.^o parce que le test fournit naturellement des scories qui peuvent embarrasser ou obstruer le fourneau, & qui, même en se rendant avec les matières fondues dans le bassin de l'avant-foyer, couvrent la surface des métaux en bain, d'où l'on est contraint de les enlever avant même qu'elles soient figées, notamment lorsque le bassin est plein & qu'il s'agit de faire tout de suite couler la matière dans la poêle. On ne peut pas enlever ces crasses, sur-tout dans leur état de fluidité, sans en même-temps enlever du cuivre, du plomb, & par conséquent de l'argent. Ces inconvéniens sont moins à craindre dans les rafraîchissemens pauvres que dans les riches,

Nous n'avons jusqu'ici employé dans ces mélanges que des litharges ou des plombs revivifiés des litharges, dont on regarde la teneur en argent comme nulle. Mais souvent il arrive qu'on a des plombs marchands qui contiennent de l'argent, tels que sont ceux qui ayant déjà passé une fois au rafraîchissement pauvre, s'y sont chargés de l'argent du cuivre, & qui peuvent encore absorber celui des cuivres où il s'en trouve peu. Le mélange suivant va servir d'exemple dans cette circonstance.

QUATRIÈME MÉLANGE

Avec des plombs tenant argent pour un rafraîchissement riche.

		Onces.	Gros.	Grains.
50	livres de cuivre N.° 7, qui contient par quintal 4 onces 5 gros 36 grains, ce qui fait pour les 50 livres, ci.....	2.	2.	54.
182	livres de plomb, contenant 2 onces d'argent par quintal.....	3.	5.	8.
232	livres de plomb & cuivre, argent, ci.	5.	7.	62.

REMARQUES.

CE mélange fait voir : 1.° que si l'on a des cuivres qui ne contiennent en argent que 4 onces 5 gros 36 grains par quintal, & du plomb dont la teneur en argent soit de 2 onces aussi par quintal, on pourra en faire un rafraîchissement riche.

2.° Que si le plomb, au lieu de 2 onces, tenoit 4 onces d'argent, on ne pourroit se dispenser d'en passer une partie à la coupelle pour en extraire l'argent, avant de pouvoir faire les mélanges, sans quoi les pièces de liquation qui en résulteroient se trouveroient contenir beaucoup plus

de 6 onces d'argent; d'où il arriveroit que le cuivre en retiendrait une partie qui seroit en pure perte, ou bien il faudroit le repasser une seconde fois par toutes les opérations de la liquation; ce qui occasionneroit des frais inutiles & du déchet sur les matières.

Si le cuivre ne contenoit, comme ci-dessus, que 4 onces 5 gros 36 grains par quintal, il est aisé de voir qu'en ce cas on devoit conserver la moitié du plomb en nature, & extraire les 4 onces d'argent par quintal de l'autre moitié, en le réduisant en litharge par la coupellation; alors on seroit dans le cas de faire les mélanges de la manière la plus avantageuse, en y faisant entrer moitié du plomb en œuvre & moitié en litharge: le mélange suivant servira d'exemple.

CINQUIÈME MÉLANGE,

Pour un rafraîchissement riche, avec du plomb tenant argent & des litharges.

	Onces.	Gros.	Grains.
50 livres cuivre N. ^o 7, à 4 onces 5 gros 36 grains, les 50 livres doivent rendre, ci.	2.	2.	54.
91 livres de plomb, à 4 onces d'argent par quintal, doivent contenir...	3.	5.	8.
91 livres de plomb de litharge; mais comme il est inutile de préalablement revivifier ces litharges, on en ajoutera 113 livres $\frac{6}{10}$, qui doivent rendre les 91 livres de plomb.			
232 livres poids de la pièce, argent, ci	5.	7.	62.

Le dernier mélange donne les mêmes résultats que les précédens.

Ceux qui auroient beaucoup de cuivre à soumettre à la liquation, pourroient sans inconvénient en former des pièces de liquation plus fortes que celles dont je viens de donner les mélanges. En ce cas, je conseillerois de les faire du poids de 350 livres, & il faudroit, pour suivre les proportions indiquées, employer pour chaque pièce 75 livres de cuivre & 275 livres de plomb, ou suffisamment de litharge pour tenir lieu de ce dernier métal. Je vais donner un mélange dans cette circonstance.

SIXIÈME ET DERNIER MÉLANGE

Dans le cas d'un rafraîchissement riche, pour une pièce du poids de 350 livres.

	Onces.	Gros.	Grains.
25 livres cuivre N.° 1, dont la teneur est de 20 onces 2 gros 36 grains par quintal, ci pour les 25 livres	5.	"	45.
25 livres, <i>idem</i> , N.° 4, à 6 onces 2 gros, font.	1.	4.	36.
25 livres cuivre N.° 11, à 9 onces 3 gros, pour les 25 livres, ci..	2.	2.	54.
275 livres de plomb, ou $343\frac{3}{4}$ de litharge pour tenir lieu de ce plomb, ce qui se trouve facilement en prenant le quart des 275 livres de plomb qu'on ajoute avec lui.			
350 livres poids de la pièce, argent, ci..	8.	7.	63.

REMARQUES.

REMARQUES.

ON observera qu'il ne manque que 9 grains de fin dans ce mélange pour faire 9 onces, qui est la teneur requise pour un mélange de rafraîchissement riche; car quoique dans les mélanges précédens il n'y ait que 6 onces d'argent & qu'il s'en trouve 9 dans celui-ci, cela vient de ce qu'il y a un tiers de cuivre de plus; & si on fait attention aux données, on verra que les trois espèces de cuivre qu'on a prises pour le mélange, tiennent une quantité moyenne de 11 onces 7 gros 60 grains d'argent par quintal; d'où il suit que les 75 livres de cuivre qui entrent dans la composition de ce mélange, doivent contenir les 8 onces 7 gros 63 grains de fin portés à la dernière colonne du mélange.

Il est inutile de donner l'exemple d'un rafraîchissement pauvre dans les cas où l'on se porteroit à faire de grandes pièces de liquation. Il suffira de répéter que la quantité de cuivre doit être la même, c'est-à-dire, de 75 liv., & celle du plomb diminuée de 25 liv., c'est-à-dire, qu'au lieu de 275 liv. de plomb, il ne doit y en entrer que 250 liv.

Je crois avoir suffisamment établi la manière de faire les mélanges pour la composition des pièces de liquation dans tous les cas qui pourroient se présenter; mais on prévient qu'il faut de l'attention & beaucoup d'ordre pour opérer avec succès.

Je terminerai le détail sur le rafraîchissement du cuivre, par quelques réflexions sur la teneur du plomb qui doit provenir de la liquation des pièces, tant du rafraîchissement riche que du pauvre, & enfin sur ce qui peut rester d'argent dans le cuivre, quoique les procédés soient bien exécutés.

Si l'on fait attention que dans une petite pièce d'un rafraîchissement riche, par exemple, celle du premier mélange, il entre 182 livres de plomb, & que ce plomb

est censé absorber & entraîner avec lui, dans l'opération de la liquation, les 6 onces 9 grains d'argent contenus dans le cuivre, il sera aisé de s'apercevoir que l'œuvre se fera enrichi de 3 onces 2 gros 31 grains $\frac{2}{3}$ par quintal, ce qui se trouvera en disant : si 182 liv. de plomb tiennent 6 onces 9 grains, combien doivent tenir 100 liv., &c. ? Le plomb provenant d'un rafraîchissement pauvre, ne peut pas avoir la même teneur : nous prendrons pour exemple le troisième mélange où l'on n'a employé que 166 liv. de plomb, qui doivent se charger des 2 onces 7 gros 59 grains d'argent contenus dans le cuivre.

Pour trouver la teneur que ce plomb doit avoir après être liquéfié, on dira : si 166 liv. de plomb recèlent 2 onces 7 gros 59 grains d'argent, combien 100 liv. de ce plomb doivent-elles contenir ? On aura 1 once 6 gros 25 grains.

On voit maintenant que ce plomb est trop pauvre pour être passé à la coupelle avec avantage ; c'est pourquoi on le repasse avec des cuivres pauvres en argent, ainsi que nous l'avons dit.

Quoique les opérations de la liquation soient faites avec la plus grande exactitude, il reste toujours un peu d'argent dans le cuivre ; car, quoique ce métal précieux n'ait pas autant d'affinité avec le cuivre qu'avec le plomb, il en a assez pour en retenir, & quand il n'en restera qu'environ 4 gros par quintal de cuivre, on pourra être assuré que les procédés auront été bien exécutés.

D'après ce raisonnement, on seroit porté à croire que le plomb provenant de la liquation des pièces, ne devoit pas tenir la quantité d'argent par quintal que les calculs précédens indiquent ; mais on verra que ces plombs doivent rendre par quintal les quantités d'argent qui y sont portées, si l'on fait attention, 1.^o qu'en faisant liquéfier le plomb contenu dans les pièces, il en sort d'abord avec beaucoup plus d'abondance que vers la fin de l'opération ; 2.^o que celui qui part le premier, est plus riche en argent que le dernier ; 3.^o enfin, que le plomb qui reste dans les pièces

après leur liquation, & que l'on en retire par le ressuage, ne tient que très-peu d'argent. Il ne seroit pas même étonnant que la teneur en argent des plombs fût plus forte, ce qui, d'une part, peut provenir du plomb pauvre en argent qui reste dans le cuivre, & de l'autre, du plomb qui perd son phlogistique, tant dans la voie du fourneau de liquation que dans le bassin même, ce qui rend plus riche l'œuvre que l'on en obtient sous sa forme métallique.

Il y a des Allemands qui comptent 16 livres de plomb par chaque lot ou demi-once d'argent existant dans le cuivre; mais cela n'est pas applicable à tous les cas. Par exemple, du cuivre qui tient par quintal 24 lots ou 12 onces, les $\frac{3}{4}$ de quintal ou 75 livres réelles qui entrent dans une grande pièce, contiendroient 18 lots; or, seize fois 18 livres de plomb feroient 288 liv., tandis que 275 liv. suffisoient pour retirer tout l'argent de ce cuivre.

Si le cuivre ne tenoit que 9 lots par quintal, il n'y auroit que 6 lots dans une pièce, & six fois 16 liv. de plomb ne feroient que 96 liv., ce qui seroit de beaucoup trop peu: pour bien faire la liquation, il vaut mieux s'en tenir aux proportions indiquées par les mélanges que j'ai donnés.

Les grands détails dans lesquels je suis entré relativement aux rafraîchissemens du cuivre tenant argent avec le plomb, rendront beaucoup plus intelligibles les opérations qui vont suivre. Comme celle qui succède immédiatement après le rafraîchissement est la liquation, je vais en traiter dans le chapitre suivant.

CHAPITRE. II.

De la liquation.

LA liquation est le procédé par lequel on extrait du cuivre le plomb qui se charge de l'argent contenu dans ce premier métal.

Quoique cette opération paroisse fort simple, elle exige néanmoins beaucoup d'attention de la part du fondeur, soit pour gouverner le feu de manière que toutes les pièces de liquation reçoivent en même temps une chaleur égale, soit pour empêcher que le cuivre se fonde avec le plomb.

J'ai représenté sur la *planche II* le fourneau servant à cette fonte, dans lequel on met, à chaque opération, six pièces ou pains de liquation; il est exécuté à la fonderie de Grünthal en Saxe.

Schlutter en donne un à peu-près semblable sur la *planche 48* de son traité des fontes. Comme il trouva alors quelques inconvéniens dans la forme de ces fourneaux, sur-tout par rapport à la consommation du charbon, il en fit construire un à réverbère qui chauffoit avec le bois. Il en donna le dessin, *planche XLIX*; mais celui-ci est aussi sujet à beaucoup d'inconvéniens, que j'expliquerai dans le *chapitre IV*, où je donnerai le détail du double procédé de la liquation & du reffuage qu'on peut faire dans un seul fourneau; mais il s'agit maintenant de décrire celui de la liquation qui s'opère, dans le petit fourneau ordinaire.

P R E M I È R E S E C T I O N.

Préparation du fourneau.

LORSQU'ON est dans le cas de faire la liquation, on enduit les plaques de fer fondu qui forment l'aire du foyer, avec de l'argile délayée dans l'eau. Il est même bon de jeter un peu de poussière de charbon de bois sur cet enduit encore tout frais, afin qu'elle s'y rende adhérente. Cet enduit conserve les plaques de fer.

On arrange ensuite six pièces de liquation sur les plaques de fer. (*Voyez la planche II & son explication*), en observant que ces pièces soient à des distances égales les unes des autres; ce qui peut se faire très-facilement, en plaçant chaque pièce vis-à-vis des petits murs de séparation des soupiraux.

Comme ces pièces sont difficiles à remuer & à porter sur le fourneau, on a une grande tenaille suspendue à une chaîne, au moyen de laquelle les deux hommes qui conduisent cette opération, placent successivement les six pièces dans les endroits qu'elles doivent occuper. Afin de tenir ces pièces dans une position verticale, & d'empêcher qu'elles ne s'appuient les unes contre les autres, on doit mettre entr'elles des petits bouts de bûches.

Les six pièces étant bien rangées, on ferme le devant du fourneau avec sa porte de fer lutée, & on remplit le fourneau de charbon, de manière que l'entre-deux des pièces & tous les autres espaces en soient exactement garnis jusqu'à la hauteur des murs du fourneau.

Comme il peut arriver que quelques gros charbons se mettent de travers entre les pièces, & qu'ils empêchent les autres de se bien ranger, ce qui occasionneroit des vides préjudiciables à l'opération, je conseille de remplir exactement les entre-deux des pièces avant de placer la porte ou parois antérieure, & ensuite de finir de remplir le fourneau avec du charbon. On met un peu de charbon dans la voie ou canal où le plomb doit couler; on en remplit aussi le bassin de réception.

DEUXIÈME SECTION,

Fonte dite de liquation.

Comme il est indispensable de chauffer le bassin de réception avant que le plomb s'y rende, on commence par mettre le feu aux charbons dont ce bassin est rempli, ensuite on allume ceux de la voie; enfin, on met des charbons allumés sur ceux contenus dans le fourneau, en observant d'en répandre sur toute sa longueur, afin que le feu ne gagne pas plus vite dans une partie que dans l'autre. Ces charbons s'allument successivement de haut en bas, & bientôt le plomb commence à couler dans la voie, d'où il se rend dans le bassin de réception, à cause de la pente

donnée au sol de cette voie. On puise ce plomb du bassin avec une cuiller de fer enduite d'un peu de lut & chauffée, & on le verse dans des lingotières également chauffées.

Si on s'aperçoit, lorsque les charbons sont diminués dans le fourneau, que la chaleur ne soit pas assez forte dans certains endroits, & que les pièces ne s'affaissent pas également, on doit y en ajouter d'autres; mais si au contraire la chaleur étoit trop forte, & capable de faire couler du cuivre avec le plomb, ce qu'on reconnoît par des petites parties de cuivre qui se détachent des pièces de liquation & qui tombent dans la voie, alors on bouche tous les soupiraux, & on met une ou deux bûches de bois vert dans la voie, dont la flamme & la fumée, chargées d'humidité, ralentissent la chaleur & empêchent la fusion du cuivre.

Dans des cuivres impurs ou chargés d'arsenic, de fer & d'autres matières étrangères, il coule ordinairement avec le plomb une portion de ces substances qui, avec une petite portion du plomb qui se vitrifie ou se calcine, & un peu de cuivre, forment des scories pâteuses & non coulantes, & qui, par conséquent, s'arrêtent dans la voie & empêchent l'œuvre de se rendre dans le bassin de réception; pour lors le fondeur, avec un crochet de fer, attire en devant du fourneau toutes les scories, que nous nommerons déchets de liquation; il les met ensuite à part pour être fondues ainsi que nous le dirons *chapitre VII*.

Lorsque les pièces sont bien affaïssées & qu'il n'en dégoutte plus de plomb, on ôte la porte de fer & on retire les pièces de dessus les plaques de fer; on les met en magasin, pour être portées au fourneau de reffuage lorsqu'on en a une quantité suffisante.

Il est bon de prévenir qu'on ne doit tirer du fourneau les pièces liquéfiées, que lorsqu'elles sont un peu refroidies. Elles se briseroient, ce qu'il faut éviter, car pour lors on ne pourroit plus les arranger convenablement dans le fourneau du reffuage; il ne faut y toucher, &

même avec précaution, que lorsqu'elles ont acquis la couleur rembrunie ou d'un rouge foncé.

Toutes les fois qu'on porte le plomb du bassin de réception dans les lingotières, on doit avoir attention d'en prendre un peu que l'on versera dans un petit creuset ou test, & de tous les petits boutons pris de la liquation des six pièces, on en fera un seul dont on prendra la quantité accoutumée pour en faire l'essai, afin de s'assurer si ce plomb a la teneur requise.

Comme on ne peut pas toujours faire cet essai sur-le-champ, on doit numérotter le petit lingot de plomb résultant de tous les petits boutons dont il a été question, de manière que celui qui proviendra des six premières pièces soit marqué par 1, ainsi des autres.

Tous les culots ou lingots de plomb provenant de la liquation de chaque fournée de six pièces, seront aussi déposés séparément de ceux qui proviendront des autres fournées, & chaque tas de lingots portera le numéro donné au petit lingot d'essai qui en est provenu.

En observant cet ordre, on fera dans le cas de savoir par les essais, ce que ces différens plombs doivent rendre en argent dans l'affinage en grand.

On ne doit pas s'attendre, dans l'opération de la liquation, de retirer tout le plomb, ni même au ressuage, parce que, ainsi que je l'ai déjà dit, il s'en calcine, & qu'il en reste un peu dans le cuivre jusqu'après l'opération du raffinage de ce métal.

Suivant ce qui a été dit en traitant des mélanges, en supposant que tout le plomb de six petites pièces de liquation sortît, on en obtiendrait 1092 livres si ces pièces venoient d'un rafraîchissement riche, & seulement 996 livres de six pièces d'un rafraîchissement pauvre. Mais si, dans le premier cas, elles rendent 950 à 960 livres de plomb, dont la teneur en argent soit de 3 onces 3 à 4 gros par quintal, & que l'on obtienne dans le second environ 860 liv. d'œuvre, tenant environ 2 onces par

quintal, on pourra être assuré que la liquation aura été bien faite.

L'opération de la liquation de six pièces, doit être terminée dans l'espace d'environ quatre heures, ce qui fait qu'en un poste de douze heures on peut en liquéfier 18 ou trois fournées de suite, avec environ 80 à 90 pieds cubes de charbon, ou 12 à 13 quintaux & quelques bûches.

CHAPITRE III.

Du ressuage.

Le ressuage est une opération par laquelle on extrait, autant qu'il est possible, du plomb qui est resté dans les pièces de liquation, après qu'elles ont été liquéfiées, comme il est dit au *chapitre précédent*. Ces pièces, passées au ressuage, ne doivent contenir que très-peu de plomb, celui qui y reste après la liquation se vitrifiant pour la majeure partie dans le procédé que nous allons décrire.

PREMIÈRE SECTION.

LORSQU'ON a assez de pièces de cuivre dont on a retiré, par la liquation, autant qu'il a été possible de plomb enrichi d'argent, on fera le ressuage de ces pièces dans le fourneau de la *planche III*: environ 150 pièces le rempliront; on les y arrangera de la manière suivante.

On commencera par poser dans le fond du fourneau les pièces verticalement sur les murs de séparation des voies, de manière qu'elles portent alternativement sur deux de ces murs qui sont au nombre de quatre, au moyen de quoi on pourra placer trois pièces dans le premier rang; on en mettra deux autres sur les trois premières, & trois se placeront sur les deux dernières, ainsi alternativement jusques à la voûte du fourneau.

Lorsque cette première rangée de pièces est finie, on en fait une semblable à quelques pouces seulement de distance de la première, qui ne doit pas non plus porter contre le
mur

mur du fond du fourneau, ce qui empêcheroit la flamme d'y passer librement.

On continue ainsi à remplir le fourneau jusqu'à sa partie antérieure, en observant toujours que les espaces vides soient les plus égaux qu'il est possible afin que la flamme puisse passer, & que la chaleur se répande uniformément par-tout.

Pour faciliter l'arrangement de ces pièces, on se sert de petites baguettes de fer d'environ un pied de longueur, fourchues à l'un des bouts. Celui-ci s'appuie sur les murs de séparation, & l'autre bout contre les pièces; ce qui les tient dans une position verticale, tandis que l'on arrange celle du dessus : ces petites baguettes servent successivement à toutes les rangées des pièces.

Lorsque le fourneau est rempli de pièces de cuivre, on fait descendre la porte de fer sur l'extrémité des plaques de fer fondu, qui pour cet effet excèdent ou sortent en dehors du fourneau, ce qui s'exécute avec facilité au moyen d'une chaîne qui passe sur une poulie, & qui répond à un petit treuil ou cabestan. La porte étant mise en place, on la lute tout autour avec de l'argille, afin qu'il n'y passe ni flamme ni fumée.

DEUXIÈME SECTION.

Le fourneau disposé comme on vient de le dire dans la première section, on place dans les trois voies environ un quintal de charbon; on y met le feu, & en même temps on place deux ou trois bûches dans chaque voie, par dessus le charbon & sur le devant des voies : lorsque ces premières bûches sont brûlées, on y en ajoute d'autres. Quand le fourneau commence à rougir, on augmente le nombre des bûches, c'est-à-dire, on en met trois ou quatre sur le devant des voies, & en même temps on en fait entrer deux ou trois autres dans chaque voie; celles-ci iront jusqu'à la partie postérieure desdites voies. Quand les bouts

Mém. 1788.

Y y y

des bûches du devant porteroient sur l'extrémité de celles qui sont les plus avancées, elles n'en brûleroient que mieux, & elles donneroient plus de chaleur. On laisse brûler entièrement le bois avant d'y en mettre d'autre, & on retire les braises qu'elles laissent avec un rouable de fer.

Après environ quinze heures d'un feu suivi, les scories commencent à couler ou tomber dans les voies; alors on ne doit pas négliger, toutes les fois que le bois sera brûlé, de nettoyer entièrement les voies avec des rouables & des crochet de fer, & d'en faire sortir, avec les braises, les scories qu'on met à part. Nous nommerons ces scories *déchets du ressuage*; comme elles se mêlent avec les braises, on les lave pour les en séparer.

Si l'on s'aperçoit que la chaleur fût trop forte & qu'elle fit couler du cuivre, on profiteroit du moment qu'on nettoye les voies pour laisser ralentir la chaleur, après quoi l'on remettroit du bois dans les voies; on peut aussi, en cas de nécessité, modérer la chaleur en bouchant les soupiraux en partie.

Si la chaleur est trop foible, sur-tout vers la fin de l'opération où elle doit être assez forte pour bien torréfier le cuivre, on met, dans les voies, du bois refendu en petits morceaux, ce qui augmente le volume de la flamme & la chaleur. Il faut que le bois qu'on emploie dans cette opération soit sec: tous les bois y sont bons, mais le hêtre & le sapin sont préférables.

La durée d'un ressuage est de trente à trente-six heures; la consommation des matières combustibles d'environ quatre cordes de bois de 8 pieds de long, de 4 de haut, & les bûches de 3 pieds de longueur, avec un quintal de charbon.

Les matières qui sortent des pièces liquéfiées, dans l'opération dont nous traitons, sont composées, 1.^o de la majeure partie du plomb qui y étoit resté après la liquation; ce plomb se vitrifie presque entièrement au ressuage; 2.^o d'un peu de fer; 3.^o d'une portion de cuivre plus ou moins

grande, suivant qu'on a bien ou mal opéré, & conduit le degré du feu; 4.^o d'un peu d'arsenic.

Les premières scories qui tombent dans les voies, ressemblent aux crasses ou écumes que l'on retire des plombs impurs au commencement d'un affinage, & sont de même d'un gris-noirâtre, & spongieuses; mais celles qui viennent après acquièrent insensiblement une couleur rouge, de sorte que celles qui coulent à la fin de l'opération sont très-rouges & compactes; ce qui annonce la présence d'une plus grande quantité de cuivre, & qu'il est temps de cesser l'opération, sans quoi on s'exposeroit à faire fondre le cuivre. Celui qui fait partie des scories dont on vient de parler, & que nous nommerons *déchets de ressuage*, est, ainsi que le plomb qui y est mêlé, dans un état de vitrification, & ces deux métaux se brûleront en partie si on n'a voit pas soin, ainsi que je l'ai recommandé ci-dessus, de les tirer des voies toutes les fois qu'on y met du bois.

L'opération du ressuage étant finie, on nettoye les voies pour la dernière fois, & aussitôt l'on ôte le lut du tour de la porte qu'on enlève avec le même treuil qui a servi à la descendre.

Alors les ouvriers, par le moyen de crochets de fer, font tomber sur l'aire de la fonderie les pièces de cuivre qui doivent être rouges, sans quoi elles seroient adhérentes les unes aux autres, & on parviendroit très-difficilement à les dessouder. On n'a pas ici à craindre, comme après la liquation, que ces pièces se brisent; mais on doit avoir soin de ne point endommager les petits murs de séparation des voies, & de ne pas laisser tomber dans ces voies des pièces qui endommageroient les briques, & qu'il seroit même difficile d'en arracher. On pourra éviter cela, en plaçant au milieu de chaque voie, & suivant sa longueur, une ou deux barres de fer ou ringards, & cela à la hauteur des murs de séparation. Ces barres porteront d'un bout contre le mur du fond du fourneau, où leurs pointes entreront d'environ un pouce entre deux rangées

de briques ou de pierres; leur autre bout portera sur une barre de fer mise en travers au-devant du fourneau sur les parties saillantes des plaques de fer fondu qui couvrent les murs de séparation, & que nous avons omis de dire qu'il faut, pour leur conservation, enduire d'argile avant que d'y ranger les pièces.

Les premières rangées de pièces qui sont sur le devant du fourneau sont fort aisées à faire tomber, mais celles du fond exigent plus de travail. Outre les crochets de fer dont on se sert pour faire tomber ces pièces, un des ouvriers muni d'un fort ciseau de fer emmanché au bout d'un long bâton, détache les pièces qui sont adhérentes ensemble; l'autre, avec son crochet, les attire à lui à mesure qu'elles sont dessoudées & les fait tomber à terre.

Ce travail doit se faire promptement, afin de ne pas laisser refroidir le cuivre, qu'il seroit beaucoup plus difficile d'arracher, ainsi que je l'ai déjà dit; mais comme il est extrêmement fatigant, il y faut au moins quatre hommes qui se relayent de deux en deux.

A mesure que les pièces tombent du fourneau, un homme les prend avec des tenailles & les jette dans une caisse pleine d'eau froide, où, s'il est possible, on en fait passer un petit courant pour l'empêcher de s'échauffer. La fraîcheur de cette eau fait gercer, & même écailler les scories ou métaux vitrifiés qui, sous la forme de vernis, couvrent toute la surface des pièces. Un moment après on retire ces pièces de l'eau, on les range de côté; lorsqu'elles sont toutes refroidies de cette manière, des femmes ou des enfans munis de petits marteaux à pointe, frappent tout autour de ces pièces, afin d'en détacher les scories, & avec un petit balai fort rude, ils finissent par en enlever les scories.

Le cuivre ainsi nettoyé est mis en magasin pour être raffiné, ainsi que je le dirai *chapitre VI*.

Quant aux écailles qui proviennent des pièces, on les doit rassembler avec soin & les mettre avec les autres déchets

de ce travail, pour les traiter ainsi qu'il est dit *chapitre VII*. Si on laissoit ces écailles sur le cuivre, on seroit plus de temps à le raffiner, & il y auroit une partie des métaux qu'elles contiennent de détruits.

REMARQUES.

L'on a vu que les procédés de la liquation & du ressuage, décrits dans les deux derniers chapitres, exigent des fourneaux assez dispendieux, principalement celui du ressuage, *planche III*, qui, outre la dépense de sa construction, prend un emplacement assez vaste, qu'il est indispensable de mettre à couvert par un bâtiment dont la dépense est encore plus considérable que celle du fourneau. On a aussi dû remarquer que la consommation du bois & du charbon dans ces deux procédés ne laisse pas d'être considérable.

Schlutter, dans son traité de la fonte des mines, traduit de l'allemand par M. Hellot, a donné un fourneau de liquation, *planche 49*, dans lequel il faisoit liquéfier le plomb de douze pièces avec un feu de fagots & de bûches. Les fagots se mettoient dans une chauffe à côté du fourneau, & les bûches dans le fourneau même entre les pièces & au-dessus, de manière que toute la capacité du fourneau en étoit exactement remplie, ainsi que cet auteur s'en explique *chapitre CXIII*; mais outre que ce fourneau est très-dispendieux dans sa construction, à cause de la grandeur excessive qu'on est forcé de donner à la cheminée qui doit absorber les fumées pernicieuses du plomb, la consommation du bois est considérable & son arrangement difficile. D'ailleurs les vapeurs, les fumées du bois & la flamme, n'ont d'issue qu'autour de la porte qui pour cet effet n'est point lutée contre le fourneau; elles doivent fort incommoder les ouvriers. Schlutter avertit des précautions qu'il faut prendre pour que la chaleur soit égale dans toutes les parties de son fourneau. Il présente encore un autre inconvénient, c'est que, quoique la liquation

foit achevée, on est obligé de laisser entièrement consommer les charbons résultant de la grande quantité de bois mis dans le fourneau, avant de pouvoir en sortir les pièces liquéfiées; ce qui exige au moins une heure de plus. Aussi l'auteur dit - il qu'il faut six heures pour faire la liquation de douze pièces dans son fourneau. Je dois faire observer ici que Schlutter avoit eu intention de faire de suite, après la liquation dans son fourneau, l'opération du ressuage des pièces; mais il convient, *page 541*, qu'il n'y auroit pas de profit à y torrifier les pièces de liquation, parce qu'il s'est aperçu que le bois qui remplit le fourneau dans le commencement de l'opération de la liquation, étant une fois consommé, il faudroit en remplir une seconde fois le fourneau pour exécuter celle de la torrification, laquelle prendroit autant de temps que la première, & occasionneroit encore plus d'embarras pour arranger le bois entre les pièces qui sont encore rouges. Il a pareillement conçu que le simple feu de fagots continué dans la chauffe, seroit insuffisant pour faire seul la torrification, qui exige même plus de chaleur que la liquation. Ainsi, on voit que les vues de l'auteur n'ont pas toutes été remplies par ce fourneau, & que pour le seul procédé de la liquation, il est sujet à plus d'inconvéniens en général que le petit fourneau que je donne, *planche II*, qui est en usage, & qui coûte beaucoup moins pour sa construction.

La consommation du bois qu'exige le ressuage, les frais de manipulation, le déchet du cuivre & du plomb, toutes ces considérations, dis-je, m'ont engagé à chercher les moyens de simplifier les procédés de la liquation & du ressuage, & à les rendre dépendans l'un de l'autre, en les exécutant dans un seul & même fourneau de réverbère; c'est-à-dire, que tout le plomb chargé d'argent qui peut sortir des pièces par la liquation étant extrait, on procédera au ressuage ou torrification des mêmes pièces, sans les déplacer.

Cette double opération pourra aussi-bien se faire avec

le charbon de terre qu'avec le bois, sur-tout lorsque le premier sera réduit en cook.

Je n'ai pas la présomption de croire que mes procédés, que je vais décrire dans le chapitre suivant, ainsi que le fourneau que je donne pour leur exécution, soient à leur degré de perfection ; je suis au contraire persuadé qu'il est possible de rendre plus simples, & par conséquent beaucoup moins dispendieuses, presque toutes les opérations de la métallurgie. Il seroit à désirer pour le bien public que les savans chimistes de nos jours, & notamment ceux de l'Académie, eussent le temps de s'en occuper, & qu'ils fussent à portée de voir des établissemens de fonderies, où les minéraux & les métaux se traitent en grand.

CHAPITRE IV.

Du double procédé de la Liqueur & du Refsuage.

ON a vu dans les *chapitre II & III* les méthodes en usage pour opérer les deux espèces de fontes nommées *de la liqueur & du refsuage*. Je vais avoir l'honneur de faire part à l'Académie des moyens qui m'ont paru les plus simples & les moins dispendieux pour l'exécution de ces deux procédés dans le fourneau que je propose. (*Voyez la planche IV & son explication.*)

Plusieurs fourneaux que j'ai fait exécuter pour la conversion du fer en acier, m'ont donné l'idée de celui-ci, qui a les dimensions nécessaires pour y placer à la fois quinze grandes pièces de liqueur de deux pieds de diamètre, & du poids de 350 livres chacune. En ne donnant que 18 pouces de diamètre aux pièces, & 232 livres de pesanteur, la longueur du fourneau sera suffisante de 5 pieds $\frac{1}{2}$, au lieu de 7 pieds que je donne à celui de la *planche IV* ; il contiendra également 15 pièces de liqueur.

Dispositions avant la Fonte.

ON portera sur les plaques de fer formant des plans inclinés, 15 pièces ou pains de liquation, en trois rangées de cinq, de manière que les distances entre les pièces soient égales, ainsi que le fait voir la figure 4 de la planche.

On commencera par placer les cinq pièces de la rangée du milieu, après quoi on fera l'arrangement de cinq pièces à l'une des extrémités du fourneau, & on finira par les cinq de l'autre bout.

On conçoit que ces pièces ne pourroient pas se soutenir dans la situation verticale qui leur est nécessaire, sans quelques moyens, car on ne mettra ici ni bois ni charbon entre ces pièces qui puissent les soutenir, mais on y suppléera par de petits morceaux de terre cuite, *figure 6.* (*Voyez son explication.*) On pourroit y employer des morceaux de fer de la même forme, mais s'ils n'étoient pas recouverts d'un lut de terre, ils seroient brûlés en peu de temps.

Les pièces de liquation ne pourroient pas être portées dans le fourneau à bras d'hommes, sur-tout celle du milieu, & lorsque le fourneau est échauffé par une précédente opération. Mais deux hommes y parviendront aisément, & feront l'arrangement des 15 pièces d'une fournée, en moins d'une demi-heure, en se servant d'une forte tenaille très-longue, & suspendue à peu-près au quart de sa longueur, à partir de l'extrémité qui saisira les pièces, par une chaîne de fer fixée à une pièce de bois perpendiculairement, & à dix pieds au-dessus de l'embouchure du fourneau. Comme l'on fait entrer ces pièces de liquation par les deux bouts du fourneau, il faut de pareilles chaînes, mais une seule tenaille sera suffisante; car après avoir servi à un bout, on la sortira de l'étrier dans lequel elle est passée, & on la passera

passera dans l'étrier de la chaîne du bout opposé. Je crois que cela est suffisamment entendu. D'ailleurs on peut voir sur la *planche 49* de Schlutter une tenaille à peu-près semblable à celle que je propose, suspendue à une chaîne & tenant une pièce de liquation; mais pour empêcher que les pièces n'échappent de la tenaille, il sera bon que l'une de ses branches soit recourbée à angle droit d'environ un pouce, & que cette espèce de tenon entre dans le trou que laisse dans la pièce le crochet de fer qui sert à la sortir du moule, ainsi qu'il est dit *chapitre I.*"

Lorsque les 15 pains de liquation seront arrangés dans le fourneau de la manière que je viens de le dire, on descendra aux embouchures du fourneau les deux portes, dont une est représentée par la *figure 5*; on les y lutera tout autour avec de l'argile.

SECONDE SECTION.

De la Fonte, dite de Liquation.

LES dispositions détaillées dans la première section étant faites, on procédera à la liquation du plomb & de l'argent que contiennent les 15 pains renfermés dans le fourneau; on aura du bois préparé à cet effet, en bûches refendues, ou en rondins d'un pouce jusqu'à 3 pouces de grosseur, & dont la longueur sera de 18 pouces, qui est celle de la chauffe; quelques pouces de plus ou de moins n'y feront rien, parce que celles qui seront plus longues, porteront sur les côtés de la chauffe, & brûleront aussi bien que les courtes qui entreront dans son intérieur.

On remplira la chauffe de bois jusqu'à la hauteur de l'arceau du devant du fourneau, on y mettra le feu. La colonne d'air extérieure contraindra la flamme à parcourir tout le dessous des arceaux le long de la voie, & de passer par les trois ouvertures ménagées par les arceaux, d'où elle enveloppera toutes les pièces de liquation, & aura son

issue, ainsi que la fumée, par les trois petites cheminées ou tuyaux expiratoires ménagés dans la voûte du fourneau, & de suite dans la grande cheminée. A mesure que le bois se consommera, & qu'il baissera dans la chauffe, on y en substituera quelques morceaux qui se placeront dessus.

Dans la première opération, le fourneau étant encore froid, on peut sans crainte entretenir la chauffe pleine de bois, sur-tout au commencement; mais dans celles qui suivront celle-ci, il faudra faire peu de feu au commencement de l'opération, sans quoi le plomb, en coulant trop abondamment, pourroit entraîner du cuivre; on pourra augmenter peu à peu la chaleur, lorsqu'environ la moitié du plomb sera sortie des pièces.

Il est indispensable, dans une première opération, de chauffer avec une dizaine de livres de charbon le bassin de réception & sa voie qui traverse le mur du fourneau. Le sol de la grande voie n'a pas besoin de chauffage préliminaire; la flamme l'aura suffisamment échauffé avant que le plomb y tombe; car je pense que dans cette première opération le plomb ne commencera à couler qu'au bout d'environ une heure, à compter du moment qu'on aura mis le feu dans la chauffe; ainsi le sol de la grande voie aura le temps de s'échauffer.

A mesure que le plomb sortira des pièces, il tombera sur le sol de la grande voie de la flamme, & se rendra à l'instant dans le bassin de réception par la voie ménagée dans l'épaisseur du mur, d'où on le puisera avec une cuiller de fer; on le portera dans des lingotières, & l'on en prendra pour les essais, ainsi qu'il est détaillé

chapitre II.

Lorsque l'on apercevra dans la grande voie quelques crasses, qui pourroient empêcher un peu de plomb de couler dans le bassin de réception, comme il seroit exposé dans cet endroit à être calciné, on nettoiera cette voie par la petite porte, cotée 12 de la figure 3, en y introduisant un petit roable de fer, avec lequel on retirera

ces crasses : on aura soin de refermer aussitôt cette porte. Ces crasses que nous avons nommées ailleurs *déchets de liquation*, ne seront pas mêlées avec celles qui viendront pendant le ressuage qui suit immédiatement la liquation.

On regardera de temps en temps par la petite ouverture de la porte notée 5, afin de voir ce qui se passe dans le fourneau, de s'assurer si la chaleur y paroît égale dans toutes les parties, & si l'affaissement des pièces est uniforme dans les trois rangées; car lorsque l'une des extrémités s'affaisse plus vite que les autres, c'est une preuve que la flamme s'y porteroit plus qu'à l'autre bout, alors on y remédieroit en avançant la brique servant de registre à la petite cheminée qui est de ce côté. (*Voyez cette brique cotée 8 dans la figure 4*). En faisant entrer cette brique, elle interceptera une partie, ou même, s'il est nécessaire, la totalité du passage de la flamme, qui alors prendra son cours par les deux autres cheminées ou tuyaux aspiratoires, & par son courant augmentera la chaleur des rangées de pièces qui en avoient besoin, & se ralentira du côté de la rangée qui paroïsoit s'affaïsser trop promptement. Rien n'est si aisé que de gouverner ainsi le feu, il ne faut qu'un peu d'attention de la part du fondeur.

Si le bois qu'on emploie est de bonne qualité, bien sec & en petits morceaux minces, la flamme, dans cette circonstance, porte une chaleur très-vive dans le fourneau, qui pourroit en peu de temps faire fondre le cuivre avec le plomb. En pareil cas, il ne faut mettre dans la chauffe que trois ou quatre des bûches les plus grosses, & de manière que la chauffe n'en soit pas remplie. Alors il passera un grand courant d'air avec peu de flamme; ce qui rafraîchira le fourneau, & dans un instant l'écoulement trop abondant des métaux en fusion diminuera considérablement.

On pourra encore diminuer la chaleur en fermant en tout ou en partie les ouvertures des trois petites cheminées, par le moyen des briques dont j'ai parlé, & en ouvrant

la petite porte cotée 19 dans la *figure 4* ; car alors la colonne d'air extérieur qui entrera par cette porte, rafraîchira aussi le fourneau, & contrebalancera celle qui entre incessamment par la chauffe, & empêchera celle-ci de porter la flamme avec autant de rapidité vers l'intérieur du fourneau, ce qui le refroidira ; car dans tous fourneaux, & notamment dans ceux à réverbère, la chaleur est toujours en raison de la rapidité de la flamme, & celle-ci proportionnée à la vitesse du vent qui l'entraîne dans l'intérieur du fourneau.

Si l'on vouloit obtenir, par le moyen de la flamme, une chaleur très-considérable, par exemple, dans le fourneau de la *planche 4*, il faudroit donner beaucoup plus de hauteur au grand tuyau aspiratoire, c'est-à-dire, à la cheminée. Mais cette grande chaleur seroit préjudiciable dans les procédés dont il s'agit ici, & le fourneau consommeroît beaucoup plus de matières combustibles que ces procédés n'en exigent ; car cette consommation est aussi en raison du courant d'air : or, ce courant est d'autant plus grand, que l'orifice supérieur de la cheminée est plus élevé au-dessus de la chauffe. M. le Comte de Buffon a fait l'application de toute cette théorie dans ses forges, où il a fondu de la mine de fer avec un feu de charbon par un courant d'air, sans le secours de soufflets ni de trompes : mais revenons à l'opération de la liquation qui fait le sujet de cette section.

Lorsque les 15 pièces de liquation paroîtront bien assaïssées, & qu'il n'en dégouttera plus, ou très-peu de plomb, on procédera à l'opération du ressuage ou torréfaction de ces pièces, de la manière indiquée dans la section suivante.

TROISIÈME SECTION.

Du Ressuage.

LE ressuage, dans le fourneau que je propose, doit suivre immédiatement la liquation. On a vu au *chapitre III*,

que le but de cette opération est d'extraire des pièces liquéfiées autant de plomb qu'il est possible, ainsi que les matières étrangères au cuivre.

Après que le plomb aura cessé de couler sous la forme métallique, on continuera le feu dans la chauffe; on pourra même augmenter le degré de chaleur jusqu'à un certain point, en mettant du bois plus menu, & en plus grande quantité dans la chauffe, cependant d'abord avec précaution, & on l'augmentera par degrés; on verra bientôt couler l'espèce de scories dont nous avons parlé en traitant du ressuage ordinaire, avec quelques gouttes de plomb dont on pourra ici profiter. Il faudra de temps en temps retirer ces scories par la porte cotée 12 dans la *figure 3*, & aussitôt refermer cette porte; car, comme je l'ai dit ailleurs, si on laissoit ces scories long-temps sur le sol de la voie, les métaux qu'elles contiennent se brûleroiént & deviendroient irréductibles. Lorsque ces scories qui dans le commencement sont noirâtres & spongieuses, deviendront rougeâtres & compactes, on sera assuré que l'opération touchera à sa fin, & elle sera achevée lorsque ces scories refroidies seront très-rouges & très-compactes; ce qui annonce la présence d'une plus grande quantité de cuivre qu'entraîne cette matière vitrifiée.

C'est alors qu'on cessera de faire du feu dans la chauffe, & aussitôt on enlèvera les deux portes qui bouchent les extrémités du fourneau, au moyen des deux petits treuils. On ouvrira aussi la petite porte par laquelle on tire les crasses. On sortira toutes les braises de la chauffe, afin que la chaleur n'en incommode pas les ouvriers durant les opérations de la liquation & du ressuage. On doit de temps en temps sortir les braises par la petite ouverture pratiquée dans le bas de la chauffe, ce qui s'exécutera environ toutes les heures. Une trop grande quantité de braise ralentit beaucoup la chaleur, en s'opposant au courant de la flamme: je l'ai éprouvé bien des fois dans les fourneaux à convertir le fer en acier. Au reste, quand

on n'a pas besoin de beaucoup de chaleur, c'est un moyen de la diminuer.

Toutes les portes du fourneau étant ouvertes, les fondeurs en sortiront les pièces de cuivre ressuées avec la même tenaille qui aura servi à les y faire entrer, ou ils les feront tomber hors du fourneau avec des crochets de fer, car on ne craint pas dans cette circonstance de les briser, puisqu'elles n'ont plus que le raffinage à subir; mais, de même qu'après le ressuage ordinaire, on aura soin de jeter ces pièces encore toutes rouges dans l'eau, afin d'en pouvoir détacher les écailles vitrifiées, ainsi que je l'ai détaillé en parlant du ressuage ordinaire, *chapitre III.*

Aussitôt que toutes les pièces seront sorties du fourneau; on y en substituera 15 autres de la même manière; on refermera toutes les portes, & on recommencera le feu dans la chauffe, en observant qu'il soit foible durant la première heure, attendu que le fourneau est chaud, & qu'il ne lui faut pas beaucoup de chaleur de plus pour faire couler le plomb aussi vite qu'il doit sortir des pièces sans entraîner du cuivre avec lui. Le surplus de l'opération de la liquation suivie du ressuage, se fera ainsi que je l'ai décrit ci-dessus pour les 15 premières pièces.

La première opération qui se fera dans le fourneau que je propose, durera, y compris le ressuage, tout au plus huit heures, & les suivantes six heures; c'est - à - dire, environ 3 heures $\frac{1}{2}$ pour la liquation, & pour le ressuage 2 heures $\frac{1}{2}$, un peu plus ou un peu moins, suivant l'attention & l'adresse des ouvriers.

La consommation du bois sera d'environ une corde par 24 heures, pendant lequel temps on fera la liquation & la torréfaction de soixante pièces. Il faut quatre hommes à ces opérations; ils s'entr'aideront à introduire les pièces dans le fourneau & à les en tirer. Au reste, il y aura constamment deux de ces ouvriers près du fourneau; l'un qui fera le feu, & l'autre qui moulera le plomb à mesure.

qu'il se rendra dans le bassin de réception, qui dégraissera la voie, & aura attention au degré de chaleur : celui-ci doit être le maître. L'aide qui fera le feu ne sera pas fort occupé, car un enfant peut le faire; mais il aidera à mouler le plomb, à le peser & à le mettre en magasin. Lorsque le ressuage des 15 pièces sera fait & qu'il s'agira de les sortir, les deux autres ouvriers seront appelés pour aider à cet objet, & à remettre 15 autres pièces dans le fourneau; alors les premiers pourront se reposer tandis que les deux nouveaux prendront leur place, ou s'ils aiment mieux travailler douze heures de suite, ce qui fait un poste ordinaire, ils ne se relayeront que de deux en deux opérations.

REMARKES.

L'on a vu dans les remarques, à la suite du *chapitre III*, les motifs qui m'ont engagé à chercher les moyens de simplifier les deux procédés de la liquation & du ressuage. L'Académie jugera si le double procédé que je viens de décrire dans le dernier chapitre, peut remplir toutes mes vues économiques.

Le fourneau que je propose pour l'exécution de ce double procédé, ne coûtera pas plus pour sa construction, & même moins, qu'un fourneau de ressuage ordinaire. On gagnera donc la construction & l'emplacement de celui de liquation, & ainsi que je l'ai dit, le mien n'exigera que du bois pour son chauffage, auquel on pourra même substituer du charbon de terre, lorsqu'il sera réduit en *coak*, & qu'il aura perdu son odeur pénétrante, occasionée par le soufre & l'acide vitriolique qui pourroient attaquer les métaux, sur-tout le cuivre, & y occasioner du déchet. On épargnera donc, en faisant usage de mon fourneau, la quantité de charbon employée dans les procédés de la liquation en usage, & qui, comme on l'a vu au *chapitre II*, est assez considérable.

Il est dit, *chapitre III*, que pour ressuier dans un fourneau ordinaire environ 150 pièces, il faut quatre cordes de bois cubant 384 pieds; & dans le fourneau que je propose, on peut liquéfier & ressuier 60 pièces en 24 heures avec une corde de bois, & en suivant la même proportion, on pourra en 60 heures liquéfier & ressuier 150 pièces de liquation avec deux cordes $\frac{1}{2}$ à trois cordes tout au plus; ce qui fait voir que le ressuage seul, à la manière accoutumée, dépense pour ce nombre de pièces, une corde ou une corde $\frac{1}{2}$ de bois de plus que mon fourneau n'en exige pour les deux opérations ensemble. Voilà donc une grande économie, sans compter celle du charbon employé à la liquation des pièces dans un fourneau ordinaire, qui, suivant ce que j'ai dit au *chapitre II*, à la fin de la *seconde session*, monteroit, pour 150 pièces, à environ 700 pieds cubes de charbon, ou à peu-près 10500 livres pesant.

Pour se convaincre de la grande consommation de bois dans le fourneau de ressuage ordinaire, il suffira de faire attention à sa construction & à sa grandeur intérieure, qui, ainsi que je l'ai dit, n'a acquis assez de chaleur pour commencer à faire ressuier les pièces, qu'après environ 15 heures d'un feu suivi. Il n'en sera pas ainsi dans mon fourneau, qui fera le ressuage des pièces, sans les déplacer, immédiatement après la liquation, & tandis qu'elles sont toutes rouges. Ce ressuage fait de suite, sera aussi très-avantageux, en ce que, 1.^o s'il reste encore un peu de plomb après la liquation, qui puisse conserver sa forme métallique, il coulera dans le bassin de réception, & on l'ajoutera à l'œuvre de la liquation; 2.^o en ce qu'il y aura certainement moins de cuivre & de plomb de détruits dans ma manière d'opérer que dans les deux procédés ordinaires. J'ai fait voir qu'une portion de ces deux métaux se brûle ou se vitrifie d'une manière irréductible; ce qui arrive à une quantité d'autant plus considérable, que le feu y est plus long-temps appliqué. Cet élément agit bien
du

du temps sur les pièces dans le fourneau de reffuage ordinaire ; en conséquence, les métaux qui en sortent sont dans un état de chaux ou de vitrification, dont une partie ne peut être revivifiée.

L'on a vu que dans la liquation en usage, les pièces restent environ 4 heures exposées au feu, & 36 heures dans le fourneau de reffuage. Ces pièces sont donc, environ pendant 40 heures, exposées à la chaleur, tandis que pour subir ces deux opérations dans le fourneau que je propose, elles n'y resteront que 6 heures, ce qui fait 34 heures de moins. Quoique la chaleur soit médiocre dans le commencement du reffuage ordinaire, elle ne laisse pas de calciner les métaux, & singulièrement le cuivre, qui perd presque aussi vite son phlogistique à une chaleur modérée, qu'à celle qui seroit assez puissante pour le faire entrer en fusion.

3.^o Par mon procédé on évitera beaucoup de journées d'ouvriers, soit pour les transports d'un fourneau à l'autre, soit pour l'arrangement des pièces liquéfiées dans un grand fourneau de reffuage, soit enfin pour le chauffage de ce fourneau & pour l'extraction des pièces lorsqu'elles sont reffuées.

4.^o J'ai dit que la chaleur, les fumées du bois & les vapeurs du plomb incommode beaucoup les fondeurs dans l'opération de la liquation qui se fait avec le fourneau de réverbère de Schlutter. On ne respirera aucunes fumées, ni de bois, ni de plomb, dans le mien ; elles passeront toutes par la cheminée. D'ailleurs la chaleur ne les incommodera nullement, & ne se fera sentir que foiblement, même lorsqu'ils ouvriront les portes & qu'ils tireront les pièces du fourneau.

5.^o Enfin l'on a dit, *chapitre III*, que les scories provenant du reffuage se mêlent avec les braises, & qu'on est contraint d'en faire le lavage pour en séparer les charbons & les cendres, opération qui prend du temps & dans laquelle on perd de ces scories riches en métaux : celles qui sortiront

554 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
de mon fourneau seront pures, moins abondantes, & dans
le cas d'être fondues sans autre préparation.

CHAPITRE V.

De l'affinage du plomb.

L'AFFINAGE du plomb étant bien connu en France ; & particulièrement à Poullaouen en basse Bretagne , où cette opération se fait très-bien , je me bornerai à quelques petits détails qui font la suite des procédés de la liquation que j'ai décrits dans les chapitres précédens , & à faire quelques observations sur la construction des fourneaux. Je terminerai ce chapitre par donner une nouvelle méthode de former les coupelles.

P R E M I È R E S E C T I O N .

IL y a bien des méthodes en usage par l'affinage du plomb ; les Anglois & les Allemands procèdent tout différemment , & parmi ces derniers , chaque pays ou principauté a ses usages particuliers , ainsi qu'on le verra dans les deux derniers volumes des Mémoires de MM. Jars & de moi. On peut aussi remarquer une très-grande différence dans la construction des fourneaux d'affinage que Schlutter a donnés ; les uns ont une chauffe ou tifard à l'un des côtés , les autres n'en ont point. Dans ces derniers , on passe de grandes pièces de bois qui traversent la coupelle au-dessus du bain ; la flamme de ce bois agitée par le vent des soufflets , forme la litharge. Si on fait attention que les charbons du bois qui tombent sur le bain doivent naturellement revivifier de la litharge , & l'empêcher de se former dans les parties qui en sont couvertes , on rejettera cette manière d'opérer , qui d'ailleurs exige des pièces de bois qu'on ne pourroit pas se procurer par-tout.

Les uns font leur affinage dans un fourneau couvert d'un chapeau de fer luté ; les autres en dessous d'une voûte

ou dôme, qui doit être assez élevé pour que l'affineur puisse entrer dans le fourneau & y battre la coupelle. Ces derniers sont défectueux, en ce qu'ils consomment beaucoup plus de bois que ceux dont le chapeau n'est pas trop élevé au-dessus de la surface du plomb en bain.

Dans certains ateliers on donne une forme carrée à l'extérieur du fourneau, tandis que l'intérieur est rond; ce qui laisse dans les angles de grosses masses de maçonnerie, qui ralentissent les progrès de la chaleur & prolongent l'opération. Dans d'autres, on leur donne la forme ronde intérieurement & extérieurement, ce qui vaut mieux.

Les uns donnent beaucoup de grandeur à la chauffe ou réverbère, les autres moins; mais en général elle est trop grande presque par-tout. Ce vice qui occasionne une plus grande consommation de bois, vient communément de ce que les ouvriers cherchent plutôt leur commodité que le profit de l'entrepreneur. Ils ont moins de peine à faire entrer un fagot par une grande porte, dans une chauffe à grandes dimensions, que dans une petite chauffe par une porte qui lui seroit proportionnée.

Je pense qu'une chauffe qui ne sera alimentée que par des fagots, ne doit pas avoir plus de 16 à 17 pouces de largeur, 3 pieds $\frac{1}{2}$ à 4 pieds de longueur, & 20 pouces de hauteur de la voûte à la grille. Je donnerois aux chauffes où l'on ne brûleroit que du bois de corde, 14 à 15 pouces de largeur, 3 pieds à 3 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, & 18 à 19 pouces de hauteur. Le fourneau que je donne, *planche 5*, est dans ce cas. Je l'ai fait exécuter aux mines de Baigorry, dans les Pyrénées, où l'on ne se sert que de bois de corde. Je ne lui ai donné, pour la partie de la coupelle, que six pieds de diamètre; mais je conseille, lorsqu'on aura beaucoup de plomb à affiner, de donner à ce bassin au moins huit pieds de diamètre, sans plus grandes dimensions à la chauffe, parce que plus le bain aura de surface, & plus il se formera de litharge à la fois.

Une chose bien essentielle dans la construction d'un

fourneau d'affinage, est de ménager des souches qui puissent absorber avec facilité les vapeurs, non-seulement celles de la masse entière du fourneau, mais aussi celles qui proviennent de l'humectation des cendres de coupelle. Pour cet effet, il ne faut pas se borner aux deux grands canaux ou souches en croix à la base du fourneau, avec deux autres plus petits en dessous du lit de scories; mais il est nécessaire de faire un petit canal circulaire à environ 18 pouces ou deux pieds du centre du fourneau, & qui ait communication aux autres souches qui ont leur issue à l'extérieur de la masse de maçonnerie. J'ai exprimé le tout sur le plan de ce fourneau, par des lignes ponctuées.

J'ai vu manquer beaucoup d'affinages pour n'avoir pas disposé ces souches d'une manière convenable, & pour les avoir recouverts en pierres de taille bien jointes & cimentées; alors l'eau qui humecte les cendres étant réduite en vapeur, & ne pouvant trouver une issue, réagissoit sur la coupelle, & en faisoit soulever des morceaux qui fumaient le bain de plomb. Lorsque cela arrive, l'opération est manquée: l'on attribue communément ce défaut à la qualité des cendres & à leur préparation, tandis que le mal réside dans le fourneau même.

DEUXIÈME SECTION.

Procédé de l'affinage.

ON pourra mettre environ 36 quintaux de plomb dans le fourneau d'affinage dont je donne le dessin. Lorsque ce plomb sera en bain, qu'il sera écumé & que la litharge aura commencé à couler, on pourra y ajouter du plomb qu'on y fera fondre peu-à-peu par la bouche à feu que j'ai ménagée exprès; alors, au lieu de 36 quintaux, on en pourra passer 50 à 60, & même plus, suivant que la coupelle sera en état d'en supporter sans être endommagée: si les cendres sont bonnes, bien préparées & la coupelle bien faite, cela ne souffrira aucune difficulté. Si la coupelle

avoit 8 pieds de diamètre, elle pourroit contenir environ 100 quintaux de plomb.

L'on a dit, en traitant de la liquation, qu'on doit prendre du plomb dans le bassin de réception pour en faire les essais avant l'affinage en grand, & que leurs résultats devoient être portés sur un livre à ce destiné : on jugera d'après cela si l'affineur a bien ou mal opéré.

Le feu doit être très-doux dans le commencement de l'opération, afin que la coupelle ait le temps de se débarrasser de son humidité surabondante, car elle n'est même pas tout-à-fait évaporée lorsque le plomb a commencé à litharger; mais ce qu'il en reste ne peut causer aucun préjudice dans un fourneau construit de la manière indiquée.

J'ai vu plusieurs fonderies en Allemagne, où l'on fait chauffer avec beaucoup de charbon la coupelle avant d'y porter le plomb : cette dépense est très-inutile.

Les crasses ou écumes qui proviennent de l'affinage, sont mises séparément pour être fondues avec les autres déchets des opérations relatives à la liquation.

Le bain étant bien net & le plomb devenu rouge, la litharge commence à se former & à s'imbiber dans les bords de la coupelle qu'elle durcit; alors on donne le vent, mais foiblement d'abord, & on l'augmente peu-à-peu. Il est indifférent de se servir de soufflets ou de trompes : il est même inutile, dans cette dernière circonstance, de poser deux buzes ou porte-vent; un seul suffit, en mettant à son extrémité une soupape ronde de fer que le vent fait soulever. Cette soupape qu'on nomme *papillon*, rabat le vent sur la surface du bain, accélère la formation de la litharge, & la chasse du côté de la voie, où elle trouve une petite rigole pratiquée dans les cendres de la coupelle, d'où elle coule sur l'aire de la fonderie.

Sans la soupape dont on vient de parler, le vent sillonneroit la surface du plomb dans sa direction sur une petite largeur, & jeteroit même des grains de plomb par la voie qui est à peu-près dans cette direction; & la litharge, au lieu

d'être poussée vers la voie, se rangeroit des deux côtés du fourneau sans qu'on pût la faire tomber, ce qui tripleroit la durée de l'opération qu'on ne pourroit même pas finir.

Le papillon satisfait à tout, il rend le vent moins violent; en le faisant tomber sur la surface du bain en forme de lame très-large, il chasse la litharge vers la voie; ce qui arrive également, soit que la coupelle soit pleine, soit qu'elle ne contienne plus que peu de plomb, car le vent est toujours dirigé en bas. D'ailleurs, si l'affineur s'aperçoit que la soupape porte le vent plus d'un côté que de l'autre de la coupelle, il y remédie promptement en tournant un peu la verge de fer, au bout de laquelle cette soupape est fixée à une charnière qui lui permet de se lever plus ou moins suivant la force du vent.

L'opération dont est ici question, quoiqu'une des plus simples de la métallurgie, exige néanmoins de la part de l'affineur beaucoup d'attention, soit pour donner le feu à propos, soit pour éviter de laisser couler du plomb avec la litharge, & notamment vers la fin de l'affinage, temps où le plomb qui reste sur la coupelle est très-riche en argent. Si alors il en couloit seulement un marc, on pourroit perdre plusieurs onces d'argent.

L'opération d'un petit affinage de 36 quintaux, dure environ 16 heures; on y consomme à peu-près 400 petits fagots, ou depuis trois quarts de corde jusqu'à une corde de bois. Si on y ajoute du plomb pendant l'opération, la consommation du bois & la durée de l'affinage augmenteront, mais non en proportion, car soixante quintaux pourront être passés en 20 ou 22 heures; ce qui vient de ce que l'affinage étant une fois en train, il va très-vîte, sur-tout lorsque le plomb qu'on y ajoute, entretient toujours la coupelle pleine, car alors la surface du bain est la plus grande possible; & l'on sait que plus cette surface est grande, & plus il se forme de litharge en même temps. Cette réflexion doit faire préférer les grandes coupelles aux petites.

S'il arrivoit que l'on eût tous cuivres dont la teneur

en argent excédât douze onces par quintal, qui est la teneur requise pour un raffraîchissement riche, ainsi que je l'ai dit en son lieu, on pourroit faire passer une partie de ces cuivres à la coupelle en raffinant l'œuvre provenant de la liquation. Par exemple, si après les mélanges faits il restoit des cuivres dont la teneur fût de quatre marcs par quintal, alors il n'y auroit pas à balancer d'en ajouter un peu à chaque affinage. On y en peut faire entrer, sans beaucoup d'inconvénient, la seizième partie du poids du plomb; mais je conseille de n'y en porter qu'un vingt-cinquième, ou tout au plus un vingtième. Ce cuivre, qui doit être préalablement cassé en petits morceaux, n'est mis dans le bain que lorsque le plomb est bien chaud & qu'il litharge bien.

Il n'y a que le cas ci-dessus où je puisse conseiller d'imbibber du cuivre dans le plomb de l'affinage; car quoique ce cuivre passe, pour la plus grande partie, dans la litharge & dans les cendres de la coupelle, il y en a toujours de perdu qui se détruit par la vitrification, & qu'il est impossible de revivifier. D'un autre côté, les litharges provenant de ces affinages contiennent le cuivre qu'elles ont scorifié avec elles, & pour s'en servir dans les mélanges d'un raffraîchissement, il faut avoir égard à ce cuivre, & en conséquence en faire moins entrer dans la composition de chaque pièce. Il faut aussi, par la même raison, ajouter une plus grande quantité de litharge, & proportionnellement au cuivre qui y est combiné, afin que par ces mélanges on obtienne les mêmes résultats que nous avons détaillés au *chapitre premier*.

On arrête communément le vent aussitôt que l'éclair est fini & on cesse le feu; un moment après on refroidit le plateau d'argent, en versant dans un petit canal en bois de l'eau qui, du bord de la coupelle, se rend toute bouillante sur l'argent. Il en est qui font bouillir l'eau, ce qui est inutile, puisque la coupelle lui communique à l'instant ce degré de chaleur; d'autres se servent d'une eau de savon, ce qui est encore très-inutile.

Lorsque le plateau est figé, on le détache de la coupelle avec un grand ciseau ou pince de fer; on le sort du fourneau & on le plonge dans un baquet plein d'eau, on lui enlève, avec un petit marteau à pointe, les parties de test qui peuvent y être restées adhérentes. On fait sécher ce plateau, on le pèse, &c.

OBSERVATIONS

Sur la préparation des Coupelles.

L'ON n'a jusqu'ici employé pour la formation des coupelles, que des cendres de bois ou d'os. Quelques chimistes en ont fait avec de certains spaths friables : toutes ces matières poreuses & absorbantes sont sans contredit très-bonnes pour faire des essais en petit dessous une moufle, où il s'agit de faire imbiber dans la coupelle tout le plomb qu'on y met à mesure qu'il se convertit en litharge, & pour obtenir le petit grain d'argent que contient ce plomb.

A l'imitation des chimistes & essayeurs, les métallurgistes ont fait de grandes coupelles avec des cendres; ils se sont pourtant bornés aux cendres de bois, qui sont plus communes que celles des os d'animaux; ils ont aussi conçu & reconnu par beaucoup d'expériences, que si l'on étoit contraint, dans l'affinage en grand, de faire pénétrer tout le plomb dans la coupelle, qu'il faudroit d'une part une très-grande épaisseur à la coupelle, par conséquent une prodigieuse quantité de cendres, & que de l'autre l'opération de l'affinage dureroit plus de huit fois autant de temps qu'il en est nécessaire en faisant litharger. Ils ont vu que la litharge se formant toujours à la surface du bain, il étoit possible de faire une petite rigole dans les cendres du bord de la coupelle, & d'y faire couler la majeure partie des litharges qui furnagent le plomb, tandis que l'autre partie pénètre dans la coupelle autour du bain. On a aussi reconnu que pour accélérer la formation de la litharge & pour la chasser vers la voie à mesure qu'elle se forme, il étoit à propos d'y

d'y appliquer des soufflets. On en est resté-là depuis très-long-temps.

La difficulté de se procurer assez de cendres dans les ateliers en grand, le prix de ces cendres, ce qu'il en coûte pour en faire la lotion à l'effet d'en retirer les sels, les sables & le charbon, leur recuit dans des fours à réverbère; tous ces objets de beaucoup de dépenses, joint à ce que les coupelles construites avec des cendres qui sont légères, sont sujettes à s'enlever à la surface d'un métal en fusion infiniment plus pesant qu'elles, sur-tout si, comme je l'ai dit, le fourneau n'est pas construit avec attention & que ces cendres ne soient ni bien préparées ni bien battues; tous ces inconvénients, dis-je, m'ont fait naître le désir de trouver des moyens propres à les éviter. Je vais avoir l'honneur de faire part à l'Académie, de ceux qui m'ont paru les meilleurs; elle voudra bien en juger.

Voici comme j'ai raisonné : puisque dans l'affinage en grand on n'a en vue que de convertir le plomb en litharge pour en obtenir l'argent, ne peut-on pas faire les coupelles de matières non absorbantes, moins coûteuses dans leur préparation, plus durables, plus pesantes & non sujettes à s'enlever pendant l'affinage ? Il ne s'agit plus maintenant que de trouver les matières qui y sont les plus propres.

On sait qu'un sol de fourneau, fait avec de l'argile bien battue, dure plusieurs mois à fondre du minéral de plomb; on en a l'exemple aux mines de basse Bretagne. Je suis assuré qu'un bassin de coupelle fait de bonne argile peu humectée, bien battue à mesure qu'elle sèche, & chauffée avant d'y porter le plomb, dureroit beaucoup; mais il s'y présente une difficulté, c'est que l'argile exposée au feu se durcit trop fortement pour pouvoir en couper pour former la petite rigole servant de passage à la litharge. On pourra remédier à cet inconvénient, en mêlant beaucoup de sable fin & tamisé à l'argile dont on formera la coupelle; on pourra même, suivant moi, faire la coupelle entièrement de sable, ou si l'on veut, l'endroit du passage de la litharge seulement:

alors la voie se feroit avec la même facilité & même plus aisément que dans les cendres, qui se durcissent par l'imbibition de la litharge, au point que l'affineur a souvent beaucoup de peine à former la voie; c'est ce qui me fait croire que de l'argile mêlée de sable pourroit se couper avec les mêmes outils; on pourroit même, en cas de nécessité, avoir recours à une espèce de lime ou rape emmanchée au bout d'une verge de fer.

Pour s'assurer du succès en grand, on en peut faire l'essai dans une coupelle faite de la manière que je viens d'indiquer, & d'une grandeur suffisante pour contenir 15 à 20 livres de plomb. On placeroit cette coupelle sous la voûte d'un petit fourneau à réverbère, tel que celui dont on se sert à Poullaouen pour raffiner l'argent affiné; mais il faut appliquer derrière le fourneau un soufflet qui puisse, comme dans le travail en grand, chasser les litharges en devant, d'où elles puissent couler hors de la coupelle par une petite rigole que l'on feroit au bord de la coupelle, & que l'on approfondiroit à mesure que le plomb diminueroit.

Dans une coupelle en grand, préparée à ma manière, on pourroit je crois passer plus de soixante milliers de plomb de suite, sans craindre d'accident, bien entendu qu'à mesure que le premier plomb mis sur la coupelle lithargeroit, on y en substituerait d'autre, ainsi qu'il est expliqué.

Outre les avantages dont j'ai parlé, cette manière d'opérer en présente d'autres; elle consommeroit beaucoup moins de bois; elle seroit plus expéditive; on convertiroit tout son plomb en litharge, puisqu'il n'en pénétreroit point dans la coupelle, avantage qu'on trouvera assez considérable si on fait attention, 1.^o que la litharge est une matière marchande, & que le test ne l'est point; 2.^o que la litharge est beaucoup plus aisée à fondre ou à revivifier que le plomb contenu dans le test, qui, ainsi que je l'ai dit, ne peut pas être employé avec succès dans les mélanges d'un rafraîchissement. 3.^o Enfin, le test retient toujours plus d'argent proportionnellement que les litharges, ce que j'ai vérifié bien des fois en

passant à la coupelle le plomb provenant de ces deux substances.

On dira peut-être que l'affinage, dans une coupelle préparée de la manière que je propose, n'ira pas aussi vite que dans une coupelle de cendres, puisque non-seulement il coule des litharges hors du fourneau, mais qu'il s'en imbibe en même temps dans la coupelle; à quoi je répondrai que la litharge ne pouvant se former que par le contact de l'air, il ne doit pas s'en former dans la partie inférieure du bain contiguë à la coupelle. C'est donc toujours à la surface du plomb que cette litharge se présente, d'où la majeure partie coule par la voie, tandis que l'autre pénètre dans le bord de la coupelle où le bain se termine; or, si les matières qui forment les coupelles ne sont pas absorbantes, ces litharges, au lieu d'y pénétrer, couleront comme les autres par la voie à mesure qu'elles y seront poussées par l'impulsion du vent des soufflets, ce qui ne retardera point l'opération. Une preuve bien convaincante que la litharge ne pénètre dans les cendres de coupelle qu'autour du disque du plomb, c'est que la croûte imbibée de ces cendres n'est pas plus épaisse vers le milieu que sur ses bords; or, s'il se formoit de la litharge en dessous du bain, le centre de la coupelle où le plomb séjourne huit à dix fois plus long-temps que sur ses bords, devroit avoir huit à dix fois autant d'épaisseur.

Je désire, pour le bien public & l'avantage particulier des compagnies de mines, que l'on fasse l'épreuve de la méthode que je propose. Je l'exécuterai moi-même lorsque je me trouverai dans des fonderies de plomb.

CHAPITRE VI.

Du Raffinage du cuivre.

J'ai dit, en parlant du rafraîchissement, que les cuivres qu'on soumet à cette opération sont communément ce qu'on appelle *cuivres noirs*, c'est-à-dire, qu'outre l'argent qu'on en

retire par les opérations du départ, ils contiennent des matières étrangères, comme fer, arsenic, soufre, & autres qui les rendent cassans & qui leur donnent une couleur plus rembrunie que celle du cuivre pur.

Quoiqu'une bonne partie des substances étrangères soit sortie des cuivres par les procédés précédens & aient passé dans les scories ou crasses, ainsi que je l'ai observé, pendant qu'une autre partie a été entièrement brûlée & détruite, il en reste encore dans les pièces de cuivre ressuées.

Ce sont ces substances hétérogènes, ainsi qu'un peu de plomb qui est resté dans le cuivre, qu'il s'agit d'enlever par le raffinage, afin de le convertir en cuivre rosette & marchand.

Je ne m'arrêterai pas à détailler toutes les différentes méthodes en usage pour le raffinage du cuivre; je dirai seulement qu'elles se réduisent à deux principales. La plus ancienne & la plus usitée se fait dans des petits bassins ou catins, qui peuvent contenir depuis 2 jusqu'à 4 quintaux de ce métal mis en fusion par des charbons de bois, dont la chaleur est considérablement augmentée par le vent de deux forts soufflets ou d'une trompe que quelques auteurs nomment *trombes*. Nous avons vu en Tyrol, feu M. Jars & moi, une manière de raffiner le cuivre dans un catin, qui, sans contredit, est la meilleure en ce genre, en ce que le cuivre noir, au lieu d'être levé à l'ordinaire en gâteaux, passe tout de suite dans le catin du fourneau de raffinage où il est raffiné en peu de momens, ce qui fait une grande économie de charbon.

Cette manière d'opérer ne pouvant s'appliquer aux cuivres qui ont passé à la liquation, ce n'est pas ici le lieu d'en parler; d'ailleurs on en verra la description dans la suite de nos Mémoires que M. Jars, correspondant de l'Académie, va publier.

La seconde méthode de raffiner le cuivre, qui est la moins

connue, est de faire cette opération dans de grands fourneaux à réverbère. Nous en avons vu en Saxe & en Hongrie, mais ils ne valent pas à beaucoup près celui que feu M. Jars a fait construire aux mines de Chessy en Lyonnais. Les premiers, sans donner une aussi forte chaleur que ce dernier, consomment beaucoup plus de bois.

Lorsqu'on a une grande quantité de cuivre à raffiner, je conseille de se servir de la méthode employée à Chessy, décrite dans nos voyages métallurgiques.

Le cuivre noir contenant beaucoup d'argent, est toujours plus impur que celui qui provient d'une belle pyrite jaune cuivreuse, riche en ce métal & qui ne contiendrait point de fin.

Si on raffinoit ce cuivre noir tenant argent, sans le passer à la liquation, il éprouveroit un grand déchet, l'opération seroit longue, & le cuivre rosette qui en résulteroit ne seroit même pas bon, il conserveroit une sorte de fragilité. Au contraire, la rosette provenant du raffinage des pièces de cuivre desséchées est belle, malléable & d'un bon débit dans le commerce; partie de ses impuretés en est enlevée par tous les traitemens que ce métal a subis avant le raffinage. C'est ce qui fait que le déchet du cuivre ressué sera moins fort au raffinage, quoiqu'il ait conservé un peu de plomb, que si on l'eût raffiné avant d'avoir passé aux procédés de la liquation; mais indépendamment de cela, il ne faut pas s'attendre qu'il donne autant de cuivre rosette que s'il n'eût point subi tous ces traitemens, où il s'en détruit une petite partie & l'autre passe dans les déchets, ainsi que je l'ai fait remarquer en détaillant chaque opération: mais je le répète, ce cuivre étant bien raffiné est d'un meilleur débit, & on a eu l'avantage d'en extraire l'argent.

Les crasses ou écumes qui proviennent de ces raffinages, contiennent un peu de plomb vitrifié & du cuivre; elles sont conservées pour être traitées dans la fonte, qui fait l'objet du chapitre suivant.

*De la fonte des déchets résultant des opérations détaillées
dans les chapitres précédens.*

LORSQU'ON a passé à la liquation beaucoup de cuivre & qu'on a en magasin une assez grande quantité de crasses ou déchets, tous métalliques, on en tire parti par la fonte dont il s'agit ici.

Cette fonte peut se faire dans un fourneau à manche particulier, ou dans celui qui est destiné au rafraîchissement en observant d'en démolir la doublure, afin de pouvoir en la reconstruisant, donner à l'intérieur du fourneau les dimensions suivantes : 2 pieds $\frac{1}{2}$ de profondeur depuis le devant de la chemise jusqu'au mur mitoyen qui porte la tuyère, 20 pouces de large contre la tuyère, & 1 pied à l'endroit de la chemise ; la hauteur est la même que dans le rafraîchissement, ainsi que la brasque. On fermera également l'ouverture du bas de la chemise avec des charbons, & on y commencera la fonte après qu'on y aura entretenu pendant 7 à 8 heures un petit feu de charbon, ainsi que dans le bassin de l'avant-foyer qui doit être fait comme celui du rafraîchissement. J'ai donné plus d'épaisseur qu'il n'en est nécessaire à la doublure du fourneau de rafraîchissement, *planche 1.^{re}*, afin de pouvoir y en construire une plus mince dans le cas de la fonte des déchets.

L'on a dit que tous les déchets du rafraîchissement de la liquation, du ressuage, & les écumes ou crasses des affinages du plomb & raffinages du cuivre, sont en partie composés de cuivre, de plomb & d'un peu d'argent ; c'est pour en retirer ces métaux qu'on doit fondre ces déchets, & en mouler les parties métalliques en pains ou pièces de liquation comme dans le rafraîchissement. L'on conçoit qu'il n'est pas aisé, dans cette circonstance, de faire des mélanges qui puissent produire des pièces de liquation dont les proportions

en cuivre, plomb & argent, se trouvent égales à celles des pièces qui proviennent d'un rafraîchissement ordinaire ; mais il suffira de savoir les quantités de chaque espèce de déchets, afin d'en faire entrer dans les mélanges proportionnellement à ces quantités & d'y ajouter suffisamment de test. Par exemple, on étendra sur l'aire de la fonderie ,

1.^o Six quintaux d'écumes d'affinage du plomb ; 2.^o quatre quintaux des scories du ressuage ; 3.^o deux quintaux de celles de la liquation ; 4.^o un quintal des crasses ou écumes du raffinage du cuivre ; 5.^o deux quintaux des déchets provenant du rafraîchissement. Ces 15 quintaux de matière bien mêlés & formant une couche, on étendra également par toute la surface 30 quintaux de test cassé en morceaux gros comme des noix ou environ ; s'il en faut davantage , ce qu'on reconnoitra à la liquation des premières pièces , on en mettra une plus grande quantité sur les mélanges suivans.

Lorsque le fourneau est chauffé & fermé par devant, on y jette quelques charbons allumés & on le remplit jusqu'au haut de charbon ; aussitôt on donne le vent, & on charge deux pleines casserolles du mélange, que l'on recouvre avec une petite corbeille de charbon.

Peu de temps après, on verra couler la matière en fusion dans le bassin de l'avant-foyer ; pour lors on met dans ce bassin de la poussière de charbon , afin qu'en couvrant la surface des métaux , le plomb ne perde pas son phlogistique. Cette précaution sera inutile, lorsqu'il y aura assez de scories sur le métal pour garantir sa surface du contact de l'air.

Le bassin étant rempli de ces scories , on les fait couler par l'un des côtés sur la brasque, qui à cet effet doit être en talus.

Les charges doivent se suivre d'assez près & se faire de la manière ci-dessus ; mais lorsque le fourneau est échauffé, on porte à chacune de ces charges beaucoup plus de mélange qu'aux premières, sans augmenter la quantité de charbon.

Le bassin de l'avant-foyer étant presque plein de métal, on fait couler de sa surface les crasses qui le surnagent, en

les attirant de côté avec un petit morceau de bois placé au bout d'une verge de fer qui lui sert de manche, & ensuite on perce pour faire couler les métaux dans la poêle de fer pour les y mouler en pains de liquation, ainsi qu'il est dit *chapitre I.^r*, qui traite du rafraîchissement, auquel on aura recours, tant pour l'enduit qu'on doit faire à la poêle que pour le refroidissement des pièces & leur sortie du moule.

Si l'on jugeoit qu'il n'y eût pas dans les déchets la quantité convenable de cuivre pour que les pièces puissent se soutenir dans l'opération de la liquation, on pourra, soit supprimer du test dans les mélanges, soit y ajouter du cuivre tenant argent.

Cette fonte exige que l'on introduise fréquemment par l'œil, un ringard dans le fourneau, avec lequel on détache les amas qui se forment dans le fourneau & qui pourroient l'obstruer. Au reste, cette fonte se conduit comme celle du rafraîchissement.

Lorsqu'il ne reste plus à fondre qu'environ un quart de la première couche du premier mélange, on en fait un semblable, & on continue tant que l'on a des matières à fondre & que le fourneau va bien. Cette fonte ne peut guère être continuée plus de deux ou trois fois vingt-quatre heures, sans que la doublure du fourneau soit très-endommagée par le verre de plomb.

Il faut deux ouvriers à chaque poste pour cette fonte, savoir : un maître & son aide.

Les scories qui proviennent de cette fonte, tiennent encore du métal; c'est pourquoi, lorsque tous les déchets sont fondus, on fait une fonte particulière de ces scories, & on moule pareillement en pains de liquation les métaux qui en résultent, qui, comme dans la précédente, sont du cuivre, du plomb & de l'argent. Nous observerons qu'il ne faut pas jeter les scories qui proviendront de cette refonte de scories, car elles contiennent encore du plomb & même un peu de cuivre, dont on peut tirer parti dans la suite.

Les

Les pains de liquation résultant de l'une & de l'autre de ces fontes , sont liquéfiés de la manière indiquée , *chapitre II*, ou dans le fourneau de reverbère , *planche 4*, dans lequel l'on en fera le ressuage en même temps.

On doit faire les essais de l'œuvre provenant de la liquation de ces pièces , afin de s'assurer de sa teneur en argent. Si toutes les opérations antérieures aux dernières ont été bien faites , cet œuvre ne contiendra tout au plus qu'une once d'argent par quintal ; ainsi il n'y auroit pas de profit à le passer à l'affinage en cet état. C'est pourquoi on le conservera pour servir de plomb d'addition dans les mélanges des rafraîchissemens que l'on fera par la suite. En ce cas , on a égard à sa teneur en argent pour faire ses calculs. J'ai dit , en parlant du rafraîchissement , que la litharge convenoit mieux pour servir d'addition que le plomb ; c'est pourquoi , dans la circonstance dont il s'agit , je conseillerois de n'ajouter qu'un tiers d'œuvre , & les deux autres tiers en litharge. Je crois que la raison en est palpable , sur - tout si l'on se rappelle ce que j'ai dit , *chapitre I.^{er}* , en traitant de la manière de faire les mélanges dans tous les cas.

CHAPITRE VIII.

Du Raffinage de l'argent affiné.

L'ARGENT , après avoir fait son éclair dans la grande coupelle , contient encore environ un vingtième de plomb. C'est pour lui enlever ce plomb qu'on le passe à une seconde opération , qu'on nomme *raffinage* ; car , quand cet argent se trouveroit au titre convenable pour être employé , soit à la monnoie , soit par les orfèvres , le plomb qu'il contient n'est pas un alliage propre à lui donner la solidité requise dans les ouvrages qu'on en fait ; il en ternit même l'éclat & empêche qu'il soit sonore : le cuivre lui convient mieux à tous égards.

Mém. 1788.

C c c c

L'on connoît très-bien en France, la manière de raffiner l'argent ; c'est pourquoi je me bornerai à dire qu'en Allemagne on le raffine de deux manières. La première s'opère sur une coupelle de cendres bien battues dans un cercle de fer, ou dans un poëlon de ce métal ; on place cette coupelle vis-à-vis la tuyère d'un petit soufflet de forge, on la recouvre d'une grande moufle qu'on garnit de charbons tout autour ; & afin de ménager ce combustible, on le retient avec des briques, dans l'espace qu'il doit occuper.

L'autre méthode de raffiner l'argent, & qui est en usage aux mines de Poullaouen en basse Bretagne, est de placer la coupelle préparée comme dessus, en dessous de la voûte d'un petit fourneau de réverbère qui a une chauffe à l'un des bouts, d'où la flamme passant par-dessus la coupelle, se rend à une petite cheminée aspiratoire qui est à l'autre bout. Le bois qu'on y emploie doit être très-sec, & coupé en petits morceaux de la longueur de la chauffe & d'environ un pouce de grosseur. Du hêtre refendu donne une flamme plus claire & plus vive que le chêne.

C'est dans l'une ou l'autre des coupelles dont on vient de parler, qu'on doit raffiner les plateaux d'argent provenant de l'affinage du plomb. Pour cet effet, on le réduit en morceaux qu'on porte sur la coupelle lorsqu'elle est bien séchée & le fourneau très-chaud ; l'argent fond en peu de temps ; lorsqu'il est parfaitement en bain, on aperçoit de la litharge à la surface qui, successivement, gagne les bords de la coupelle où elle s'imbibe.

Environ une heure après la parfaite fusion de l'argent, on voit que sa surface devient plus claire & par conséquent moins chargée de litharge ; peu de temps après il n'en paroît plus que de petits filets qui vont se perdre dans les bords de la coupelle, & enfin quand l'argent est au titre de 11 deniers 21 à 22 grains, la surface est très-claire & brillante comme une glace ; alors présentant un fer froid à un pouce de cette surface, son image doit parfaitement

paroître dans le bain, & s'il y a encore quelques filets de litharge, on les aperçoit distinctement; s'il n'y en a que très-peu & qu'ils soient petits, c'est une preuve que l'argent est au titre ci-dessus. On cesse le feu & on ouvre le devant du fourneau, afin de modérer la grande chaleur. Lorsqu'il s'est formé une petite pellicule sur l'argent, on y verse de l'eau, d'abord avec précaution, & on en augmente peu-à-peu la quantité. Le plateau étant entièrement figé, on l'enlève tout rouge avec un ciseau de fer, on le porte avec une tenaille sur une enclume, où un homme le tient de champ, tandis qu'un autre frappe à grands coups de masse sur le côté opposé à celui qui est sur l'enclume, & de cette manière on le roule en forme de cornet, afin de pouvoir le faire entrer dans un grand creuset où il est refondu, & ensuite moulé dans une lingotière de fer, chauffée & graissée avec du suif.

On coupe en dessus & en dessous du lingot deux petits boutons d'argent, pour en faire l'essai suivant l'usage, & connoître parfaitement son titre. Un homme accoutumé à raffiner l'argent, ne s'y trompe pas d'un grain de fin.

En pesant le lingot, on est en état de juger du déchet que l'argent a éprouvé.

On donne à la coupelle la capacité nécessaire pour contenir l'argent qu'on a à y raffiner. On peut raffiner dans une coupelle de cinquante jusqu'à cent marcs à la fois, & même plus s'il est nécessaire. Il y a économie de bois & gain de temps, à ne faire qu'un raffinage au lieu de deux.

Des cendres de bois bien préparées suffisent pour la construction des coupelles à raffiner l'argent. Cependant quand on a la commodité de se procurer des os, je conseillerois de les bien calciner, pulvériser, & d'en ajouter environ un quart avec des cendres de bois bien lessivées, & de tamiser sur la coupelle un peu de cendre ou cendre d'os la plus fine.

E X P L I C A T I O N

D E S P L A N C H E S.

P L A N C H E P R E M I È R E.

Fourneau de rafraîchissement.

FIGURE PREMIÈRE,

Est le plan du fourneau à la hauteur de la tuyère.

1. Murs des côtés du fourneau. 2. Sa doublure. 3. Son intérieur. 4. La tuyère. 5. Encaissement de l'avant-foyer. 6. Bassin de l'avant-foyer. 7. Pierres de taille qui entourent l'avant-foyer. 8. Une pierre servant de marche. 9. Une poêle de fer coulé de 3 pouces $\frac{1}{2}$ à 4 pouces de profondeur, dans laquelle on moule les pièces de liquation. Cette poêle doit avoir un pouce de plus de diamètre dans le haut que dans son fond, pour en faciliter la sortie des pièces, & deux pouces & demi à trois pouces d'épaisseur tant autour que dans le fond.

FIGURE DEUXIÈME.

Coupe du fourneau.

1. Maçonnerie du derrière du fourneau. 2. Sa doublure. 3. Son intérieur. 4. La tuyère. 5. La brasque. 6. Le bassin de l'avant-foyer. 7. La chemise. 8. L'œil par où la matière se rend dans le bassin. 9. La cheminée. 10. Arceau derrière le fourneau. 11. Marche pour monter à l'avant-foyer. 12. Lit d'argile. 13. Lit de scories. 14. Pierres de couvercle. 15. Canaux d'évaporation.

FIGURE TROISIÈME.

Élévation du fourneau vu en devant.

1. Piliers qui portent la cheminée. 2. La doublure. 3. La chemise au bas de laquelle on a laissé une ouverture qu'on ferme avec des charbons, ainsi qu'il est expliqué *chapitre premier*. 4. Le

bout de la tuyère. 5. Intérieur du fourneau au-dessus des murs de la doublure qui se termine en talus.

PLANCHE DEUXIÈME.

Fourneau de liquation.

La figure première est le plan du fourneau au rez-de-chauffée.

1. L'un des murs de la fonderie. 2. Autre mur. 3. *Idem* des côtés. 4. La voie ou passage du plomb. 5. Le soubirail. 6. Le bassin de réception.

FIGURE DEUXIÈME.

Plan supérieur du fourneau.

1. Deux murs de la fonderie. 2. Murs des côtés. 3. *Idem* des bouts. 4. L'intérieur du fourneau, garni de deux plaques de fer coulé. 5. Passage entre ces deux plaques, par lequel le plomb s'écoule dans la voie. 6. Sept soubiraux pour donner plus d'activité au charbon enflammé.

FIGURE TROISIÈME.

Coupe en long.

1. Mur de la fonderie. 2. *Idem* des bouts du fourneau. 3. Pavé en talus maçonné en briques au fond de la voie. 4. Canal d'évaporation de l'humidité. 5. La voie. 6. L'une des plaques de fer coulé, vue de côté. 7. Six pièces de liquation. 8. Le soubirail. 9. Le bassin de réception.

FIGURE QUATRIÈME.

Coupe en travers.

1. Mur du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau. 3. La voie. 4. Les deux plaques de fer coulé. 5. L'intérieur du fourneau. 6. Une des pièces de liquation. 7. Un des soubiraux. 8. Une porte de fer lutée, qui ferme le devant du fourneau lorsque les pièces y sont rangées. 9. Canal d'évaporation.

P L A N C H E T R O I S I È M E.

Fourneau de ressuage.

FIGURE PREMIÈRE.

Plan au rez-de-chauffée.

1. Murs du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau, construits en moellons. 3. Murs du fond en briques. 4. Petits murs de séparation des voies. 5. Les trois voies. 6. Trois passages pour la flamme & la fumée. 7. Une barre de fer pour soutenir les petits murs de la séparation des voies.

FIGURE DEUXIÈME.

Coupe en long.

1. Mur du bâtiment. 2. *Idem* du fond du fourneau. 3. Un des petits murs de séparation des voies. 4. Pavé en briques posées de champ; ce pavé qui fait le sol de chaque voie est en pente. 5. L'intérieur du fourneau. 6. Une forte plaque de fer fondu plus épaisse dans son milieu que sur ses bords. Il y en a une sur chaque mur de séparation. 7. L'un des trois soupiraux ou cheminées qui aboutissent à la partie supérieure de la voûte. 8. La voûte.

FIGURE TROISIÈME.

Élévation du fourneau vu en devant.

1. Mur du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau construit en moellons. 3. La doublure en briques. 4. La voûte. 5. L'entrée des trois soupiraux. 6. L'intérieur du fourneau. 7. Les quatre murs de séparation des voies. 8. Ces voies. 9. Quatre plaques de fonte posées sur les murs de séparation. 10. Barre de fer pour la solidité des murs de séparation.

FIGURE QUATRIÈME.

La porte de fer lutée qui par le moyen d'une chaîne passée dans l'anneau 1, & correspondant à un petit treuil ou cabestan, s'enlève & se place à volonté.

Cette porte est destinée à fermer le devant du fourneau depuis

le dessus des plaques de fer cotées 9 dans la *figure troisième* jusqu'à la voûte, ce qui s'exécute lorsque les pains de cuivre liquéfiés sont arrangés dans le fourneau.

PLANCHE QUATRIÈME.

Fourneau pour le double procédé de liquation & du ressuage.

FIGURE PREMIÈRE.

Plan du fourneau à sa base.

1. L'un des murs du bâtiment contre lequel est adossé le fourneau. 2. Murs des côtés du fourneau construits en moellons, chaux & sable. 3. Maçonnerie en briques servant de doublure au fourneau. On y peut employer des pierres, mais il faut qu'elles puissent résister à la chaleur : les briques de cette partie doivent être scellées avec de l'argile ou de la terre à four réfractaire. 4. La voie de la flamme & des matières fondues. 5. Autre voie par où s'écoule le plomb. 6. Emplacement d'une petite porte de tôle lutée, en dessous de laquelle on laisse un petit trou pour le passage du plomb. 7. Le bassin de réception où se rend le plomb à mesure qu'il coule des pains de liquation. 8. La chauffe où le bois se place en longueur. 9. Petite porte par où l'on sort les braises, & qu'on tient bouchée avec une brique. 10. Trois petits conduits entre les murs pour procurer une libre sortie aux vapeurs aqueuses qui s'émanent de la maçonnerie, qui sans cela seroit lézarder les murs. 11. Six autres petits conduits pour le même objet.

N.^e On pourroit, ce qui seroit encore mieux, pour tenir lieu de tous ces soubiraux, laisser un vide de chaque côté du fourneau, de deux à trois pouces, entre la doublure & les murs, lequel vide prendroit depuis le rez-de-chaussée jusqu'au haut, & qui régneroit dans toute la longueur du fourneau, en observant seulement de laisser de distance en distance, des briques saillantes qui de la doublure iroient s'appuyer contre les murs de maçonnerie cotés 2; ce qui donneroit la solidité requise & empêcheroit la poussée des murs de côté. Je conseille même d'en faire autant dans la construction de tous les fourneaux soit à manche ou autres.

12. Petite porte carrée par laquelle on dégrasse la voie avec un petit rouable de fer. Mais au reste, cette ouverture doit être

exactement fermée par une brique ou pierre lutée tout autour avec de la terre ; on ne l'ouvrira que lorsqu'il s'agira de décrasser.

13. Murs de la chauffe.

FIGURE DEUXIÈME.

Plan supérieur du fourneau.

1. Murs du bâtiment, 2. Maçonnerie des côtés du fourneau. 3. Murs en brique des bouts du fourneau. 4. Sa doublure. 5. Six plaques de fer coulé, inclinées comme le fait voir la *figure trois*. 6. Les trois ouvertures entre les arceaux pour le passage de la flamme, & par lesquelles le plomb tombe dans la voie. 7. La chauffe. 8. Petits murs de la chauffe, & qu'il sera bon de couvrir avec une plaque de fer fondu de la même forme, sans quoi les briques seroient sujettes à se déranger en mettant le bois.

FIGURE TROISIÈME.

Coupe en long du fourneau.

1. Murs des bouts. 2. Coupe des quatre arceaux, qui doivent être construits en bon granit ou pierre schisteuse qui tiennent au feu sans s'éclater. Au défaut de ces pierres on se servira de briques. Les deux arceaux des extrémités n'ont que la moitié de la longueur des deux autres. 3. Quatre petits murs en briques, & en talus sur les arceaux pour recevoir les plaques de fer. 4. Le dessous des arceaux ou conduits de la flamme. 5. Les trois passages de la flamme entre les arceaux. 6. La voie. 7. Le pavé en pente de la voie. 8. Endroit où se rend le plomb, d'où il coule dans le bassin de réception. 9. La chauffe. 10. Trou par où l'on retire les braises lorsqu'il y en a trop dans la chauffe. 11. Sol de la chauffe. 12. Porte pour retirer les crasses. 13. Les six plaques de fer sur lesquelles reposent les pièces de liquation. 14. Trois pièces de liquation polées de champ sur les plaques de fer. 15. Intérieur du fourneau. 16. La voûte. 17. Les trois petites cheminées. 18. La grande cheminée. 19. Maçonnerie en briques, dans laquelle sont pratiquées les trois petites cheminées.

FIGURE QUATRIÈME.

Coupe en travers du fourneau.

1. Mur du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau. 3. Sa doublure

doublure en briques. 4. La voûte. 5. Mur qui porte les petites cheminées obliques. 6. L'une de ces cheminées. 7. Passage de la flamme dans cette cheminée. 8. Une brique servant de registre, que l'on peut avancer ou reculer pour régler le degré de chaleur. 9. La grande cheminée qui n'a que six pouces intérieurement en ce sens & un pied de largeur. 10. Les briques de couvercle de l'une des petites cheminées. 11. L'intérieur du fourneau. 12. L'un des arceaux en pierres de taille, dont les panneaux des côtés doivent porter d'un pouce sur les murs de la doublure, ainsi que la figure le fait voir. Les lignes ponctuées sur ces arceaux, marquent l'inclinaison des parois pour le passage de la flamme. 13. L'une des plaques de fer vue sur la longueur. 14. Cinq pièces de liquation placées comme il convient. 15. Le passage de la flamme, où l'on voit la petite porte cotée 12 dans la figure trois. 16. La voie par laquelle le plomb coule dans le bassin de réception. 17. Ce bassin. 18. Huit petits soupiraux pour l'évaporation de l'humidité. 19. Pavé de la voie en briques posées de champ, qui doivent être bien scellées afin que le plomb ne puisse pas pénétrer.

FIGURE CINQUIÈME.

L'une des deux portes qu'il faut pour fermer les deux bouts du fourneau, lorsqu'on y a placé les quinze pièces de liquation.

1. Cercle de fer autour de la porte. 2. Trois bandes de fer en travers. 3. Trois autres bandes *idem* en long. 4. Crochet ou anneau de fer, dans lequel on fixera une chaîne qui passera sur une poulie, d'où elle répondra à un petit treuil au moyen duquel on enlèvera facilement cette porte, & on la posera à l'une des embouchures du fourneau sur les petits murs cotés 1, figure trois. 5. Petit trou dans la porte, par lequel on pourra voir ce qui se passera dans le fourneau; & si toutes les pièces ont la chaleur nécessaire; mais on aura soin de la fermer, soit avec une brique ou par une petite porte de tôle posée sur ses gonds.

L'on ne voit que l'extérieur de la porte. La partie qui s'applique contre l'ouverture du fourneau est cachée; elle doit être garnie d'un bon lut retenu par des crochets de fer, qui eux-mêmes tiennent dans des feuilles de tôle attachées aux barres de fer.

FIGURE SIXIÈME.

Deux morceaux de terre bien cuite ou de briques taillées comme la figure l'indique.

Ces pièces sont destinées à tenir les pains de liquation dans une position verticale. Il en faut douze de celle cotée (*a*) & six de celle cotée (*b*) pour les quinze pièces de liquation qui entrent dans une fournée. Celles *b* se placent de manière que la partie cotée 1 porte contre les briques de la voûte du fourneau, & celle 2 repose sur la pièce de liquation qui est dans l'un des côtés.

La pièce de terre cuite cotée *a*, se place de manière que ses extrémités cotées 1 portent sur deux pains ; & la partie 2 qui ne doit avoir que trois pouces de longueur, descend entre ces pains & les empêche de s'approcher.

PLANCHE CINQUIÈME.

Fourneau d'affinage ou de coupelle.

FIGURE PREMIÈRE.

Plan du fourneau au rez-de-chauffée.

1. Maçonnerie ou massif de la base du fourneau. 2. Les grands canaux d'évaporation. 3. Murs du cendrier. 4. Le cendrier.

FIGURE DEUXIÈME.

Plan supérieur du fourneau.

1. Mur du pourtour du fourneau. 2. La chauffe avec sa grille. 3. Le passage de la flamme. 4. Porte de la chauffe. 5. Petits canaux pour l'évaporation de l'humidité, que l'on a exprimés par des lignes ponctuées. 6. Voie ou passage de la litharge. 7. Autre ouverture qu'on nomme *bouche à feu*, pour introduire du plomb dans le fourneau à mesure que la litharge tombe sur l'air de la fonderie. 8. Trou pour placer le canon ou buse de la trompe qui porte le vent dans le fourneau. Si ce sont des soufflets, il faut deux de ces trous pour y placer deux buses.

Fig. 1.

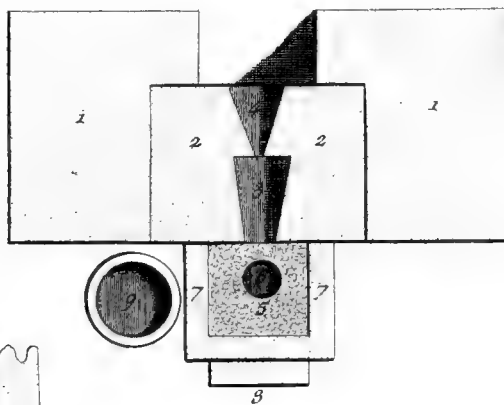


Fig. 2.

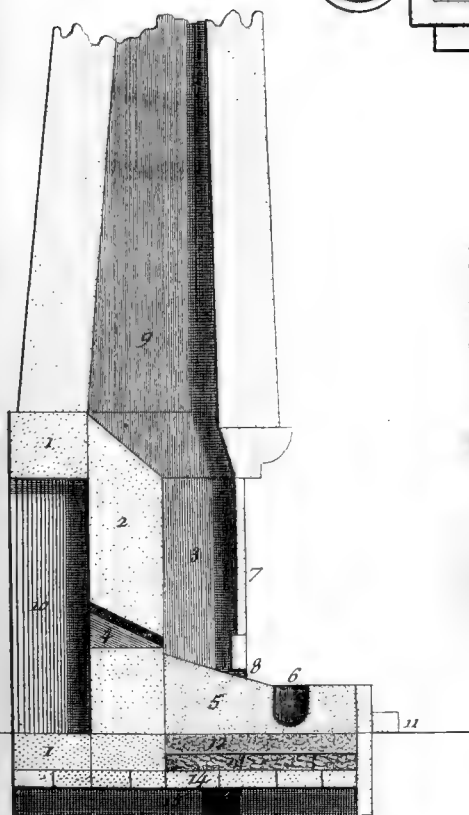


Fig. 3.

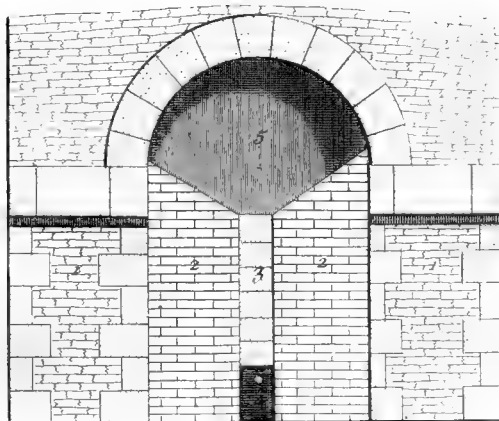




Fig. 1.

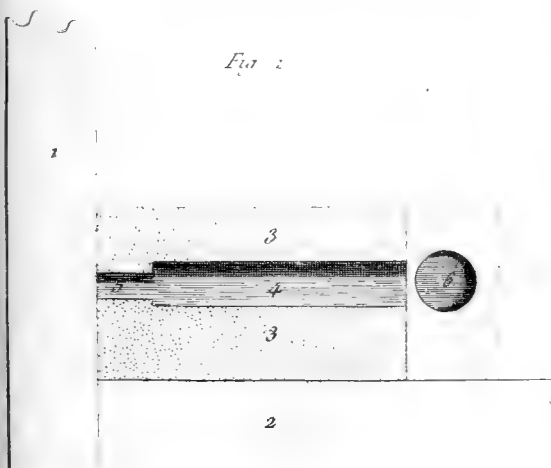


Fig. 2.

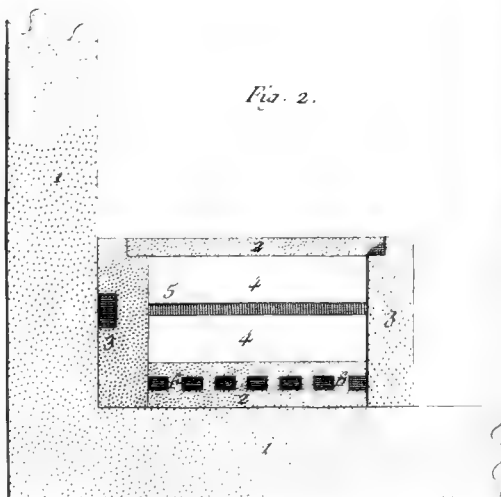


Fig. 3.

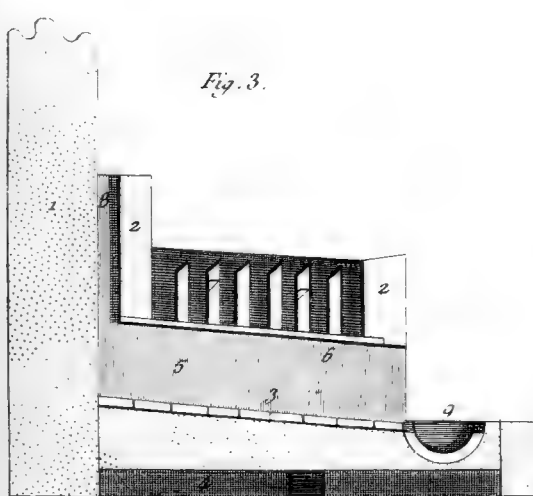
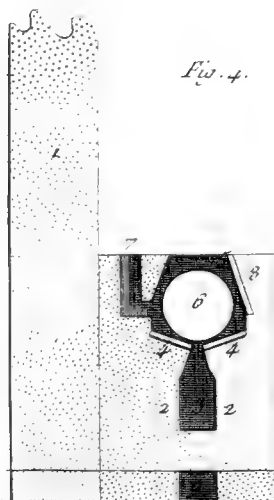


Fig. 4.



Ech. de 1 2 3 4 5 6 12 18 24. Pic.

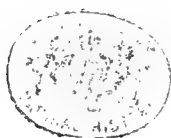


Fig. 1.

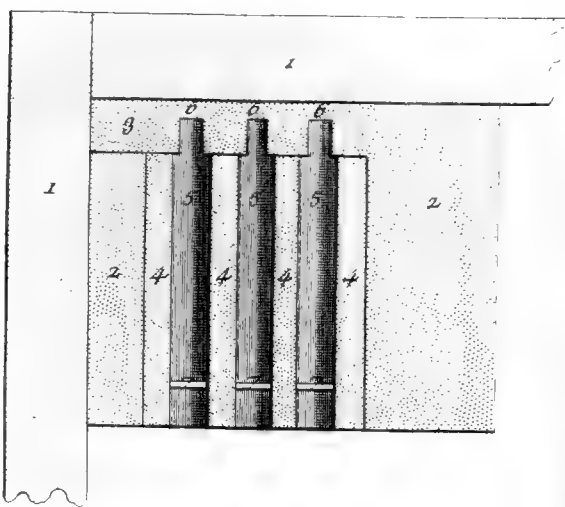


Fig. 2.

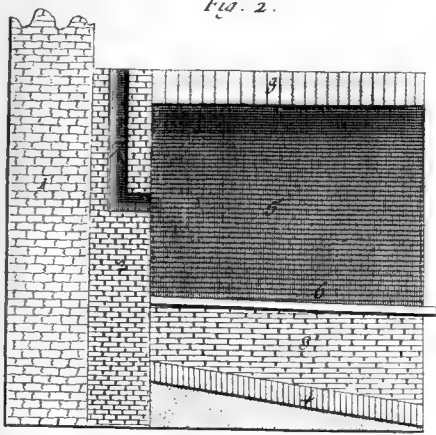


Fig. 3

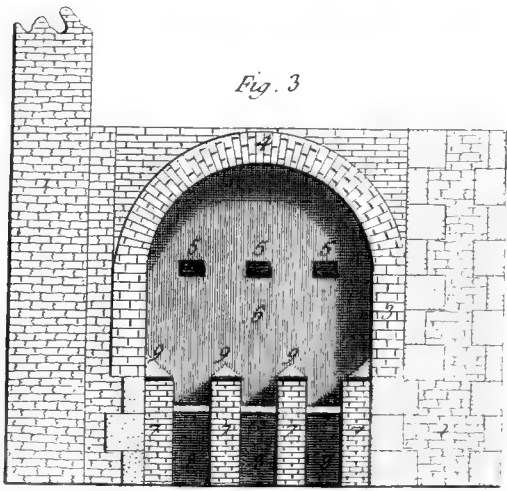
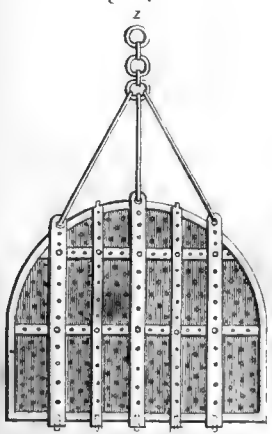


Fig. 4.



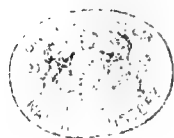


Fig. 1.

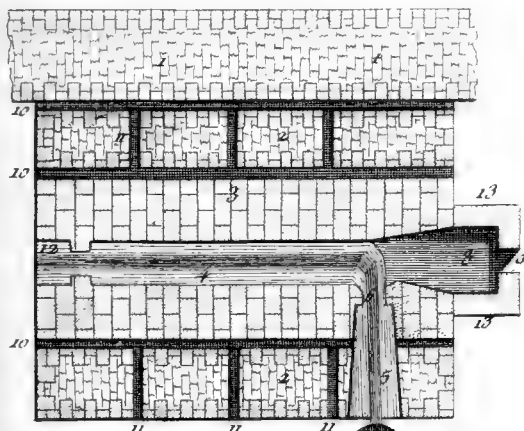


Fig. 2.

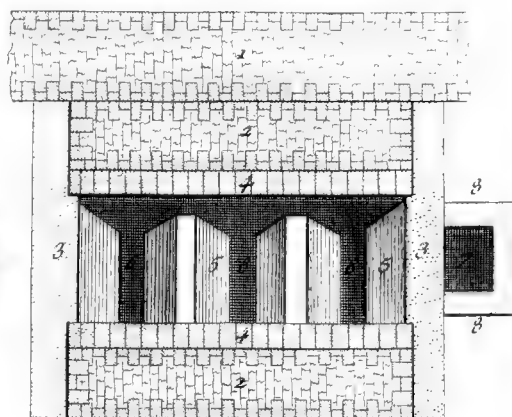


Fig. 3.

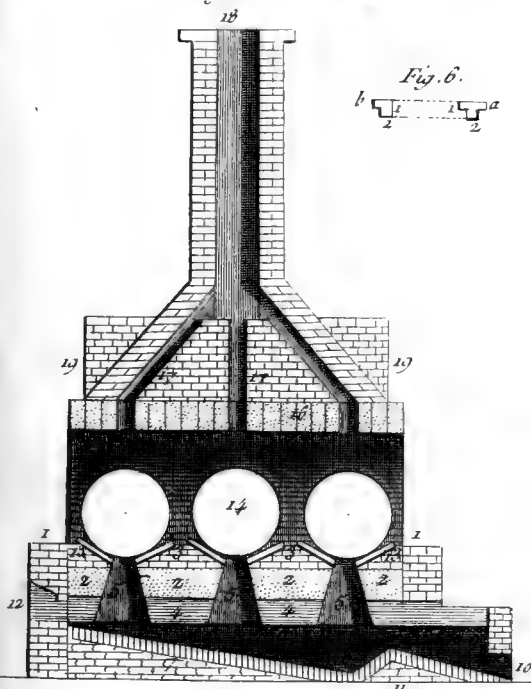


Fig. 6.

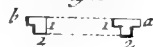


Fig. 4.

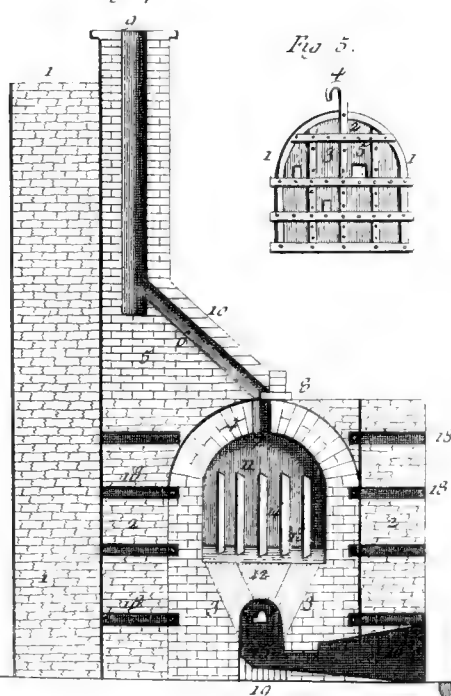
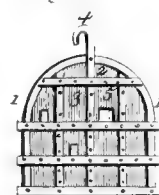


Fig. 5.



Echelle de 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Pies



Fig. 1.

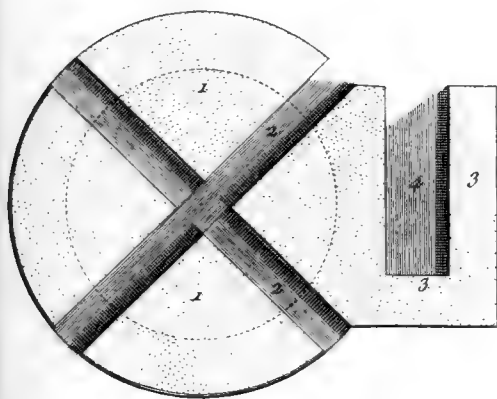


Fig. 2.

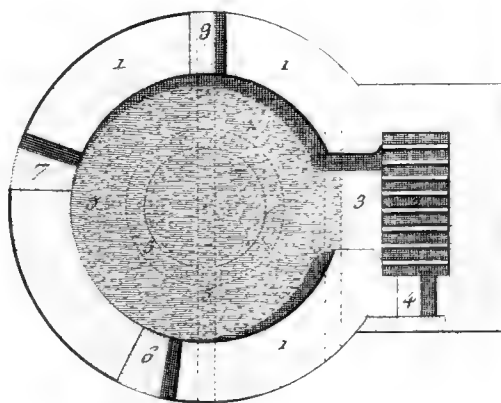
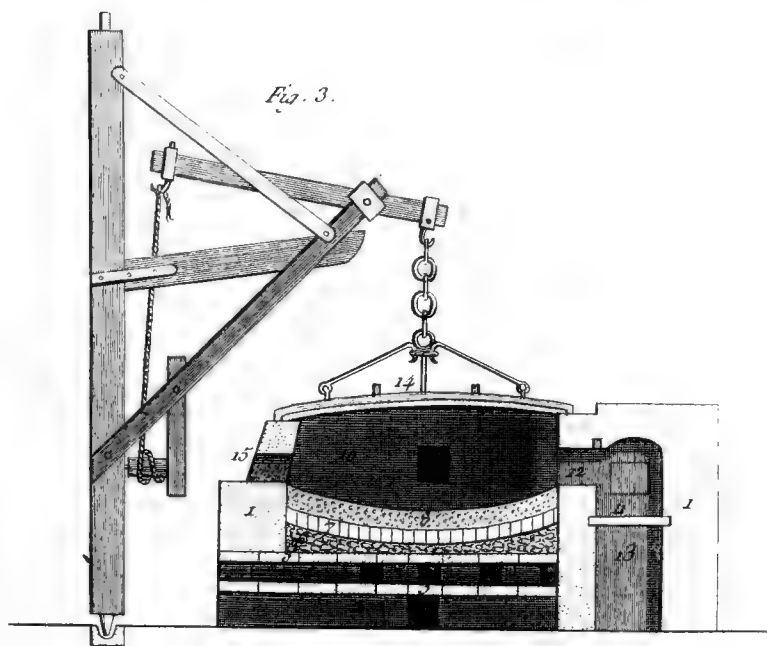


Fig. 3.



Echelle de 24. Pies.

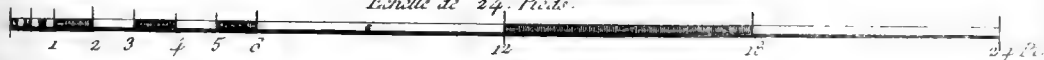




FIGURE TROISIÈME.

Coupe du fourneau & de la chauffe.

1. Murs du fourneau & de la chauffe.
2. Grands canaux d'évaporation.
3. Leurs pierres de couvercle.
4. Petits canaux d'évaporation.
5. Leurs pierres de couvercle.
6. Lit de scories.
7. Pavé en briques posées de champ.
8. Bassin de la coupelle.
9. Trou de la tuyère.
10. L'intérieur du fourneau.
11. Celui de la chauffe.
12. Le passage de la flamme.
13. Le cendrier.
14. Le chapeau de fer avec son lut & son grua pour l'enlever.
15. Le trou ou bouche à feu.



NOUVELLES RECHERCHES

Sur les constructions des Équations en différences finies du 1.^{er} ordre, & sur celle des limites de ces Équations.

Par M. CHARLES.

L'INTÉGRALE d'une équation en différences finies du 1.^{er} ordre peut être regardée comme la suite d'un nombre donné de points qui doivent être placés d'après un point aussi donné, suivant certaines conditions. Or, si l'équation est élevée, le nombre des intégrales ou des suites de points qui peuvent vérifier l'équation, dépendra du nombre de points qui doivent être placés d'après ce point donné, & du degré d'élévation de la proposée; de manière que, nommant p ce degré d'élévation & n le nombre des points à placer, on a p^n pour le nombre des intégrales.

Effectivement, soit $\phi(n)$, ce nombre pour n points, on aura $\phi(n+1) = p \phi(n)$; donc $\phi(n) = p^n$.

Si, dans chacune des intégrales, on joint chaque point par une ligne à son consécutif, on aura pour les p^n intégrales p^n polygones, qui pourront les représenter; mais si, dans tous ces polygones, on compare les directions de deux côtés de même n.^o, on n'en trouvera que p distinctes.

Maintenant, soit l'équation en différences finies $\Delta y - p \Delta x = \pm \Delta x \sqrt{q}$, où Δ est la caractéristique de différentiation. Des 2^n intégrales que peut avoir cette proposée, il y en a trois principales: 1.^o celle où le radical est pris toujours en plus; 2.^o celle où il est pris toujours en moins; 3.^o celle où il est pris alternativement en plus & en moins.

Deux côtés consécutifs des polygones qui représentent les deux premières intégrales, font entre eux un angle

de l'ordre Δx . Il n'en est pas ainsi pour le polygone qui représente la troisième intégrale; tellement que, si l'équation tombe dans l'infiniment petit, cet angle devient infiniment petit pour les deux premiers polygones, & reste fini dans le troisième, sauf dans certains cas pour certaines valeurs de la constante. Les courbes limites dans lesquelles se changent les deux premiers polygones, n'ont donc qu'une tangente pour chacun de leurs points; la courbe limite du troisième polygone, a pour chacun de ses points deux tangentes qui diffèrent entre elles d'un angle fini.

Reprenons la proposée du premier ordre $\Delta y - p \Delta x = \pm \Delta x \sqrt{q}$, pour en trouver la troisième intégrale; & à cette fin, multiplions-la par un facteur ϕ , qui fasse du premier membre une différentielle complète que j'appellerai Δv ; on aura donc:

$$\Delta v = \pm \phi \Delta x \sqrt{q}.$$

Maintenant, soit pour abréger $\phi \Delta x \sqrt{q} = \Delta r$; soient encore V, R des valeurs de v & de r correspondantes & données, $V', V'' \dots V^\mu = v$, & $R', R'' \dots R^\mu = r$ des valeurs consécutives à V & à R ; on aura d'abord l'équation indéterminée $v' = v \pm \Delta r$; & les suivantes déterminées

$$V' = V + \Delta R;$$

$$V'' = V + \Delta R - \Delta R';$$

$$V''' = V + \Delta R - \Delta R' + \Delta R'';$$

$$V^\mu \text{ ou } v = V + \Delta R - \Delta R' + \Delta R'' - \Delta R''' \dots \pm \Delta R^{\mu-1};$$

$$\text{donc } v = V + \Delta R \cos. \pi 0 + \Delta R' \cos. 1. \pi + \Delta R'' \cos. 2 \pi \dots + \Delta R^{\mu-1} \cos. (\mu - 1) \pi.$$

Pour avoir la somme de μ , terme d'une suite, il faut intégrer le terme $(\mu - 1)$, terme qui est ici,

$\Delta R'' \cos. \pi \mu = \Delta r \cos. \pi \mu :$

donc $v = V + \Sigma \Delta r \cos. \pi \mu$, & mettant les valeurs en φ , x & y ,

$$\Sigma \varphi (\Delta y - p \Delta x) = \Sigma [\varphi \Delta x \cos. \pi \mu \cdot V(q.)] + V.$$

Si la formule tombe dans l'infiniment petit, alors on a :

$$f \varphi (dy - p dx) = V - \frac{\varphi dx}{2} \cos. \pi \mu V(q.).$$

V est la constante. J'avois trouvé déjà sous le nom de *deuxième intégrale*, cette formule que j'appelle ici *troisième*, & qui est aussi complète que les deux premières. J'ai fait voir aussi que les intégrales connues jusqu'ici sous le nom d'*intégrales particulières*, n'étoient que des cas incomplets tirés de cette troisième intégrale, qu'on obtenoit en donnant à la constante une valeur déterminée.

On peut donc regarder cette troisième intégrale comme la véritable origine des intégrales particulières.

Formule d'interpolation.

Comme la formule suivante est très-courte, je l'insère ici, quoique étrangère à l'objet de ce mémoire. Soient donc y & x deux indéterminées ; & 2π le rapport de la circonférence au diamètre. S'il falloit trouver une fonction y qui, pour les valeurs de x , 0, 1, 2, &c. devînt Y , Y' , Y'' , &c. on pourroit écrire :

$$\pi^2 y = (\sin. \pi x)^2 \left(\frac{Y}{x^2} + \frac{Y'}{(x-1)^2} + \frac{Y''}{(x-2)^2} + \dots \right).$$



M A N I È R E

De construire un Aréomètre qui soit tel, que les pesanteurs spécifiques qu'il indique soient en raison inverse des volumes qu'il mesure, & qui, en conséquence, fait connoître la pesanteur spécifique des liqueurs par sa simple immersion, & sans qu'il soit besoin d'aucun calcul.

Par M. B R I S S O N.

LA connoissance de la pesanteur spécifique des corps, tant solides que liquides, en est une très-importante en physique. Aussi les physiciens ont-ils de tous temps cherché à se procurer des instrumens propres à leur donner une connoissance si utile. Celui des instrumens qui est le plus commode pour faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs, est l'aréomètre. Nous ne pouvons pas disconvenir que celui qu'a employé Fahrenheit, (a) ne soit capable de remplir toutes les vues qu'on se propose, puisqu'il mesure toujours des volumes égaux de liqueurs, & que le poids de ces volumes est donné avec exactitude par la somme du poids de l'instrument & du poids dont on le charge pour le faire enfoncer toujours de la même quantité, dans quelque liqueur qu'on le plonge. Il sembleroit donc qu'il n'y a plus de recherches à faire, puisque ce que l'on désire est déjà trouvé depuis longtemps. Mais on reproche à cet instrument de ne pas faire connoître tout d'un coup les différences des pesanteurs spéci-

Déposé à
l'Académie le
12, & lu le 26
avril 1769.

(a) L'aréomètre de Fahrenheit est un aréomètre de verre, lesté de mercure à l'ordinaire, mais dont la tige, qui doit être très-courte & très-menue, est surmontée d'un petit bassin propre à recevoir des poids.

siques des liqueurs, & d'exiger un calcul pour les rapporter à une table générale. En effet il en exige un, qui n'est cependant pas fort pénible : mais il y a beaucoup de gens qui voudroient s'éviter jusqu'au plus petit travail.

On désireroit donc un aréomètre qui par sa simple immersion dans les liqueurs, indiquât avec exactitude le rapport de la densité ou pesanteur spécifique de ces liqueurs, à celle de l'eau de pluie ou de l'eau distillée. Personne jusqu'à présent n'a donné la construction d'un aréomètre qui puisse remplir ces vues.

L'aréomètre qui est actuellement en usage, & qui est celui de Boyle, n'est point propre à remplir cet objet. Ses degrés ne se rapportent à aucun terme connu ; & les aréomètres de cette espèce, construits par différentes personnes, ou par la même en différens temps, ne sont point comparables entr'eux. Il est même très-rare que le même ouvrier fasse, quoique dans le même temps, plusieurs de ces instrumens, qui, étant plongés dans les mêmes liqueurs, s'y tiennent tous au même degré. On ne doit pas en être étonné ; car les degrés de ces sortes d'aréomètres sont des parties égales en longueur, & cependant leurs tiges sont rarement cylindriques, & plus rarement encore en même rapport avec le reste de l'instrument.

L'aréomètre qu'a imaginé M. de Montigny, pour connoître les différens degrés de pureté des eaux-de-vie, sera très-propre à répondre à ses vues, lorsqu'il sera construit avec exactitude & suivant les règles qu'il a établies ; mais il n'est propre qu'à cela, & ne peut point faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs.

L'aréomètre de M. Baumé, dont il a donné la construction dans les papiers publics, (*b*) & qu'il destine aussi à faire connoître le degré de rectification des liqueurs spiritueuses, ne peut pas non plus faire connoître la

(1) Voyez l'Avant-Coureur, N.º 45, 50, 51 & 52, année 1768 ; & N.º 2, année 1769.

pesanteur spécifique de ces liqueurs; & en effet, je ne crois pas que M. Baumé lui-même le regarde comme propre à cet effet, quoique le titre de son ouvrage l'annonce. Mais on peut dire de plus, que cet aréomètre n'est pas même propre à remplir l'objet qu'il s'est proposé, c'est-à-dire, à faire connoître, sur-tout avec la précision qu'il promet, le degré de rectification des liqueurs spiritueuses; car il gradue son aréomètre, en le plongeant d'abord dans neuf parties d'eau, dans lesquelles il a fait dissoudre une partie de sel marin bien sec : la partie de la tige à laquelle il cesse de se plonger dans cette liqueur, est marquée *zéro*. Il plonge ensuite l'instrument dans de l'eau très-pure; ce qui lui donne le dixième degré. Il divise donc l'intervalle qui sépare ces deux termes en dix parties égales, qui forment autant de degrés; ensuite il se sert de cette échelle pour graduer de la même manière, jusqu'à cinquante degrés, le reste de la longueur de la tige. Il est aisé de voir combien cette graduation est défectueuse.

1.^o L'aréomètre est gradué au moyen de l'eau chargée de sel, pour essayer des liqueurs spiritueuses. Il est bien vrai que dans le mélange de l'eau, soit avec les sels, soit avec les esprits ardens, il y a pénétration dans les deux cas; mais elle n'est ni égale ni proportionnelle.

2.^o Les degrés sont des parties égales : il faut pour cela que la tige soit bien cylindrique; ce qui arrive rarement. Mais supposons-la telle : l'aréomètre n'en sera pas plus exact; car les degrés ne doivent pas être égaux : la raison en est que les degrés d'enfoncement de l'instrument étant proportionnels à la densité de la liqueur, ne le sont pas au degré de rectification; puisque ce degré de rectification n'est pas lui-même proportionnel à cette densité, comme je l'ai prouvé dans mon *Mémoire sur le rapport des différentes densités de l'esprit - de - vin avec ses différens degrés de pureté.* (c).

(c) Voyez les *Mémoires de l'Académie*, année 1768.

Il est vrai que M. Baumé donne une table qui marque les degrés d'enfoncement de l'aréomètre dans différens mélanges d'eau & d'esprit-de-vin, au moyen de laquelle on pourroit un peu rectifier les erreurs que les défauts de son instrument peuvent causer. Mais cette table est-elle exacte ? il est bien difficile de le croire, lorsqu'on voit que dans quelques-uns des mélanges elle marque l'enfoncement de l'aréomètre toujours au même degré, soit que ces mélanges soient refroidis par la glace, ou même à 5, à 10 & à 15 degrés au dessous de la congélation, soit qu'ils soient échauffés à 5, à 10, à 15, à 20, & même à 25 degrés au-dessus de la congélation ; comme si 40 degrés de différence dans la température de ces liqueurs, ne causoient aucun changement dans leurs densités ; ce qui n'est ni vrai ni vraisemblable.

Un aréomètre gradué sur les principes de M. Baumé ; quand il n'auroit pas les défauts dont nous venons de parler, ne seroit pas non plus propre à faire connoître avec précision, comme il le prétend, la quantité de matières salines contenues dans l'eau, à moins que ce ne fût une eau chargée uniquement du même sel que celui dont on se seroit servi pour graduer l'instrument ; car la pénétration qui a lieu dans la dissolution des différens sels dans l'eau, n'est pas la même pour toutes sortes de sels : ce qui produiroit dans ces dissolutions des densités différentes, quoiqu'elles tinssent toutes la même quantité de sels.

M. le Ratz de Lanthénée vient de publier une petite brochure in-12 de 32 pages, dans laquelle il donne la construction d'un aréomètre qui a quelque rapport à celui de Fahrenheit, mais qui est beaucoup moins bien conçu, & qui, à une construction beaucoup plus difficile, réunit tous les inconvéniens qu'on reproche à ce dernier.

M. le Ratz veut 1.^o que tous les aréomètres pèsent exactement 1000 grains, quels que soient leurs volumes, & qu'on marque l'endroit de leur tige où cesse leur

immersion dans l'eau de pluie : qu'ensuite on les plonge une seconde fois ; en les chargeant d'un poids connu , comme , par exemple , de 40 grains ; & qu'on divise en 40 parties égales , l'intervalle qui sépare les points des deux immersions ; ce qui servira d'échelle pour graduer le reste de la longueur de la tige. 2.^o Si l'aréomètre pèse plus ou moins de 1000 grains , M. le Ratz veut que le poids dont on le charge ensuite pour former l'échelle de 40 degrés , soit proportionnel au poids de l'aréomètre : difficulté très-considérable pour l'ouvrier qui seroit chargé de la construction de ces instrumens.

On voit par-là que M. le Ratz a affaire à des volumes de liqueurs qu'il regarde comme égaux , & qui ne le seront qu'autant que la tige de l'aréomètre sera parfaitement cylindrique ; ce qui ne se trouvera presque jamais. Ensuite , comme les densités sont en raison inverse des volumes , il faudra faire une règle de proportion , pour avoir le rapport de la densité d'une liqueur à celle de l'eau de pluie. Cet aréomètre , comme celui de Fahrenheit , qui mesure toujours des volumes égaux , dans quelque liqueur qu'on le plonge , n'est point sujet aux erreurs que peut causer l'irrégularité de la tige , & comme il est d'ailleurs d'une construction beaucoup plus simple & plus facile , il est préférable à tous égards.

M. le Ratz ayant senti ces difficultés de construction , a cherché à simplifier celle de ses aréomètres ; & il prétend y être parvenu , en disant que des aréomètres de différens poids seront toujours comparables entr'eux (c'est-à-dire sans doute qu'ils marqueront les mêmes degrés dans les mêmes liqueurs) , si l'intervalle qui sépare les points des deux immersions dont nous avons parlé ci-dessus , est divisé en autant de parties égales ou degrés qu'on aura employé de grains pour produire la seconde immersion : ce qui est une erreur si grossière , qu'elle n'a pas besoin d'être démontrée. Il est vrai qu'il dit ensuite , qu'il faut avoir égard au poids de l'aréomètre ; mais cela rentre

dans l'ordre de celui de Fahrenheit; & son instrument; non plus que ce dernier, ne peut pas faire connoître sans calcul, le rapport des densités des liqueurs.

D'après ce que nous venons de dire, il est clair que nous n'avons point d'aréomètre qui puisse, par sa seule immersion, donner le rapport de la pesanteur spécifique des liqueurs à celle de l'eau de pluie ou de l'eau distillée. Je crois avoir trouvé la manière d'en faire tels qu'on les désire; & c'est d'un aréomètre de cette espèce dont je vais donner la construction.

Un aréomètre que l'on plonge dans des liqueurs de différentes densités ou pesanteurs spécifiques, mesure toujours des volumes de liqueurs, qui sont en raison inverse de ces densités; en sorte que le volume de la partie plongée dans une liqueur, excède autant le volume de la partie plongée dans une autre liqueur plus pesante, que la densité de cette dernière liqueur excède la densité de la première. Ainsi, pour construire un aréomètre qui, par sa simple immersion, fasse connoître le rapport de la densité d'une liqueur quelconque à celle de l'eau de pluie, il s'agit de trouver un moyen de connoître exactement le rapport du volume de la partie plongée dans l'eau de pluie, au volume de la partie plongée dans cette liqueur.

De même qu'un aréomètre, dont le poids demeure toujours le même, s'enfonce dans une liqueur moins dense plus qu'il ne le fait dans une liqueur plus dense, & que ce *plus* est toujours en raison inverse des densités de ces liqueurs; de même aussi un aréomètre qu'on charge successivement de différens poids, s'enfonce davantage dans la même liqueur, à mesure qu'il est plus chargé; & la quantité dont il s'enfonce de plus dans ce dernier cas, est toujours proportionnelle aux poids dont il est chargé. Si donc on plonge dans l'eau un aréomètre qui pèse, par exemple, 9 gros, & ensuite 10 gros, le volume de la partie plongée dans le premier cas sera au volume de la partie plongée dans le second, comme 9 est à 10. Si

ensuite, réduisant l'aréomètre à son premier poids (que j'appelle *poids primitif*), savoir, à 9 gros, on le plonge dans une liqueur moins dense que l'eau, & qu'il s'y enfonce jusqu'au point où il s'est enfoncé dans l'eau lorsqu'il pesoit 10 gros, il est clair que le volume de cette liqueur, mesuré par l'aréomètre, sera au volume de l'eau mesuré par l'aréomètre de même poids, comme 10 est à 9 ; & puisque les densités sont en raison inverse des volumes, on conclura avec raison que la densité de cette liqueur est à celle de l'eau comme 9 est à 10.

C'est sur ce principe qu'est fondée la manière de graduer un aréomètre qui soit propre à faire connoître, par la simple immersion, & sans exiger aucun calcul, le rapport de la densité ou pesanteur spécifique des différentes liqueurs à celle de l'eau de pluie ou de l'eau distillée. C'est donc en ajoutant au poids primitif de l'aréomètre, ou en retranchant de ce poids des quantités connues, & qui soient dans un rapport convenable pour chaque degré avec ce poids primitif, & en plongeant l'aréomètre, ainsi chargé ou déchargé dans l'eau de pluie ou l'eau distillée, qu'on peut en déterminer exactement chaque degré. C'est de ces quantités convenables pour chaque degré, que j'ai formé des Tables, au moyen desquelles on pourra graduer de pareils aréomètres.

Voici la règle suivant laquelle ces Tables sont construites.

Supposons qu'on connoît exactement le poids de l'aréomètre, qui exprime la densité de l'eau :

Soit a le poids primitif de l'aréomètre, ou la densité de l'eau. Soit b le volume d'eau qu'il déplace. Soit x le volume qu'il déplaceroit de plus que le volume b , dans un fluide dont la densité seroit à celle de l'eau :: $n : a$, n étant plus petit que a .

Alors, selon les principes de l'hydrostatique, le poids absolu du volume du nouveau fluide déplacé, est égal au poids absolu de l'aréomètre, c'est-à-dire, au poids du volume d'eau qu'il déplace.

Or le volume déplacé dans le fluide dont la densité est n , est $b + x$ par la supposition; donc, puisque la densité est n , son poids absolu est $(b + x) \times n$.

Par la même raison, le poids absolu de l'aréomètre, ou du volume d'eau qu'il déplace, est $b \times a$; il faut donc que $(b + x) \times n = b \times a$, ou que $bn + nx = ba$, d'où l'on tire $x = \frac{ba - bn}{n}$, que l'on peut changer en $x = b \times \frac{a - n}{n}$.

Cette règle fait voir qu'alors la quantité dont l'aréomètre doit plonger de plus, est une portion du volume qu'il déplace dans l'eau, exprimée par une fraction qui a pour numérateur la différence des densités de l'eau & du fluide dont il s'agit, & pour dénominateur la densité de ce dernier.

Nous avons supposé n plus petit que a , & par conséquent qu'alors l'aréomètre plongeroit plus que dans l'eau. Si n étoit plus grand que a , il est évident, à l'inspection de la valeur $x = b \times \frac{a - n}{n}$, qu'alors la valeur de x seroit négative; ce qui doit être en effet, puisqu'alors l'aréomètre doit moins plonger que dans l'eau. Toute la différence qu'il y a, est donc qu'au lieu d'ajouter au volume déplacé dans l'eau, ou ce qui est la même chose, au poids primitif de l'aréomètre, il faut au contraire en retrancher; mais la quantité que l'on doit retrancher, se détermine toujours par la même règle.

Ainsi la quantité qu'il faut ajouter au poids primitif de l'aréomètre, ou qu'il en faut retrancher, est une fraction de ce poids, qui a pour dénominateur la densité que doit indiquer l'aréomètre, ou le degré que l'on cherche, & pour numérateur la différence de cette densité à la densité de l'eau.

En supposant donc, comme nous le faisons, que la densité de l'eau est égale à 1000, le dénominateur de cette frac-

tion est le degré que l'on cherche ; & le numérateur est ce qui manque au dénominateur pour faire 1000, ou l'excès du dénominateur sur 1000 ; & lorsque le dénominateur est moindre que 1000, qui est le cas où n est plus petit que a , la quantité exprimée par la fraction, est additive : mais lorsque le dénominateur excède 1000, qui est le cas où n est plus grand que a , cette quantité est soustractive.

On prendra donc un aréomètre ordinaire de verre AB (*fig. 1 & 2*), convenablement lesté de mercure en B , & à la tige duquel on donnera une longueur suffisante pour le nombre de degrés qu'on veut lui faire porter. On passera dans sa tige le petit rouleau de papier qui doit porter sa graduation, ensuite on pèsera l'instrument avec des balances bien exactes, & on tiendra note de ce poids qui est celui que j'appelle *poids primitif*; cela fait, on plongera l'aréomètre dans l'eau de pluie ou l'eau distillée; & l'endroit C de la tige où il cessera de s'enfoncer, sera marqué 1000; pour avoir les autres degrés, on ajoutera ou l'on retranchera, pour chacun, les quantités indiquées par les tables.

Il faut avoir soin de conserver l'eau dans un même degré de température, pendant tout le temps qu'on en fera usage pour graduer l'instrument; & l'on s'assurera de ce degré au moyen d'un bon thermomètre. On pourra choisir tel degré qu'on voudra; mais je crois qu'il conviendrait d'en prendre un qu'on puisse aisément se procurer en toutes les saisons. J'ai fait voir ailleurs que 14 du thermomètre de M. de Réaumur est un degré convenable pour cela.

Il suffira de chercher par l'épreuve les degrés de 10 en 10; & l'on divisera en 10 parties égales, qui formeront autant de degrés, l'intervalle qui sépare chaque dizaine. Ces degrés ne devroient pas être égaux entr'eux : ainsi cette manière de graduer l'instrument occasionnera une erreur, mais qui peut être négligée, parce qu'elle est très-petite; elle ne peut pas aller à un dix-millième. Le défaut

de régularité dans la figure de la tige, & le trait de plume qui marquera chaque degré sur l'échelle, peuvent occasionner une erreur plus grande. Si l'on veut éviter cette petite erreur, on cherchera par l'épreuve tous les degrés les uns après les autres.

Toutes les fois qu'on plonge l'aréomètre, il faut avoir soin que toute la surface soit bien nette, afin que l'eau s'y applique immédiatement. Il faut aussi l'obliger à se plonger un peu plus qu'il ne le doit, afin que, la tige étant mouillée, il se mette ensuite bien en équilibre avec l'eau; sans cette précaution, il arriveroit souvent que les petits frottemens qu'éprouve la tige, en s'enfonçant dans l'eau, le soutiendroient moins plongé qu'il ne doit l'être; de sorte que la partie plongée mesureroit un volume de liqueur moins pesant que l'instrument.

Il n'est pas possible que le même aréomètre puisse servir pour toutes les liqueurs, moins dense & plus dense que l'eau : lorsqu'on en feroit usage pour celles de ces dernières dont la densité différeroit beaucoup de celle de l'eau, il ne manqueroient pas de faire la bascule. Il vaut donc mieux faire des aréomètres dont les uns soient destinés à faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs moins denses que l'eau, & les autres à faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs plus denses que l'eau. Les premiers (*fig. 1*) seront lestés de manière qu'ils s'enfoncent dans l'eau à quelques lignes seulement au-dessus de la boule; & là sera marqué le terme 1000. Dans ceux-ci, la communication de la grosse boule à la petite dans laquelle est le mercure, sera fermée, parce que, pour les graduer, on n'a rien à retrancher de leur poids primitif; on n'a seulement qu'à y ajouter. Mais ceux qui seront destinés à faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs plus denses que l'eau (*fig. 2*), seront lestés, de manière qu'ils s'enfoncent dans l'eau jusqu'à quelques lignes de l'extrémité supérieure de leur tige, & là sera marqué le terme 1000. Dans ceux-ci, la communication de la grosse à la petite
boule

boule sera ouverte, parce que, pour les graduer, on aura besoin de retrancher de leur poids primitif.

J'ai donné à mes tables une étendue plus que suffisante; afin qu'elles puissent servir pour toutes sortes de liqueurs, depuis les plus légères jusqu'aux plus pesantes; de sorte qu'un aréomètre dont la graduation seroit aussi étendue que les tables, pourroit servir à faire connoître les pesanteurs spécifiques de toutes les liqueurs, depuis l'éther, jusqu'à l'huile de vitriol concentrée exclusivement; & afin de rendre ces tables d'un usage plus commode, j'ai réduit à leur plus simple expression toutes les fractions qui en étoient susceptibles.

Dans presque tous les aréomètres que l'on a imaginés jusqu'ici, les degrés sont des parties égales. Un peu de réflexion fait voir que cela ne doit pas être ainsi: & la nouvelle construction que je viens de donner, le prouve évidemment. Tous ces degrés vont en augmentant de grandeur d'un côté & en diminuant de l'autre, à mesure qu'ils s'éloignent de 1000; c'est-à-dire, que ces degrés ont d'autant plus d'étendue, qu'ils indiquent les pesanteurs spécifiques de liqueurs moins denses, & qu'ils ont au contraire d'autant moins d'étendue, qu'ils indiquent les pesanteurs spécifiques de liqueurs plus denses; de sorte que les degrés voisins de celui qui indique la pesanteur spécifique de l'éther, sont environ cinq fois aussi étendus que le sont les degrés voisins de celui qui indique la pesanteur spécifique de l'huile de vitriol concentrée.

Pour rendre la graduation de ces aréomètres la plus exacte qu'il est possible, je ne connois point de moyen plus efficace, & en même temps plus commode que celui dont s'est servi M. de Montigny pour graduer les aréomètres qu'il a destinés à éprouver les eaux de vie. Le voici en peu de mots.

Sur le bord d'un vase *VV* (*fig. 3*) de verre ou de métal, dont la profondeur sera un peu plus grande que la longueur totale de l'aréomètre *AB*, on fixera vertica-

lement une tige quarrée d'ivoire, DG , dont la longueur excédera au moins d'un pouce celle de la tige de l'aréomètre, & sur laquelle glissera un curseur de cuivre perpendiculaire à la tige quarrée, & bien dressé dans la partie inférieure.

On remplira ce vase d'eau de pluie ou d'eau distillée, & l'on aura soin de l'entretenir toujours également plein ; on y plongera l'aréomètre (supposons que c'en soit un destiné uniquement pour les liqueurs moins denses que l'eau), il ne s'y enfoncera qu'à quelques lignes au-dessus de la boule, comme en C . Le curseur EF étant en g , & touchant immédiatement l'extrémité supérieure A de la tige, on tirera un petit trait de crayon g , que l'on marquera 1000. Ensuite on ajoutera au poids primitif de l'aréomètre, une quantité de mercure qui égale $\frac{1}{99}$ de ce poids. L'aréomètre s'enfoncera encore d'une petite quantité, par exemple jusqu'en H ; on fera descendre d'autant le curseur EF , de façon qu'il touche encore immédiatement l'extrémité supérieure A de la tige. Le curseur étant fixé en h , on tirera encore un trait de crayon h , que l'on marquera 990. Après avoir ôté le mercure qu'on avoit ajouté, on ajoutera de nouveau au poids primitif de l'aréomètre une quantité de mercure qui égale $\frac{1}{49}$ de ce poids. L'aréomètre s'enfoncera d'une quantité un peu plus grande que la précédente fois, par exemple, jusqu'en I . Après avoir fait descendre d'autant le curseur EF , comme ci-dessus, on tirera un troisième trait de crayon i , qu'on marquera 980, & ainsi de suite, en continuant d'ajouter, pour chaque dixaine, la quantité de poids indiquée par la table.

L'opération finie, la graduation de l'aréomètre se trouvera sur la tige quarrée, d'ivoire, DG ; il faudra la transporter sur le petit rouleau de papier qu'on aura mis dans la tige de l'instrument ; ce que l'on fera aisément au moyen d'un compas. Mais il faudra avoir soin de la placer sur le rouleau de papier dans le sens opposé à celui dans lequel elle se trouve sur la tige quarrée ; c'est-à-dire, que le terme 1000, au lieu d'être en haut, sera en bas en C ;

& les autres termes en montant, comme on le voit en *C, D, E, F*, (*Fig. 1.*). Ensuite en enfonçant plus ou moins le rouleau de papier dans la tige de l'aréomètre, on fera répondre exactement le terme 1000 à l'endroit *C* de la tige qui se trouvera à la surface de l'eau, l'aréomètre n'étant chargé que de son poids primitif.

Supposons maintenant qu'on ait à graduer un aréomètre destiné à peser les liqueurs plus denses que l'eau; il sera lesté de manière qu'il s'enfonce dans l'eau jusqu'à quelques lignes de l'extrémité supérieure *A* de sa tige. On fera donc glisser le curseur *E F* en en bas, jusqu'à ce qu'il vienne toucher immédiatement l'extrémité de la tige de l'aréomètre; & là on tirera un trait de crayon, que l'on marquera 1000, comme nous l'avons dit ci-dessus. Ensuite en retranchant successivement du poids primitif de l'aréomètre $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{51}$, $\frac{3}{103}$, &c. on marquera en montant sur la tige quarrée *G D*, les termes 1010, 1020, 1030, &c.

Lorsque la graduation sera achevée, on la transportera de la tige quarrée sur le rouleau de papier, en observant de l'y placer, comme nous l'avons dit pour l'autre aréomètre, dans le sens opposé à celui dans lequel elle se trouve sur la tige quarrée, comme on le voit en *C, H, I, K*, (*fig. 2.*).

Il est nécessaire que le pied du curseur n'embrasse la tige quarrée d'ivoire que sur trois côtés, ayant seulement deux petits rebords, qui fassent ressort sur le quatrième, afin qu'en faisant glisser le curseur le long de la tige quarrée, on n'efface pas les traits de crayon qu'on aura marqué précédemment.

Je ne dois pas finir ce Mémoire, sans avertir que l'opération de graduer ces sortes d'aréomètres, demande trop d'exactitude & de soins pour qu'on puisse en confier la construction à des ouvriers ordinaires. Ce doit être un ouvrage réservé aux physiciens qui désireront se procurer de pareils instrumens.

PREMIÈRE TABLE.

Quantités qu'il faut ajouter au poids de l'Aréomètre, ou retrancher de ce poids pour le graduer de 10 en 10 degrés.

Pour	Ajoutez		Pour	Ajoutez	
700 degrés	$\frac{300}{700}$	ou $\frac{3}{7}$	du poids de l'aréomètre.	940 degrés	$\frac{60}{940}$ ou $\frac{3}{47}$ du poids de l'aréomètre.
710.....	$\frac{290}{710}$.. $\frac{29}{71}$		950.....	$\frac{50}{950}$.. $\frac{1}{19}$
720.....	$\frac{280}{720}$.. $\frac{7}{18}$		960.....	$\frac{40}{960}$.. $\frac{1}{24}$
730.....	$\frac{270}{730}$.. $\frac{27}{73}$		970.....	$\frac{30}{970}$.. $\frac{3}{97}$
740.....	$\frac{260}{740}$.. $\frac{13}{37}$		980.....	$\frac{20}{980}$.. $\frac{1}{49}$
750.....	$\frac{250}{750}$.. $\frac{1}{3}$		990.....	$\frac{10}{990}$.. $\frac{1}{99}$
760.....	$\frac{240}{760}$.. $\frac{6}{19}$		1000.....	ôtez
770.....	$\frac{230}{770}$.. $\frac{23}{77}$		1010.....	$\frac{10}{1010}$.. $\frac{1}{101}$
780.....	$\frac{220}{780}$.. $\frac{11}{39}$		1020.....	$\frac{20}{1020}$.. $\frac{1}{51}$
790.....	$\frac{210}{790}$.. $\frac{21}{79}$		1030.....	$\frac{30}{1030}$.. $\frac{3}{103}$
800.....	$\frac{200}{800}$.. $\frac{1}{4}$		1040.....	$\frac{40}{1040}$.. $\frac{1}{26}$
810.....	$\frac{190}{810}$.. $\frac{19}{81}$		1050.....	$\frac{50}{1050}$.. $\frac{1}{21}$
820.....	$\frac{180}{820}$.. $\frac{9}{41}$		1060.....	$\frac{60}{1060}$.. $\frac{3}{53}$
830.....	$\frac{170}{830}$.. $\frac{17}{83}$		1070.....	$\frac{70}{1070}$.. $\frac{7}{107}$
840.....	$\frac{160}{840}$.. $\frac{4}{21}$		1080.....	$\frac{80}{1080}$.. $\frac{2}{27}$
850.....	$\frac{150}{850}$.. $\frac{3}{17}$		1090.....	$\frac{90}{1090}$.. $\frac{9}{109}$
860.....	$\frac{140}{860}$.. $\frac{7}{43}$		1100.....	$\frac{100}{1100}$.. $\frac{1}{11}$
870.....	$\frac{130}{870}$.. $\frac{13}{87}$		1110.....	$\frac{110}{1110}$.. $\frac{11}{111}$
880.....	$\frac{120}{880}$.. $\frac{3}{22}$		1120.....	$\frac{120}{1120}$.. $\frac{3}{28}$
890.....	$\frac{110}{890}$.. $\frac{11}{89}$		1130.....	$\frac{130}{1130}$.. $\frac{13}{113}$
900.....	$\frac{100}{900}$.. $\frac{1}{9}$		1140.....	$\frac{140}{1140}$.. $\frac{7}{57}$
910.....	$\frac{90}{910}$.. $\frac{9}{91}$		1150.....	$\frac{150}{1150}$.. $\frac{3}{23}$
920.....	$\frac{80}{920}$.. $\frac{2}{23}$		1160.....	$\frac{160}{1160}$.. $\frac{4}{29}$
930.....	$\frac{70}{930}$.. $\frac{7}{93}$		1170.....	$\frac{170}{1170}$.. $\frac{17}{117}$

Pour	Otez		
1180.....	$\frac{180}{1180}$	ou $\frac{9}{59}$	du poids de
1190.....	$\frac{190}{1190}$.. $\frac{19}{119}$	l'arcomètre.
1200.....	$\frac{200}{1200}$.. $\frac{1}{6}$	
1210.....	$\frac{210}{1210}$.. $\frac{21}{121}$	
1220.....	$\frac{220}{1220}$.. $\frac{11}{61}$	
1230.....	$\frac{230}{1230}$.. $\frac{23}{123}$	
1240.....	$\frac{240}{1240}$.. $\frac{6}{31}$	
1250.....	$\frac{250}{1250}$.. $\frac{1}{5}$	
1260.....	$\frac{260}{1260}$.. $\frac{13}{63}$	
1270.....	$\frac{270}{1270}$.. $\frac{27}{127}$	
1280.....	$\frac{280}{1280}$.. $\frac{7}{32}$	
1290.....	$\frac{290}{1290}$.. $\frac{29}{129}$	
1300.....	$\frac{300}{1300}$.. $\frac{3}{31}$	
1310.....	$\frac{310}{1310}$.. $\frac{31}{131}$	
1320.....	$\frac{320}{1320}$.. $\frac{8}{33}$	
1330.....	$\frac{330}{1330}$.. $\frac{33}{133}$	
1340.....	$\frac{340}{1340}$.. $\frac{17}{67}$	
1350.....	$\frac{350}{1350}$.. $\frac{7}{27}$	
1360.....	$\frac{360}{1360}$.. $\frac{9}{34}$	
1370.....	$\frac{370}{1370}$.. $\frac{37}{137}$	
1380.....	$\frac{380}{1380}$.. $\frac{19}{69}$	
1390.....	$\frac{390}{1390}$.. $\frac{39}{139}$	
1400.....	$\frac{400}{1400}$.. $\frac{2}{7}$	
1410.....	$\frac{410}{1410}$.. $\frac{41}{141}$	
1420.....	$\frac{420}{1420}$.. $\frac{21}{71}$	
1430.....	$\frac{430}{1430}$.. $\frac{43}{143}$	
1440.....	$\frac{440}{1440}$.. $\frac{11}{36}$	
1450.....	$\frac{450}{1450}$.. $\frac{9}{20}$	
1460.....	$\frac{460}{1460}$.. $\frac{23}{73}$	

Pour	Otez		
1470 degrés	$\frac{470}{1470}$	ou $\frac{47}{147}$	du poids de
1480.....	$\frac{480}{1480}$.. $\frac{12}{37}$	l'arcomètre.
1490.....	$\frac{490}{1490}$.. $\frac{49}{149}$	
1500.....	$\frac{500}{1500}$.. $\frac{1}{3}$	
1510.....	$\frac{510}{1510}$.. $\frac{51}{151}$	
1520.....	$\frac{520}{1520}$.. $\frac{13}{38}$	
1530.....	$\frac{530}{1530}$.. $\frac{53}{153}$	
1540.....	$\frac{540}{1540}$.. $\frac{27}{77}$	
1550.....	$\frac{550}{1550}$.. $\frac{11}{91}$	
1560.....	$\frac{560}{1560}$.. $\frac{14}{99}$	
1570.....	$\frac{570}{1570}$.. $\frac{17}{157}$	
1580.....	$\frac{580}{1580}$.. $\frac{29}{79}$	
1590.....	$\frac{590}{1590}$.. $\frac{59}{159}$	
1600.....	$\frac{600}{1600}$.. $\frac{1}{4}$	
1610.....	$\frac{610}{1610}$.. $\frac{61}{161}$	
1620.....	$\frac{620}{1620}$.. $\frac{31}{81}$	
1630.....	$\frac{630}{1630}$.. $\frac{63}{163}$	
1640.....	$\frac{640}{1640}$.. $\frac{16}{41}$	
1650.....	$\frac{650}{1650}$.. $\frac{13}{33}$	
1660.....	$\frac{660}{1660}$.. $\frac{33}{83}$	
1670.....	$\frac{670}{1670}$.. $\frac{67}{167}$	
1680.....	$\frac{680}{1680}$.. $\frac{17}{42}$	
1690.....	$\frac{690}{1690}$.. $\frac{69}{169}$	
1700.....	$\frac{700}{1700}$.. $\frac{7}{27}$	
1710.....	$\frac{710}{1710}$.. $\frac{71}{171}$	
1720.....	$\frac{720}{1720}$.. $\frac{18}{43}$	
1730.....	$\frac{730}{1730}$.. $\frac{73}{173}$	
1740.....	$\frac{740}{1740}$.. $\frac{37}{87}$	
1750.....	$\frac{750}{1750}$.. $\frac{3}{7}$	

S E C O N D E T A B L E.

Quantités qu'il faut ajouter au poids de l'Aréomètre , ou retrancher de ce poids pour le graduer de degré en degré.

Pour	Ajoutez		Pour	Ajoutez	
700 degrés	$\frac{100}{700}$	ou $\frac{1}{7}$	724 degrés	$\frac{276}{724}$	ou $\frac{69}{181}$
		du poids de l'aréomètre.			du poids de l'aréomètre.
701.....	$\frac{299}{701}$		725.....	$\frac{275}{725}$.. $\frac{11}{39}$
702.....	$\frac{298}{702}$.. $\frac{149}{311}$	726.....	$\frac{274}{726}$.. $\frac{137}{363}$
703.....	$\frac{297}{703}$		727.....	$\frac{273}{727}$	
704.....	$\frac{296}{704}$.. $\frac{97}{88}$	728.....	$\frac{72}{728}$.. $\frac{34}{91}$
705.....	$\frac{295}{705}$.. $\frac{19}{141}$	729.....	$\frac{271}{729}$	
706.....	$\frac{294}{706}$.. $\frac{147}{313}$	730.....	$\frac{270}{730}$.. $\frac{27}{73}$
707.....	$\frac{293}{707}$		731.....	$\frac{269}{731}$	
708.....	$\frac{292}{708}$.. $\frac{71}{177}$	732.....	$\frac{268}{732}$.. $\frac{67}{183}$
709.....	$\frac{291}{709}$		733.....	$\frac{267}{733}$	
710.....	$\frac{290}{710}$.. $\frac{29}{71}$	734.....	$\frac{266}{734}$.. $\frac{133}{367}$
711.....	$\frac{289}{711}$		735.....	$\frac{265}{735}$.. $\frac{53}{147}$
712.....	$\frac{288}{712}$.. $\frac{16}{89}$	736.....	$\frac{264}{736}$.. $\frac{31}{92}$
713.....	$\frac{287}{713}$		737.....	$\frac{263}{737}$	
714.....	$\frac{286}{714}$.. $\frac{143}{357}$	738.....	$\frac{262}{738}$.. $\frac{131}{369}$
715.....	$\frac{285}{715}$.. $\frac{57}{143}$	739.....	$\frac{261}{739}$	
716.....	$\frac{284}{716}$.. $\frac{71}{179}$	740.....	$\frac{260}{740}$.. $\frac{13}{37}$
717.....	$\frac{283}{717}$		741.....	$\frac{259}{741}$	
718.....	$\frac{282}{718}$.. $\frac{141}{359}$	742.....	$\frac{258}{742}$.. $\frac{129}{371}$
719.....	$\frac{281}{719}$		743.....	$\frac{257}{743}$	
720.....	$\frac{280}{720}$.. $\frac{7}{18}$	744.....	$\frac{256}{744}$.. $\frac{32}{93}$
721.....	$\frac{279}{721}$		745.....	$\frac{255}{745}$.. $\frac{51}{149}$
722.....	$\frac{278}{722}$.. $\frac{139}{361}$	746.....	$\frac{254}{746}$.. $\frac{127}{173}$
723.....	$\frac{277}{723}$		747.....	$\frac{253}{747}$	

Pour	Ajoutez		du poids de l'aréomètre.
748 degrés	$\frac{252}{748}$	ou	$\frac{63}{187}$
749.....	$\frac{251}{749}$		
750.....	$\frac{250}{750}$..	$\frac{1}{3}$
751.....	$\frac{249}{751}$		
752.....	$\frac{248}{752}$..	$\frac{31}{94}$
753.....	$\frac{247}{753}$		
754.....	$\frac{246}{754}$..	$\frac{123}{377}$
755.....	$\frac{245}{755}$..	$\frac{49}{101}$
756.....	$\frac{244}{756}$..	$\frac{61}{189}$
757.....	$\frac{243}{757}$		
758.....	$\frac{242}{758}$..	$\frac{131}{379}$
759.....	$\frac{241}{759}$		
760.....	$\frac{240}{760}$..	$\frac{6}{19}$
761.....	$\frac{239}{761}$		
762.....	$\frac{238}{762}$..	$\frac{110}{381}$
763.....	$\frac{237}{763}$		
764.....	$\frac{236}{764}$..	$\frac{10}{191}$
765.....	$\frac{235}{765}$..	$\frac{47}{113}$
766.....	$\frac{234}{766}$..	$\frac{117}{383}$
767.....	$\frac{233}{767}$		
768.....	$\frac{232}{768}$..	$\frac{29}{96}$
769.....	$\frac{231}{769}$		
770.....	$\frac{230}{770}$..	$\frac{23}{77}$
771.....	$\frac{229}{771}$		
772.....	$\frac{228}{772}$..	$\frac{17}{193}$
773.....	$\frac{227}{773}$		
774.....	$\frac{226}{774}$..	$\frac{113}{387}$
775.....	$\frac{225}{775}$..	$\frac{45}{115}$
776.....	$\frac{224}{776}$..	$\frac{28}{97}$

Pour	Ajoutez		du poids de l'aréomètre.
777 degrés	$\frac{223}{777}$		
778.....	$\frac{222}{778}$	ou	$\frac{111}{389}$
779.....	$\frac{221}{779}$		
780.....	$\frac{220}{780}$..	$\frac{11}{39}$
781.....	$\frac{219}{781}$		
782.....	$\frac{218}{782}$..	$\frac{109}{391}$
783.....	$\frac{217}{783}$		
784.....	$\frac{216}{784}$..	$\frac{27}{98}$
785.....	$\frac{215}{785}$..	$\frac{43}{117}$
786.....	$\frac{214}{786}$..	$\frac{107}{393}$
787.....	$\frac{213}{787}$		
788.....	$\frac{212}{788}$..	$\frac{53}{197}$
789.....	$\frac{211}{789}$		
790.....	$\frac{210}{790}$..	$\frac{21}{79}$
791.....	$\frac{209}{791}$		
792.....	$\frac{208}{792}$..	$\frac{26}{99}$
793.....	$\frac{207}{793}$		
794.....	$\frac{206}{794}$..	$\frac{101}{397}$
795.....	$\frac{205}{795}$..	$\frac{41}{119}$
796.....	$\frac{204}{796}$..	$\frac{11}{199}$
797.....	$\frac{203}{797}$		
798.....	$\frac{202}{798}$..	$\frac{101}{399}$
799.....	$\frac{201}{799}$		
800.....	$\frac{200}{800}$..	$\frac{4}{4}$
801.....	$\frac{199}{801}$		
802.....	$\frac{198}{802}$..	$\frac{99}{401}$
803.....	$\frac{197}{803}$		
804.....	$\frac{196}{804}$..	$\frac{49}{201}$
805.....	$\frac{195}{805}$..	$\frac{39}{161}$

Pour	Ajoutez	
806 degrés	$\frac{194}{806}$ ou $\frac{97}{403}$	du poids. de l'aréomètre.
807.....	$\frac{193}{807}$	
808.....	$\frac{192}{808}$.. $\frac{24}{101}$	
809.....	$\frac{191}{809}$	
810.....	$\frac{190}{810}$.. $\frac{19}{81}$	
811.....	$\frac{189}{811}$	
812.....	$\frac{188}{812}$.. $\frac{47}{303}$	
813.....	$\frac{187}{813}$	
814.....	$\frac{186}{814}$.. $\frac{93}{407}$	
815.....	$\frac{185}{815}$.. $\frac{37}{103}$	
816.....	$\frac{184}{816}$.. $\frac{23}{102}$	
817.....	$\frac{183}{817}$	
818.....	$\frac{182}{818}$.. $\frac{91}{409}$	
819.....	$\frac{181}{819}$	
820.....	$\frac{180}{820}$.. $\frac{9}{41}$	
821.....	$\frac{179}{821}$	
822.....	$\frac{178}{822}$.. $\frac{89}{411}$	
823.....	$\frac{177}{823}$	
824.....	$\frac{176}{824}$.. $\frac{22}{103}$	
825.....	$\frac{175}{825}$.. $\frac{7}{33}$	
826.....	$\frac{174}{826}$.. $\frac{87}{413}$	
827.....	$\frac{173}{827}$	
828.....	$\frac{172}{828}$.. $\frac{21}{207}$	
829.....	$\frac{171}{829}$	
830.....	$\frac{170}{830}$.. $\frac{17}{83}$	
831.....	$\frac{169}{831}$	
832.....	$\frac{168}{832}$.. $\frac{21}{109}$	
833.....	$\frac{167}{833}$	
834.....	$\frac{166}{834}$.. $\frac{81}{417}$	

Pour	Ajoutez	
835.....	$\frac{165}{835}$ ou $\frac{33}{167}$	du poids de l'aréomètre.
836.....	$\frac{164}{836}$.. $\frac{41}{209}$	
837.....	$\frac{163}{837}$	
838.....	$\frac{162}{838}$.. $\frac{81}{419}$	
839.....	$\frac{161}{839}$	
840.....	$\frac{160}{840}$.. $\frac{4}{21}$	
841.....	$\frac{159}{841}$	
842.....	$\frac{158}{842}$.. $\frac{79}{421}$	
843.....	$\frac{157}{843}$	
844.....	$\frac{156}{844}$.. $\frac{39}{214}$	
845.....	$\frac{155}{845}$.. $\frac{31}{169}$	
846.....	$\frac{154}{846}$.. $\frac{77}{423}$	
847.....	$\frac{153}{847}$	
848.....	$\frac{152}{848}$.. $\frac{19}{106}$	
849.....	$\frac{151}{849}$	
850.....	$\frac{150}{850}$.. $\frac{3}{77}$	
851.....	$\frac{149}{851}$	
852.....	$\frac{148}{852}$.. $\frac{37}{213}$	
853.....	$\frac{147}{853}$	
854.....	$\frac{146}{854}$.. $\frac{71}{427}$	
855.....	$\frac{145}{855}$.. $\frac{29}{171}$	
856.....	$\frac{144}{856}$.. $\frac{18}{107}$	
857.....	$\frac{143}{857}$	
858.....	$\frac{142}{858}$.. $\frac{71}{429}$	
859.....	$\frac{141}{859}$	
860.....	$\frac{140}{860}$.. $\frac{7}{43}$	
861.....	$\frac{139}{861}$	
862.....	$\frac{138}{862}$.. $\frac{69}{431}$	
863.....	$\frac{137}{863}$	

Pour	Ajoutez		du poids de l'aréomètre.
864 degrés	$\frac{136}{864}$	ou	$\frac{17}{108}$
865.....	$\frac{135}{865}$..	$\frac{27}{173}$
866.....	$\frac{134}{866}$..	$\frac{67}{431}$
867.....	$\frac{133}{867}$		
868.....	$\frac{132}{868}$..	$\frac{33}{217}$
869.....	$\frac{131}{869}$		
870.....	$\frac{130}{870}$..	$\frac{13}{87}$
871.....	$\frac{129}{871}$		
872.....	$\frac{128}{872}$..	$\frac{16}{107}$
873.....	$\frac{127}{873}$		
874.....	$\frac{126}{874}$..	$\frac{61}{437}$
875.....	$\frac{125}{875}$..	$\frac{1}{7}$
876.....	$\frac{124}{876}$..	$\frac{31}{219}$
877.....	$\frac{123}{877}$		
878.....	$\frac{122}{878}$..	$\frac{61}{439}$
879.....	$\frac{121}{879}$		
880.....	$\frac{120}{880}$..	$\frac{3}{22}$
881.....	$\frac{119}{881}$		
882.....	$\frac{118}{882}$..	$\frac{59}{441}$
883.....	$\frac{117}{883}$		
884.....	$\frac{116}{884}$..	$\frac{29}{221}$
885.....	$\frac{115}{885}$..	$\frac{23}{177}$
886.....	$\frac{114}{886}$..	$\frac{57}{443}$
887.....	$\frac{113}{887}$		
888.....	$\frac{112}{888}$..	$\frac{14}{111}$
889.....	$\frac{111}{889}$		
890.....	$\frac{110}{890}$..	$\frac{11}{89}$
891.....	$\frac{109}{891}$		
892.....	$\frac{108}{892}$..	$\frac{27}{223}$

Pour	Ajoutez		du poids de l'aréomètre.
893 degrés	$\frac{107}{893}$		
894.....	$\frac{106}{894}$	ou	$\frac{53}{447}$
895.....	$\frac{105}{895}$..	$\frac{21}{179}$
896.....	$\frac{104}{896}$..	$\frac{13}{112}$
897.....	$\frac{103}{897}$		
898.....	$\frac{102}{898}$..	$\frac{51}{449}$
899.....	$\frac{101}{899}$		
900.....	$\frac{100}{900}$..	$\frac{1}{9}$
901.....	$\frac{99}{901}$		
902.....	$\frac{98}{902}$..	$\frac{49}{451}$
903.....	$\frac{97}{903}$		
904.....	$\frac{96}{904}$..	$\frac{12}{113}$
905.....	$\frac{95}{905}$..	$\frac{19}{181}$
906.....	$\frac{94}{906}$..	$\frac{47}{453}$
907.....	$\frac{93}{907}$		
908.....	$\frac{92}{908}$..	$\frac{23}{227}$
909.....	$\frac{91}{909}$		
910.....	$\frac{90}{910}$..	$\frac{9}{91}$
911.....	$\frac{89}{911}$		
912.....	$\frac{88}{912}$..	$\frac{11}{114}$
913.....	$\frac{87}{913}$		
914.....	$\frac{86}{914}$..	$\frac{43}{457}$
915.....	$\frac{85}{915}$..	$\frac{17}{183}$
916.....	$\frac{84}{916}$..	$\frac{21}{229}$
917.....	$\frac{83}{917}$		
918.....	$\frac{82}{918}$..	$\frac{41}{459}$
919.....	$\frac{81}{919}$		
920.....	$\frac{80}{920}$..	$\frac{2}{23}$
921.....	$\frac{79}{921}$		

Pour	Ajoutez		du poids de l'aréomètre.
922 degrés	$\frac{73}{922}$	ou	$\frac{19}{261}$
923.....	$\frac{74}{923}$		
924.....	$\frac{75}{924}$..	$\frac{19}{234}$
925.....	$\frac{76}{925}$..	$\frac{3}{37}$
926.....	$\frac{77}{926}$..	$\frac{37}{461}$
927.....	$\frac{78}{927}$		
928.....	$\frac{79}{928}$..	$\frac{9}{116}$
929.....	$\frac{80}{929}$		
930.....	$\frac{81}{930}$..	$\frac{7}{93}$
931.....	$\frac{82}{931}$		
932.....	$\frac{83}{932}$..	$\frac{17}{233}$
933.....	$\frac{84}{933}$		
934.....	$\frac{85}{934}$..	$\frac{23}{467}$
935.....	$\frac{86}{935}$..	$\frac{13}{187}$
936.....	$\frac{87}{936}$..	$\frac{8}{117}$
937.....	$\frac{88}{937}$		
938.....	$\frac{89}{938}$..	$\frac{31}{469}$
939.....	$\frac{90}{939}$		
940.....	$\frac{91}{940}$..	$\frac{3}{47}$
941.....	$\frac{92}{941}$		
942.....	$\frac{93}{942}$..	$\frac{29}{472}$
943.....	$\frac{94}{943}$		
944.....	$\frac{95}{944}$..	$\frac{7}{113}$
945.....	$\frac{96}{945}$..	$\frac{11}{189}$
946.....	$\frac{97}{946}$..	$\frac{27}{473}$
947.....	$\frac{98}{947}$		
948.....	$\frac{99}{948}$..	$\frac{13}{237}$
949.....	$\frac{100}{949}$		
950.....	$\frac{101}{950}$..	$\frac{1}{19}$

Pour	Ajoutez		du poids de l'aréomètre.
951 degrés	$\frac{49}{951}$		
952.....	$\frac{48}{952}$	ou	$\frac{6}{119}$
953.....	$\frac{47}{953}$		
954.....	$\frac{46}{954}$..	$\frac{23}{477}$
955.....	$\frac{45}{955}$..	$\frac{9}{191}$
956.....	$\frac{44}{956}$..	$\frac{11}{239}$
957.....	$\frac{43}{957}$		
958.....	$\frac{42}{958}$..	$\frac{21}{479}$
959.....	$\frac{41}{959}$		
960.....	$\frac{40}{960}$..	$\frac{1}{24}$
961.....	$\frac{39}{961}$		
962.....	$\frac{38}{962}$..	$\frac{19}{481}$
963.....	$\frac{37}{963}$		
964.....	$\frac{36}{964}$..	$\frac{9}{241}$
965.....	$\frac{35}{965}$..	$\frac{7}{193}$
966.....	$\frac{34}{966}$..	$\frac{17}{483}$
967.....	$\frac{33}{967}$		
968.....	$\frac{32}{968}$..	$\frac{4}{121}$
969.....	$\frac{31}{969}$		
970.....	$\frac{30}{970}$..	$\frac{3}{97}$
971.....	$\frac{29}{971}$		
972.....	$\frac{28}{972}$..	$\frac{7}{243}$
973.....	$\frac{27}{973}$		
974.....	$\frac{26}{974}$..	$\frac{13}{487}$
975.....	$\frac{25}{975}$..	$\frac{1}{39}$
976.....	$\frac{24}{976}$..	$\frac{3}{122}$
977.....	$\frac{23}{977}$		
978.....	$\frac{22}{978}$..	$\frac{11}{489}$
979.....	$\frac{21}{979}$		

Pour	Ajoutez	
980 degrés	$\frac{20}{980}$ ou $\frac{1}{49}$	du poids de l'aréomètre.
981.....	$\frac{19}{981}$	
982.....	$\frac{18}{982}$.. $\frac{9}{491}$	
983.....	$\frac{17}{983}$	
984.....	$\frac{16}{984}$.. $\frac{2}{123}$	
985.....	$\frac{15}{985}$.. $\frac{3}{197}$	
986.....	$\frac{14}{986}$.. $\frac{7}{493}$	
987.....	$\frac{13}{987}$	
988.....	$\frac{12}{988}$.. $\frac{3}{247}$	
989.....	$\frac{11}{989}$	
990.....	$\frac{10}{990}$.. $\frac{1}{99}$	
991.....	$\frac{9}{991}$	
992.....	$\frac{8}{992}$.. $\frac{1}{124}$	
993.....	$\frac{7}{993}$	
994.....	$\frac{6}{994}$.. $\frac{3}{497}$	
995.....	$\frac{5}{995}$.. $\frac{1}{199}$	
996.....	$\frac{4}{996}$.. $\frac{1}{249}$	
997.....	$\frac{3}{997}$	
998.....	$\frac{2}{998}$.. $\frac{1}{499}$	
999.....	$\frac{1}{999}$	
1000.....	ôtez	
1001.....	$\frac{1}{1001}$	
1002.....	$\frac{2}{1002}$ ou $\frac{1}{501}$	
1003.....	$\frac{3}{1003}$	
1004.....	$\frac{4}{1004}$.. $\frac{1}{251}$	
1005.....	$\frac{5}{1005}$.. $\frac{1}{201}$	
1006.....	$\frac{6}{1006}$.. $\frac{3}{503}$	
1007.....	$\frac{7}{1007}$	
1008.....	$\frac{8}{1008}$.. $\frac{1}{126}$	

Pour	Otez	
1009 degrés	$\frac{9}{1009}$	du poids de l'aréomètre.
1010.....	$\frac{10}{1010}$ ou $\frac{1}{101}$	
1011.....	$\frac{11}{1011}$	
1012.....	$\frac{12}{1012}$.. $\frac{3}{253}$	
1013.....	$\frac{13}{1013}$	
1014.....	$\frac{14}{1014}$.. $\frac{7}{257}$	
1015.....	$\frac{15}{1015}$.. $\frac{3}{203}$	
1016.....	$\frac{16}{1016}$.. $\frac{2}{127}$	
1017.....	$\frac{17}{1017}$	
1018.....	$\frac{18}{1018}$.. $\frac{9}{509}$	
1019.....	$\frac{19}{1019}$	
1020.....	$\frac{20}{1020}$.. $\frac{1}{51}$	
1021.....	$\frac{21}{1021}$	
1022.....	$\frac{22}{1022}$.. $\frac{11}{511}$	
1023.....	$\frac{23}{1023}$	
1024.....	$\frac{24}{1024}$.. $\frac{3}{128}$	
1025.....	$\frac{25}{1025}$.. $\frac{1}{41}$	
1026.....	$\frac{26}{1026}$.. $\frac{13}{513}$	
1027.....	$\frac{27}{1027}$	
1028.....	$\frac{28}{1028}$.. $\frac{7}{257}$	
1029.....	$\frac{29}{1029}$	
1030.....	$\frac{30}{1030}$.. $\frac{3}{103}$	
1031.....	$\frac{31}{1031}$	
1032.....	$\frac{32}{1032}$.. $\frac{4}{259}$	
1033.....	$\frac{33}{1033}$	
1034.....	$\frac{34}{1034}$.. $\frac{17}{517}$	
1035.....	$\frac{35}{1035}$.. $\frac{7}{207}$	
1036.....	$\frac{36}{1036}$.. $\frac{9}{259}$	
1037.....	$\frac{37}{1037}$	

Pour	Otez		
1038 degrés	$\frac{18}{1013}$	ou $\frac{19}{119}$	du poids de l'aréomètre.
1039.....	$\frac{32}{1019}$		
1040.....	$\frac{40}{1020}$.. $\frac{1}{20}$	
1041.....	$\frac{41}{1021}$		
1042.....	$\frac{42}{1022}$.. $\frac{21}{121}$	
1043.....	$\frac{43}{1023}$		
1044.....	$\frac{44}{1024}$.. $\frac{11}{261}$	
1045.....	$\frac{45}{1025}$.. $\frac{9}{209}$	
1046.....	$\frac{46}{1026}$.. $\frac{23}{523}$	
1047.....	$\frac{47}{1027}$		
1048.....	$\frac{48}{1028}$.. $\frac{6}{131}$	
1049.....	$\frac{49}{1029}$		
1050.....	$\frac{50}{1030}$.. $\frac{1}{21}$	
1051.....	$\frac{51}{1031}$		
1052.....	$\frac{52}{1032}$.. $\frac{11}{263}$	
1053.....	$\frac{53}{1033}$		
1054.....	$\frac{54}{1034}$.. $\frac{27}{527}$	
1055.....	$\frac{55}{1035}$.. $\frac{11}{211}$	
1056.....	$\frac{56}{1036}$.. $\frac{7}{232}$	
1057.....	$\frac{57}{1037}$		
1058.....	$\frac{58}{1038}$.. $\frac{20}{529}$	
1059.....	$\frac{59}{1039}$		
1060.....	$\frac{60}{1060}$.. $\frac{3}{53}$	
1061.....	$\frac{61}{1061}$		
1062.....	$\frac{62}{1062}$.. $\frac{31}{531}$	
1063.....	$\frac{63}{1063}$		
1064.....	$\frac{64}{1064}$.. $\frac{8}{133}$	
1065.....	$\frac{65}{1065}$.. $\frac{13}{213}$	
1066.....	$\frac{66}{1066}$.. $\frac{33}{533}$	

Pour	Otez		
1067 degrés	$\frac{67}{1067}$		du poids de l'aréomètre.
1068.....	$\frac{68}{1068}$	ou $\frac{17}{267}$	
1069.....	$\frac{69}{1069}$		
1070.....	$\frac{70}{1070}$.. $\frac{7}{137}$	
1071.....	$\frac{71}{1071}$		
1072.....	$\frac{72}{1072}$.. $\frac{9}{134}$	
1073.....	$\frac{73}{1073}$		
1074.....	$\frac{74}{1074}$.. $\frac{37}{537}$	
1075.....	$\frac{75}{1075}$.. $\frac{3}{41}$	
1076.....	$\frac{76}{1076}$.. $\frac{17}{269}$	
1077.....	$\frac{77}{1077}$		
1078.....	$\frac{78}{1078}$.. $\frac{30}{539}$	
1079.....	$\frac{79}{1079}$		
1080.....	$\frac{80}{1080}$.. $\frac{2}{27}$	
1081.....	$\frac{81}{1081}$		
1082.....	$\frac{82}{1082}$.. $\frac{41}{541}$	
1083.....	$\frac{83}{1083}$		
1084.....	$\frac{84}{1084}$.. $\frac{21}{271}$	
1085.....	$\frac{85}{1085}$.. $\frac{17}{217}$	
1086.....	$\frac{86}{1086}$.. $\frac{43}{543}$	
1087.....	$\frac{87}{1087}$		
1088.....	$\frac{88}{1088}$.. $\frac{11}{136}$	
1089.....	$\frac{89}{1089}$		
1090.....	$\frac{90}{1090}$.. $\frac{9}{109}$	
1091.....	$\frac{91}{1091}$		
1092.....	$\frac{92}{1092}$.. $\frac{23}{273}$	
1093.....	$\frac{93}{1093}$		
1094.....	$\frac{94}{1094}$.. $\frac{47}{547}$	
1095.....	$\frac{95}{1095}$.. $\frac{19}{219}$	

Pour	Otez	
1096 degrés	$\frac{96}{1096}$	ou $\frac{12}{137}$ du poids de l'aréomètre.
1097.....	$\frac{97}{1097}$	
1098.....	$\frac{98}{1098}$.. $\frac{42}{549}$
1099.....	$\frac{99}{1099}$	
1100.....	$\frac{100}{1100}$.. $\frac{1}{11}$
1101.....	$\frac{101}{1101}$	
1102.....	$\frac{102}{1102}$.. $\frac{51}{551}$
1103.....	$\frac{103}{1103}$	
1104.....	$\frac{104}{1104}$.. $\frac{11}{133}$
1105.....	$\frac{105}{1105}$.. $\frac{21}{221}$
1106.....	$\frac{106}{1106}$.. $\frac{53}{553}$
1107.....	$\frac{107}{1107}$	
1108.....	$\frac{108}{1108}$.. $\frac{27}{277}$
1109.....	$\frac{109}{1109}$	
1110.....	$\frac{110}{1110}$.. $\frac{11}{111}$
1111.....	$\frac{111}{1111}$	
1112.....	$\frac{112}{1112}$.. $\frac{14}{139}$
1113.....	$\frac{113}{1113}$	
1114.....	$\frac{114}{1114}$.. $\frac{57}{557}$
1115.....	$\frac{115}{1115}$.. $\frac{21}{231}$
1116.....	$\frac{116}{1116}$.. $\frac{29}{279}$
1117.....	$\frac{117}{1117}$	
1118.....	$\frac{118}{1118}$.. $\frac{59}{559}$
1119.....	$\frac{119}{1119}$	
1120.....	$\frac{120}{1120}$.. $\frac{3}{28}$
1121.....	$\frac{121}{1121}$	
1122.....	$\frac{122}{1122}$.. $\frac{61}{561}$
1123.....	$\frac{123}{1123}$	
1124.....	$\frac{124}{1124}$.. $\frac{31}{281}$

Pour	Otez	
1125 degrés	$\frac{125}{1125}$	ou $\frac{1}{9}$ du poids de l'aréomètre.
1126.....	$\frac{126}{1126}$.. $\frac{63}{563}$
1127.....	$\frac{127}{1127}$	
1128.....	$\frac{128}{1128}$.. $\frac{16}{141}$
1129.....	$\frac{129}{1129}$	
1130.....	$\frac{130}{1130}$.. $\frac{13}{113}$
1131.....	$\frac{131}{1131}$	
1132.....	$\frac{132}{1132}$.. $\frac{33}{283}$
1133.....	$\frac{133}{1133}$	
1134.....	$\frac{134}{1134}$.. $\frac{67}{567}$
1135.....	$\frac{135}{1135}$.. $\frac{27}{227}$
1136.....	$\frac{136}{1136}$.. $\frac{17}{142}$
1137.....	$\frac{137}{1137}$	
1138.....	$\frac{138}{1138}$.. $\frac{69}{569}$
1139.....	$\frac{139}{1139}$	
1140.....	$\frac{140}{1140}$.. $\frac{7}{57}$
1141.....	$\frac{141}{1141}$	
1142.....	$\frac{142}{1142}$.. $\frac{71}{571}$
1143.....	$\frac{143}{1143}$	
1144.....	$\frac{144}{1144}$.. $\frac{19}{143}$
1145.....	$\frac{145}{1145}$.. $\frac{29}{229}$
1146.....	$\frac{146}{1146}$.. $\frac{73}{573}$
1147.....	$\frac{147}{1147}$	
1148.....	$\frac{148}{1148}$.. $\frac{37}{287}$
1149.....	$\frac{149}{1149}$	
1150.....	$\frac{150}{1150}$.. $\frac{3}{23}$
1151.....	$\frac{151}{1151}$	
1152.....	$\frac{152}{1152}$.. $\frac{19}{144}$
1153.....	$\frac{153}{1153}$	

Pour	Otez				Pour	Otez			
1154 degrés	$\frac{154}{1154}$	ou	$\frac{77}{577}$	du poids de l'aréomètre.	1183 degrés	$\frac{183}{1183}$		du poids de l'aréomètre.	
1155.....	$\frac{155}{1155}$..	$\frac{31}{231}$		1184.....	$\frac{184}{1184}$	ou	$\frac{23}{148}$	
1156.....	$\frac{156}{1156}$..	$\frac{39}{289}$		1185.....	$\frac{185}{1185}$..	$\frac{37}{237}$	
1157.....	$\frac{157}{1157}$				1186.....	$\frac{186}{1186}$..	$\frac{91}{591}$	
1158.....	$\frac{158}{1158}$..	$\frac{79}{579}$		1187.....	$\frac{187}{1187}$			
1159.....	$\frac{159}{1159}$				1188.....	$\frac{188}{1188}$..	$\frac{47}{297}$	
1160.....	$\frac{160}{1160}$..	$\frac{4}{29}$		1189.....	$\frac{189}{1189}$			
1161.....	$\frac{161}{1161}$				1190.....	$\frac{190}{1190}$..	$\frac{19}{119}$	
1162.....	$\frac{162}{1162}$..	$\frac{81}{581}$		1191.....	$\frac{191}{1191}$			
1163.....	$\frac{163}{1163}$				1192.....	$\frac{192}{1192}$..	$\frac{24}{149}$	
1164.....	$\frac{164}{1164}$..	$\frac{41}{291}$		1193.....	$\frac{193}{1193}$			
1165.....	$\frac{165}{1165}$..	$\frac{33}{233}$		1194.....	$\frac{194}{1194}$..	$\frac{97}{597}$	
1166.....	$\frac{166}{1166}$..	$\frac{83}{583}$		1195.....	$\frac{195}{1195}$..	$\frac{39}{239}$	
1167.....	$\frac{167}{1167}$				1196.....	$\frac{196}{1196}$..	$\frac{49}{299}$	
1168.....	$\frac{168}{1168}$..	$\frac{21}{146}$		1197.....	$\frac{197}{1197}$			
1169.....	$\frac{169}{1169}$				1198.....	$\frac{198}{1198}$..	$\frac{99}{599}$	
1170.....	$\frac{170}{1170}$..	$\frac{17}{117}$		1199.....	$\frac{199}{1199}$			
1171.....	$\frac{171}{1171}$				1200.....	$\frac{200}{1200}$..	$\frac{1}{6}$	
1172.....	$\frac{172}{1172}$..	$\frac{43}{293}$		1201.....	$\frac{201}{1201}$			
1173.....	$\frac{173}{1173}$				1202.....	$\frac{202}{1202}$..	$\frac{101}{601}$	
1174.....	$\frac{174}{1174}$..	$\frac{87}{587}$		1203.....	$\frac{203}{1203}$			
1175.....	$\frac{175}{1175}$..	$\frac{7}{47}$		1204.....	$\frac{204}{1204}$..	$\frac{51}{301}$	
1176.....	$\frac{176}{1176}$..	$\frac{23}{147}$		1205.....	$\frac{205}{1205}$..	$\frac{41}{241}$	
1177.....	$\frac{177}{1177}$				1206.....	$\frac{206}{1206}$..	$\frac{103}{603}$	
1178.....	$\frac{178}{1178}$..	$\frac{89}{589}$		1207.....	$\frac{207}{1207}$			
1179.....	$\frac{179}{1179}$				1208.....	$\frac{208}{1208}$..	$\frac{26}{151}$	
1180.....	$\frac{180}{1180}$..	$\frac{9}{59}$		1209.....	$\frac{209}{1209}$			
1181.....	$\frac{181}{1181}$				1210.....	$\frac{210}{1210}$..	$\frac{31}{121}$	
1182.....	$\frac{182}{1182}$..	$\frac{91}{591}$		1211.....	$\frac{211}{1211}$			

Pour	Otez		
1212 degrés	$\frac{212}{1212}$	ou $\frac{51}{101}$	du poids de l'aréomètre.
1213.....	$\frac{213}{1213}$		
1214.....	$\frac{214}{1214}$.. $\frac{107}{607}$	
1215.....	$\frac{215}{1215}$.. $\frac{41}{241}$	
1216.....	$\frac{216}{1216}$.. $\frac{27}{153}$	
1217.....	$\frac{217}{1217}$		
1218.....	$\frac{218}{1218}$.. $\frac{107}{607}$	
1219.....	$\frac{219}{1219}$		
1220.....	$\frac{220}{1220}$.. $\frac{11}{61}$	
1221.....	$\frac{221}{1221}$		
1222.....	$\frac{222}{1222}$.. $\frac{111}{611}$	
1223.....	$\frac{223}{1223}$		
1224.....	$\frac{224}{1224}$.. $\frac{19}{119}$	
1225.....	$\frac{225}{1225}$.. $\frac{9}{129}$	
1226.....	$\frac{226}{1226}$.. $\frac{11}{611}$	
1227.....	$\frac{227}{1227}$		
1228.....	$\frac{228}{1228}$.. $\frac{57}{507}$	
1229.....	$\frac{229}{1229}$		
1230.....	$\frac{230}{1230}$.. $\frac{23}{123}$	
1231.....	$\frac{231}{1231}$		
1232.....	$\frac{232}{1232}$.. $\frac{29}{154}$	
1233.....	$\frac{233}{1233}$		
1234.....	$\frac{234}{1234}$.. $\frac{117}{617}$	
1235.....	$\frac{235}{1235}$.. $\frac{47}{247}$	
1236.....	$\frac{236}{1236}$.. $\frac{59}{309}$	
1237.....	$\frac{237}{1237}$		
1238.....	$\frac{238}{1238}$.. $\frac{119}{619}$	
1239.....	$\frac{239}{1239}$		
1240.....	$\frac{240}{1240}$.. $\frac{6}{31}$	

Pour	Otez		
1241 degrés	$\frac{241}{1241}$		du poids de l'aréomètre.
1242.....	$\frac{242}{1242}$	ou $\frac{121}{621}$	
1243.....	$\frac{243}{1243}$		
1244.....	$\frac{244}{1244}$.. $\frac{61}{241}$	
1245.....	$\frac{245}{1245}$.. $\frac{49}{149}$	
1246.....	$\frac{246}{1246}$.. $\frac{13}{623}$	
1247.....	$\frac{247}{1247}$		
1248.....	$\frac{248}{1248}$.. $\frac{31}{150}$	
1249.....	$\frac{249}{1249}$		
1250.....	$\frac{250}{1250}$.. $\frac{1}{5}$	
1251.....	$\frac{251}{1251}$		
1252.....	$\frac{252}{1252}$.. $\frac{63}{313}$	
1253.....	$\frac{253}{1253}$		
1254.....	$\frac{254}{1254}$.. $\frac{127}{127}$	
1255.....	$\frac{255}{1255}$.. $\frac{51}{151}$	
1256.....	$\frac{256}{1256}$.. $\frac{13}{127}$	
1257.....	$\frac{257}{1257}$		
1258.....	$\frac{258}{1258}$.. $\frac{129}{129}$	
1259.....	$\frac{259}{1259}$		
1260.....	$\frac{260}{1260}$.. $\frac{13}{61}$	
1261.....	$\frac{261}{1261}$		
1262.....	$\frac{162}{1262}$.. $\frac{131}{631}$	
1263.....	$\frac{263}{1263}$		
1264.....	$\frac{264}{1264}$.. $\frac{12}{12}$	
1265.....	$\frac{265}{1265}$.. $\frac{53}{153}$	
1266.....	$\frac{266}{1266}$.. $\frac{13}{113}$	
1267.....	$\frac{267}{1267}$		
1268.....	$\frac{268}{1268}$.. $\frac{67}{317}$	
1269.....	$\frac{269}{1269}$		

Pour	Otez		Pour	Otez	
1270 degrés	$\frac{270}{1270}$	ou $\frac{27}{127}$ du poids de l'aréomètre.	1299 degrés	$\frac{299}{1299}$	du poids de
1271.....	$\frac{271}{1271}$		1300.....	$\frac{300}{1300}$	ou $\frac{3}{13}$ l'aréomètre.
1272.....	$\frac{272}{1272}$.. $\frac{34}{159}$	1301.....	$\frac{301}{1301}$	
1273.....	$\frac{273}{1273}$		1302.....	$\frac{302}{1302}$.. $\frac{151}{611}$
1274.....	$\frac{274}{1274}$.. $\frac{137}{637}$	1303.....	$\frac{303}{1303}$	
1275.....	$\frac{275}{1275}$.. $\frac{11}{54}$	1304.....	$\frac{304}{1304}$.. $\frac{38}{163}$
1276.....	$\frac{276}{1276}$.. $\frac{69}{319}$	1305.....	$\frac{305}{1305}$.. $\frac{61}{261}$
1277.....	$\frac{277}{1277}$		1306.....	$\frac{306}{1306}$.. $\frac{113}{613}$
1278.....	$\frac{278}{1278}$.. $\frac{139}{619}$	1307.....	$\frac{307}{1307}$	
1279.....	$\frac{279}{1279}$		1308.....	$\frac{308}{1308}$.. $\frac{77}{327}$
1280.....	$\frac{280}{1280}$.. $\frac{7}{32}$	1309.....	$\frac{309}{1309}$	
1281.....	$\frac{281}{1281}$		1310.....	$\frac{310}{1310}$.. $\frac{31}{131}$
1282.....	$\frac{282}{1282}$.. $\frac{141}{641}$	1311.....	$\frac{311}{1311}$	
1283.....	$\frac{283}{1283}$		1312.....	$\frac{312}{1312}$.. $\frac{39}{162}$
1284.....	$\frac{284}{1284}$.. $\frac{71}{321}$	1313.....	$\frac{313}{1313}$	
1285.....	$\frac{285}{1285}$.. $\frac{57}{317}$	1314.....	$\frac{314}{1314}$.. $\frac{157}{617}$
1286.....	$\frac{286}{1286}$.. $\frac{143}{643}$	1315.....	$\frac{315}{1315}$.. $\frac{63}{263}$
1287.....	$\frac{287}{1287}$		1316.....	$\frac{316}{1316}$.. $\frac{79}{329}$
1288.....	$\frac{288}{1288}$.. $\frac{36}{161}$	1317.....	$\frac{317}{1317}$	
1289.....	$\frac{289}{1289}$		1318.....	$\frac{318}{1318}$.. $\frac{119}{619}$
1290.....	$\frac{290}{1290}$.. $\frac{29}{129}$	1319.....	$\frac{319}{1319}$	
1291.....	$\frac{291}{1291}$		1320.....	$\frac{320}{1320}$.. $\frac{8}{33}$
1292.....	$\frac{292}{1292}$.. $\frac{73}{323}$	1321.....	$\frac{321}{1321}$	
1293.....	$\frac{293}{1293}$		1322.....	$\frac{322}{1322}$.. $\frac{161}{661}$
1294.....	$\frac{294}{1294}$.. $\frac{147}{647}$	1323.....	$\frac{323}{1323}$	
1295.....	$\frac{295}{1295}$.. $\frac{59}{219}$	1324.....	$\frac{324}{1324}$.. $\frac{81}{331}$
1296.....	$\frac{296}{1296}$.. $\frac{37}{162}$	1325.....	$\frac{325}{1325}$.. $\frac{13}{53}$
1297.....	$\frac{297}{1297}$		1326.....	$\frac{326}{1326}$.. $\frac{163}{663}$
1298.....	$\frac{298}{1298}$.. $\frac{149}{649}$	1327.....	$\frac{327}{1327}$	

Pour	Otez	
1328 degrés	$\frac{328}{1328}$	ou $\frac{4r}{166}$ du poids de l'aréomètre.
1329.....	$\frac{329}{1329}$	
1330.....	$\frac{330}{1330}$.. $\frac{33}{133}$
1331.....	$\frac{331}{1331}$	
1332.....	$\frac{332}{1332}$.. $\frac{83}{333}$
1333.....	$\frac{333}{1333}$	
1334.....	$\frac{334}{1334}$.. $\frac{167}{667}$
1335.....	$\frac{335}{1335}$.. $\frac{67}{267}$
1336.....	$\frac{336}{1336}$.. $\frac{42}{167}$
1337.....	$\frac{337}{1337}$	
1338.....	$\frac{338}{1338}$.. $\frac{169}{669}$
1339.....	$\frac{339}{1339}$	
1340.....	$\frac{340}{1340}$.. $\frac{17}{67}$
1341.....	$\frac{341}{1341}$	
1342.....	$\frac{342}{1342}$.. $\frac{171}{671}$
1343.....	$\frac{343}{1343}$	
1344.....	$\frac{344}{1344}$.. $\frac{43}{163}$
1345.....	$\frac{345}{1345}$.. $\frac{69}{269}$
1346.....	$\frac{346}{1346}$.. $\frac{173}{673}$
1347.....	$\frac{347}{1347}$	
1348.....	$\frac{348}{1348}$.. $\frac{87}{337}$
1349.....	$\frac{349}{1349}$	
1350.....	$\frac{350}{1350}$.. $\frac{7}{27}$
1351.....	$\frac{351}{1351}$	
1352.....	$\frac{352}{1352}$.. $\frac{44}{169}$
1353.....	$\frac{353}{1353}$	
1354.....	$\frac{354}{1354}$.. $\frac{177}{677}$
1355.....	$\frac{355}{1355}$.. $\frac{71}{271}$
1356.....	$\frac{356}{1356}$.. $\frac{89}{339}$

Pour	Otez	
1357 degrés	$\frac{357}{1357}$	du poids de l'aréomètre.
1358.....	$\frac{358}{1358}$	ou $\frac{179}{679}$
1359.....	$\frac{359}{1359}$	
1360.....	$\frac{360}{1360}$.. $\frac{9}{34}$
1361.....	$\frac{361}{1361}$	
1362.....	$\frac{362}{1362}$.. $\frac{181}{681}$
1363.....	$\frac{363}{1363}$	
1364.....	$\frac{364}{1364}$.. $\frac{91}{341}$
1365.....	$\frac{365}{1365}$.. $\frac{71}{271}$
1366.....	$\frac{366}{1366}$.. $\frac{183}{683}$
1367.....	$\frac{367}{1367}$	
1368.....	$\frac{368}{1368}$.. $\frac{46}{174}$
1369.....	$\frac{369}{1369}$	
1370.....	$\frac{370}{1370}$.. $\frac{37}{127}$
1371.....	$\frac{371}{1371}$	
1372.....	$\frac{372}{1372}$.. $\frac{93}{343}$
1373.....	$\frac{373}{1373}$	
1374.....	$\frac{374}{1374}$.. $\frac{187}{687}$
1375.....	$\frac{375}{1375}$.. $\frac{3}{11}$
1376.....	$\frac{376}{1376}$.. $\frac{47}{172}$
1377.....	$\frac{377}{1377}$	
1378.....	$\frac{378}{1378}$.. $\frac{189}{689}$
1379.....	$\frac{379}{1379}$	
1380.....	$\frac{380}{1380}$.. $\frac{19}{69}$
1381.....	$\frac{381}{1381}$	
1382.....	$\frac{382}{1382}$.. $\frac{191}{691}$
1383.....	$\frac{383}{1383}$	
1384.....	$\frac{384}{1384}$.. $\frac{48}{173}$
1385.....	$\frac{385}{1385}$.. $\frac{77}{277}$

Pour	Otez	
1386 degrés	$\frac{386}{1386}$	ou $\frac{103}{693}$ du poids de l'arcomètre.
1387.....	$\frac{387}{1387}$	
1388.....	$\frac{388}{1388}$.. $\frac{97}{347}$
1389.....	$\frac{389}{1389}$	
1390.....	$\frac{390}{1390}$.. $\frac{39}{139}$
1391.....	$\frac{391}{1391}$	
1392.....	$\frac{392}{1392}$.. $\frac{49}{174}$
1393.....	$\frac{393}{1393}$	
1394.....	$\frac{394}{1394}$.. $\frac{107}{697}$
1395.....	$\frac{395}{1395}$.. $\frac{79}{279}$
1396.....	$\frac{396}{1396}$.. $\frac{99}{349}$
1397.....	$\frac{397}{1397}$	
1398.....	$\frac{398}{1398}$.. $\frac{109}{699}$
1399.....	$\frac{399}{1399}$	
1400.....	$\frac{400}{1400}$.. $\frac{2}{2}$
1401.....	$\frac{401}{1401}$	
1402.....	$\frac{402}{1402}$.. $\frac{201}{701}$
1403.....	$\frac{403}{1403}$	
1404.....	$\frac{404}{1404}$.. $\frac{101}{351}$
1405.....	$\frac{405}{1405}$.. $\frac{81}{281}$
1406.....	$\frac{406}{1406}$.. $\frac{203}{703}$
1407.....	$\frac{407}{1407}$	
1408.....	$\frac{408}{1408}$.. $\frac{51}{176}$
1409.....	$\frac{409}{1409}$	
1410.....	$\frac{410}{1410}$.. $\frac{41}{141}$
1411.....	$\frac{411}{1411}$	
1412.....	$\frac{412}{1412}$.. $\frac{103}{353}$
1413.....	$\frac{413}{1413}$	
1414.....	$\frac{414}{1414}$.. $\frac{207}{707}$

Pour	Otez	
1415 degrés	$\frac{415}{1415}$	ou $\frac{81}{281}$ du poids de l'arcomètre.
1416.....	$\frac{416}{1416}$.. $\frac{52}{177}$
1417.....	$\frac{417}{1417}$	
1418.....	$\frac{418}{1418}$.. $\frac{209}{709}$
1419.....	$\frac{419}{1419}$	
1420.....	$\frac{420}{1420}$.. $\frac{21}{71}$
1421.....	$\frac{421}{1421}$	
1422.....	$\frac{422}{1422}$.. $\frac{211}{711}$
1423.....	$\frac{423}{1423}$	
1424.....	$\frac{424}{1424}$.. $\frac{53}{178}$
1425.....	$\frac{425}{1425}$.. $\frac{17}{17}$
1426.....	$\frac{426}{1426}$.. $\frac{213}{713}$
1427.....	$\frac{427}{1427}$	
1428.....	$\frac{428}{1428}$.. $\frac{107}{317}$
1429.....	$\frac{429}{1429}$	
1430.....	$\frac{430}{1430}$.. $\frac{43}{143}$
1431.....	$\frac{431}{1431}$	
1432.....	$\frac{432}{1432}$.. $\frac{54}{179}$
1433.....	$\frac{433}{1433}$	
1434.....	$\frac{434}{1434}$.. $\frac{217}{717}$
1435.....	$\frac{435}{1435}$.. $\frac{87}{287}$
1436.....	$\frac{436}{1436}$.. $\frac{109}{359}$
1437.....	$\frac{437}{1437}$	
1438.....	$\frac{438}{1438}$.. $\frac{219}{719}$
1439.....	$\frac{439}{1439}$	
1440.....	$\frac{440}{1440}$.. $\frac{11}{36}$
1441.....	$\frac{441}{1441}$	
1442.....	$\frac{442}{1442}$.. $\frac{221}{721}$
1443.....	$\frac{443}{1443}$	

Pour	Otez		
1444 degrés	$\frac{444}{1444}$	ou $\frac{111}{361}$	du poids de l'aréomètre.
1445.....	$\frac{445}{1445}$.. $\frac{89}{289}$	
1446.....	$\frac{446}{1446}$.. $\frac{223}{723}$	
1447.....	$\frac{447}{1447}$		
1448.....	$\frac{448}{1448}$.. $\frac{56}{181}$	
1449.....	$\frac{449}{1449}$		
1450.....	$\frac{450}{1450}$.. $\frac{9}{29}$	
1451.....	$\frac{451}{1451}$		
1452.....	$\frac{452}{1452}$.. $\frac{113}{363}$	
1453.....	$\frac{453}{1453}$		
1454.....	$\frac{454}{1454}$.. $\frac{227}{727}$	
1455.....	$\frac{455}{1455}$.. $\frac{91}{291}$	
1456.....	$\frac{456}{1456}$.. $\frac{57}{182}$	
1457.....	$\frac{457}{1457}$		
1458.....	$\frac{458}{1458}$.. $\frac{229}{729}$	
1459.....	$\frac{459}{1459}$		
1460.....	$\frac{460}{1460}$.. $\frac{23}{73}$	
1461.....	$\frac{461}{1461}$		
1462.....	$\frac{462}{1462}$.. $\frac{231}{731}$	
1463.....	$\frac{463}{1463}$		
1464.....	$\frac{464}{1464}$.. $\frac{58}{183}$	
1465.....	$\frac{465}{1465}$.. $\frac{93}{293}$	
1466.....	$\frac{466}{1466}$.. $\frac{233}{733}$	
1467.....	$\frac{467}{1467}$		
1468.....	$\frac{468}{1468}$.. $\frac{117}{367}$	
1469.....	$\frac{469}{1469}$		
1470.....	$\frac{470}{1470}$.. $\frac{47}{147}$	
1471.....	$\frac{471}{1471}$		
1472.....	$\frac{472}{1472}$.. $\frac{59}{184}$	

Pour	Otez		
1473 degrés	$\frac{473}{1473}$		du poids de l'aréomètre.
1474.....	$\frac{474}{1474}$	ou $\frac{237}{737}$	
1475.....	$\frac{475}{1475}$.. $\frac{19}{59}$	
1476.....	$\frac{476}{1476}$.. $\frac{119}{369}$	
1477.....	$\frac{477}{1477}$		
1478.....	$\frac{478}{1478}$.. $\frac{239}{739}$	
1479.....	$\frac{479}{1479}$		
1480.....	$\frac{480}{1480}$.. $\frac{12}{37}$	
1481.....	$\frac{481}{1481}$		
1482.....	$\frac{482}{1482}$.. $\frac{242}{742}$	
1483.....	$\frac{483}{1483}$		
1484.....	$\frac{484}{1484}$.. $\frac{121}{371}$	
1485.....	$\frac{485}{1485}$.. $\frac{97}{297}$	
1486.....	$\frac{486}{1486}$.. $\frac{243}{743}$	
1487.....	$\frac{487}{1487}$		
1488.....	$\frac{488}{1488}$.. $\frac{61}{186}$	
1489.....	$\frac{489}{1489}$		
1490.....	$\frac{490}{1490}$.. $\frac{49}{149}$	
1491.....	$\frac{491}{1491}$		
1492.....	$\frac{492}{1492}$.. $\frac{122}{372}$	
1493.....	$\frac{493}{1493}$		
1494.....	$\frac{494}{1494}$.. $\frac{247}{747}$	
1495.....	$\frac{495}{1495}$.. $\frac{99}{299}$	
1496.....	$\frac{496}{1496}$.. $\frac{62}{187}$	
1497.....	$\frac{497}{1497}$		
1498.....	$\frac{498}{1498}$.. $\frac{249}{749}$	
1499.....	$\frac{499}{1499}$		
1500.....	$\frac{500}{1500}$.. $\frac{5}{3}$	
1501.....	$\frac{501}{1501}$		

Pour	Otez		Pour	Otez	
1502 degrés	$\frac{502}{1502}$	ou $\frac{251}{751}$ du poids de l'aréomètre.	1531 degrés	$\frac{531}{1531}$	du poids de l'aréomètre.
1503.....	$\frac{503}{1503}$		1532.....	$\frac{532}{1532}$	Où $\frac{113}{333}$ l'aréomètre.
1504.....	$\frac{504}{1504}$.. $\frac{63}{188}$	1533.....	$\frac{533}{1533}$	
1505.....	$\frac{505}{1505}$.. $\frac{101}{301}$	1534.....	$\frac{534}{1534}$.. $\frac{267}{767}$
1506.....	$\frac{506}{1506}$.. $\frac{253}{753}$	1535.....	$\frac{535}{1535}$.. $\frac{107}{307}$
1507.....	$\frac{507}{1507}$		1536.....	$\frac{536}{1536}$.. $\frac{67}{192}$
1508.....	$\frac{508}{1508}$.. $\frac{127}{377}$	1537.....	$\frac{537}{1537}$	
1509.....	$\frac{509}{1509}$		1538.....	$\frac{538}{1538}$.. $\frac{269}{769}$
1510.....	$\frac{510}{1510}$.. $\frac{51}{151}$	1539.....	$\frac{539}{1539}$	
1511.....	$\frac{511}{1511}$		1540.....	$\frac{540}{1540}$.. $\frac{27}{77}$
1512.....	$\frac{512}{1512}$.. $\frac{64}{189}$	1541.....	$\frac{541}{1541}$	
1513.....	$\frac{513}{1513}$		1542.....	$\frac{542}{1542}$.. $\frac{271}{771}$
1514.....	$\frac{514}{1514}$.. $\frac{257}{757}$	1543.....	$\frac{543}{1543}$	
1515.....	$\frac{515}{1515}$.. $\frac{103}{303}$	1544.....	$\frac{544}{1544}$.. $\frac{69}{193}$
1516.....	$\frac{516}{1516}$.. $\frac{129}{379}$	1545.....	$\frac{545}{1545}$.. $\frac{109}{309}$
1517.....	$\frac{517}{1517}$		1546.....	$\frac{546}{1546}$.. $\frac{273}{773}$
1518.....	$\frac{518}{1518}$.. $\frac{259}{759}$	1547.....	$\frac{547}{1547}$	
1519.....	$\frac{519}{1519}$		1548.....	$\frac{548}{1548}$.. $\frac{137}{387}$
1520.....	$\frac{520}{1520}$.. $\frac{13}{38}$	1549.....	$\frac{549}{1549}$	
1521.....	$\frac{521}{1521}$		1550.....	$\frac{550}{1550}$.. $\frac{11}{31}$
1522.....	$\frac{522}{1522}$.. $\frac{261}{761}$	1551.....	$\frac{551}{1551}$	
1523.....	$\frac{523}{1523}$		1552.....	$\frac{552}{1552}$.. $\frac{69}{194}$
1524.....	$\frac{524}{1524}$.. $\frac{131}{381}$	1553.....	$\frac{553}{1553}$	
1525.....	$\frac{525}{1525}$.. $\frac{21}{61}$	1554.....	$\frac{554}{1554}$.. $\frac{277}{777}$
1526.....	$\frac{526}{1526}$.. $\frac{263}{763}$	1555.....	$\frac{555}{1555}$.. $\frac{111}{311}$
1527.....	$\frac{527}{1527}$		1556.....	$\frac{556}{1556}$.. $\frac{139}{389}$
1528.....	$\frac{528}{1528}$.. $\frac{66}{194}$	1557.....	$\frac{557}{1557}$	
1529.....	$\frac{529}{1529}$		1558.....	$\frac{558}{1558}$.. $\frac{279}{779}$
1530.....	$\frac{530}{1530}$.. $\frac{53}{153}$	1559.....	$\frac{559}{1559}$	

Pour	Otez		
1560 degrés	$\frac{560}{1560}$	ou $\frac{14}{39}$	du poids de l'aréomètre.
1561.....	$\frac{561}{1561}$		
1562.....	$\frac{562}{1562}$.. $\frac{281}{784}$	
1563.....	$\frac{563}{1563}$		
1564.....	$\frac{564}{1564}$.. $\frac{141}{391}$	
1565.....	$\frac{565}{1565}$.. $\frac{113}{313}$	
1566.....	$\frac{566}{1566}$.. $\frac{283}{783}$	
1567.....	$\frac{567}{1567}$		
1568.....	$\frac{568}{1568}$.. $\frac{71}{193}$	
1569.....	$\frac{569}{1569}$		
1570.....	$\frac{570}{1570}$.. $\frac{57}{137}$	
1571.....	$\frac{571}{1571}$..	
1572.....	$\frac{572}{1572}$.. $\frac{143}{393}$	
1573.....	$\frac{573}{1573}$		
1574.....	$\frac{574}{1574}$.. $\frac{287}{787}$	
1575.....	$\frac{575}{1575}$.. $\frac{23}{63}$	
1576.....	$\frac{576}{1576}$.. $\frac{73}{197}$	
1577.....	$\frac{577}{1577}$		
1578.....	$\frac{578}{1578}$.. $\frac{289}{789}$	
1579.....	$\frac{579}{1579}$		
1580.....	$\frac{580}{1580}$.. $\frac{29}{79}$	
1581.....	$\frac{581}{1581}$		
1582.....	$\frac{582}{1582}$.. $\frac{291}{791}$	
1583.....	$\frac{583}{1583}$		
1584.....	$\frac{584}{1584}$.. $\frac{71}{198}$	
1585.....	$\frac{585}{1585}$.. $\frac{117}{317}$	
1586.....	$\frac{586}{1586}$.. $\frac{293}{793}$	
1587.....	$\frac{587}{1587}$		
1588.....	$\frac{588}{1588}$.. $\frac{147}{397}$	

Pour	Otez		
1589 degrés	$\frac{589}{1589}$		du poids de l'aréomètre.
1590.....	$\frac{590}{1590}$	ou $\frac{59}{159}$	
1591.....	$\frac{591}{1591}$		
1592.....	$\frac{592}{1592}$.. $\frac{74}{197}$	
1593.....	$\frac{593}{1593}$		
1594.....	$\frac{594}{1594}$.. $\frac{297}{797}$	
1595.....	$\frac{595}{1595}$		
1596.....	$\frac{596}{1596}$.. $\frac{149}{399}$	
1597.....	$\frac{597}{1597}$		
1598.....	$\frac{598}{1598}$.. $\frac{299}{799}$	
1599.....	$\frac{599}{1599}$		
1600.....	$\frac{600}{1600}$.. $\frac{3}{8}$	
1601.....	$\frac{601}{1601}$		
1602.....	$\frac{602}{1602}$.. $\frac{301}{801}$	
1603.....	$\frac{603}{1603}$		
1604.....	$\frac{604}{1604}$.. $\frac{151}{401}$	
1605.....	$\frac{605}{1605}$.. $\frac{121}{321}$	
1606.....	$\frac{606}{1606}$.. $\frac{303}{803}$	
1607.....	$\frac{607}{1607}$		
1608.....	$\frac{608}{1608}$.. $\frac{76}{201}$	
1609.....	$\frac{609}{1609}$		
1610.....	$\frac{610}{1610}$.. $\frac{61}{161}$	
1611.....	$\frac{611}{1611}$		
1612.....	$\frac{612}{1612}$.. $\frac{153}{403}$	
1613.....	$\frac{613}{1613}$		
1614.....	$\frac{614}{1614}$.. $\frac{307}{807}$	
1615.....	$\frac{615}{1615}$.. $\frac{123}{323}$	
1616.....	$\frac{616}{1616}$.. $\frac{77}{203}$	
1617.....	$\frac{617}{1617}$		

Pour	Otez		Pour	Otez	
1618 degrés	$\frac{618}{1618}$	ou $\frac{307}{809}$ du poids de l'aréomètre.	1647 degrés	$\frac{647}{1647}$	du poids de l'aréomètre.
1619.....	$\frac{619}{1619}$		1648.....	$\frac{648}{1648}$	ou $\frac{81}{206}$ l'aréomètre.
1620.....	$\frac{620}{1620}$.. $\frac{31}{81}$	1649.....	$\frac{649}{1649}$	
1621.....	$\frac{621}{1621}$		1650.....	$\frac{650}{1650}$.. $\frac{13}{33}$
1622.....	$\frac{622}{1622}$.. $\frac{311}{811}$	1651.....	$\frac{651}{1651}$	
1623.....	$\frac{623}{1623}$		1652.....	$\frac{652}{1652}$.. $\frac{163}{413}$
1624.....	$\frac{624}{1624}$.. $\frac{73}{203}$	1653.....	$\frac{653}{1653}$	
1625.....	$\frac{625}{1625}$.. $\frac{5}{13}$	1654.....	$\frac{654}{1654}$.. $\frac{127}{827}$
1626.....	$\frac{626}{1626}$.. $\frac{313}{813}$	1655.....	$\frac{655}{1655}$.. $\frac{131}{331}$
1627.....	$\frac{627}{1627}$		1656.....	$\frac{656}{1656}$.. $\frac{82}{207}$
1628.....	$\frac{628}{1628}$.. $\frac{117}{407}$	1657.....	$\frac{657}{1657}$	
1629.....	$\frac{629}{1629}$		1658.....	$\frac{658}{1658}$.. $\frac{329}{829}$
1630.....	$\frac{630}{1630}$.. $\frac{63}{163}$	1659.....	$\frac{659}{1659}$	
1631.....	$\frac{631}{1631}$		1660.....	$\frac{660}{1660}$.. $\frac{33}{81}$
1632.....	$\frac{632}{1632}$.. $\frac{79}{204}$	1661.....	$\frac{661}{1661}$	
1633.....	$\frac{633}{1633}$		1662.....	$\frac{662}{1662}$.. $\frac{331}{831}$
1634.....	$\frac{634}{1634}$.. $\frac{317}{817}$	1663.....	$\frac{663}{1663}$	
1635.....	$\frac{635}{1635}$.. $\frac{127}{327}$	1664.....	$\frac{664}{1664}$.. $\frac{83}{208}$
1636.....	$\frac{636}{1636}$.. $\frac{159}{409}$	1665.....	$\frac{665}{1665}$.. $\frac{133}{333}$
1637.....	$\frac{637}{1637}$		1666.....	$\frac{666}{1666}$.. $\frac{331}{831}$
1638.....	$\frac{638}{1638}$.. $\frac{319}{819}$	1667.....	$\frac{667}{1667}$	
1639.....	$\frac{639}{1639}$		1668.....	$\frac{668}{1668}$.. $\frac{167}{417}$
1640.....	$\frac{640}{1640}$.. $\frac{16}{41}$	1669.....	$\frac{669}{1669}$	
1641.....	$\frac{641}{1641}$		1670.....	$\frac{670}{1670}$.. $\frac{67}{167}$
1642.....	$\frac{642}{1642}$.. $\frac{321}{821}$	1671.....	$\frac{671}{1671}$	
1643.....	$\frac{643}{1643}$		1672.....	$\frac{672}{1672}$.. $\frac{84}{209}$
1644.....	$\frac{644}{1644}$.. $\frac{161}{411}$	1673.....	$\frac{673}{1673}$	
1645.....	$\frac{645}{1645}$.. $\frac{129}{329}$	1674.....	$\frac{674}{1674}$.. $\frac{337}{837}$
1646.....	$\frac{646}{1646}$.. $\frac{323}{823}$	1675.....	$\frac{675}{1675}$.. $\frac{27}{67}$

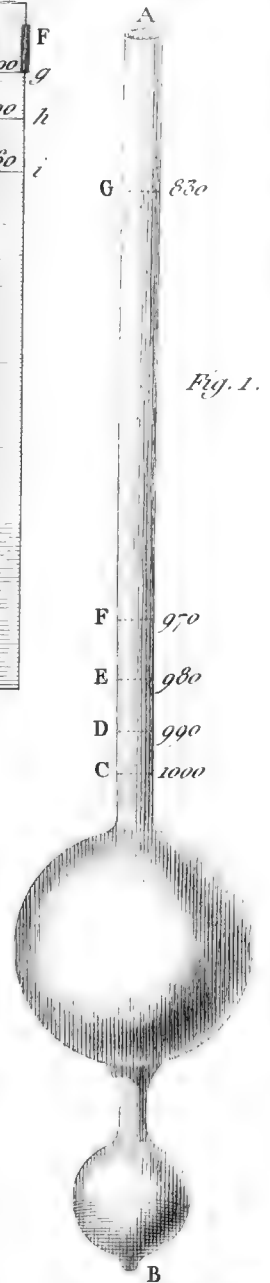
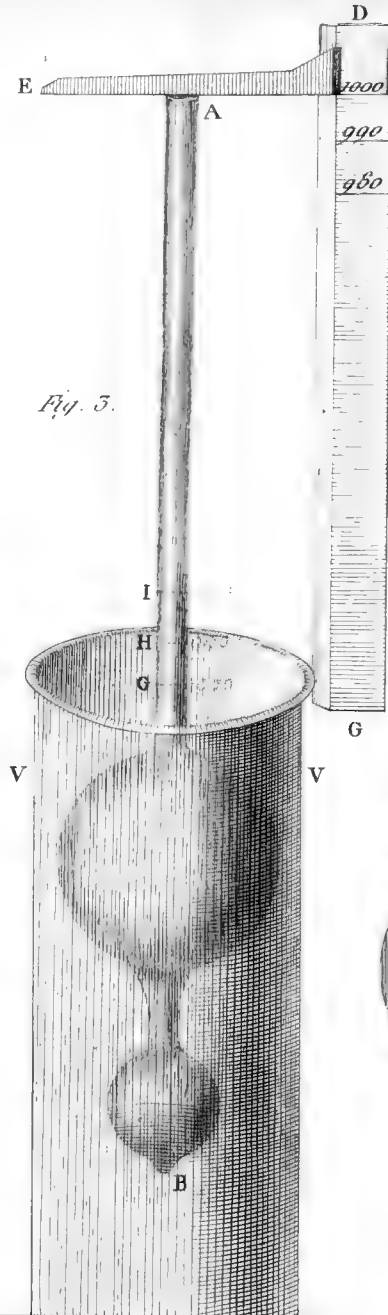
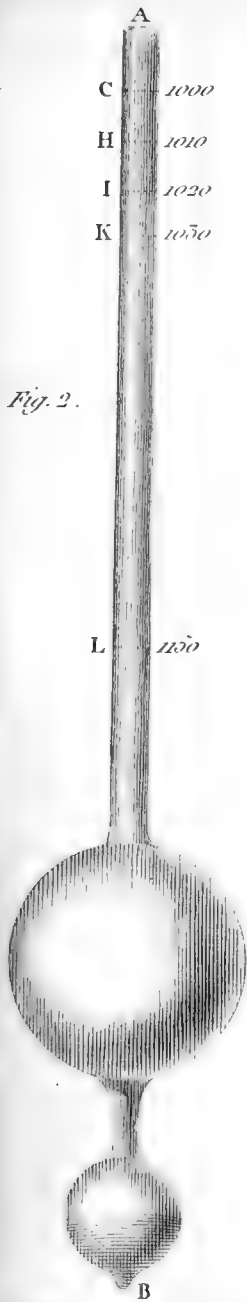
Pour	Otez	
1676 degrés	$\frac{676}{1676}$	ou $\frac{169}{419}$ du poids de l'aréomètre.
1677.....	$\frac{677}{1677}$	
1678.....	$\frac{678}{1678}$.. $\frac{339}{839}$
1679.....	$\frac{679}{1679}$	
1680.....	$\frac{680}{1680}$.. $\frac{17}{42}$
1681.....	$\frac{681}{1681}$	
1682.....	$\frac{682}{1682}$.. $\frac{341}{841}$
1683.....	$\frac{683}{1683}$	
1684.....	$\frac{684}{1684}$.. $\frac{171}{421}$
1685.....	$\frac{685}{1685}$.. $\frac{137}{337}$
1686.....	$\frac{686}{1686}$.. $\frac{343}{843}$
1687.....	$\frac{687}{1687}$	
1688.....	$\frac{688}{1688}$.. $\frac{86}{211}$
1689.....	$\frac{689}{1689}$	
1690.....	$\frac{690}{1690}$.. $\frac{69}{169}$
1691.....	$\frac{691}{1691}$	
1692.....	$\frac{692}{1692}$.. $\frac{173}{423}$
1693.....	$\frac{693}{1693}$	
1694.....	$\frac{694}{1694}$.. $\frac{347}{847}$
1695.....	$\frac{695}{1695}$.. $\frac{139}{339}$
1696.....	$\frac{696}{1696}$.. $\frac{87}{212}$
1697.....	$\frac{697}{1697}$	
1698.....	$\frac{698}{1698}$.. $\frac{349}{849}$
1699.....	$\frac{699}{1699}$	
1700.....	$\frac{700}{1700}$.. $\frac{7}{17}$
1701.....	$\frac{701}{1701}$	
1702.....	$\frac{702}{1702}$.. $\frac{351}{851}$
1703.....	$\frac{703}{1703}$	
1704.....	$\frac{704}{1704}$.. $\frac{83}{213}$

Pour	Otez	
1705 degrés	$\frac{705}{1705}$	ou $\frac{141}{341}$ du poids de l'aréomètre.
1706.....	$\frac{706}{1706}$.. $\frac{353}{853}$
1707.....	$\frac{707}{1707}$	
1708.....	$\frac{708}{1708}$.. $\frac{177}{427}$
1709.....	$\frac{709}{1709}$	
1710.....	$\frac{710}{1710}$.. $\frac{71}{171}$
1711.....	$\frac{711}{1711}$	
1712.....	$\frac{712}{1712}$.. $\frac{89}{214}$
1713.....	$\frac{713}{1713}$	
1714.....	$\frac{714}{1714}$.. $\frac{357}{857}$
1715.....	$\frac{715}{1715}$.. $\frac{143}{343}$
1716.....	$\frac{716}{1716}$.. $\frac{179}{429}$
1717.....	$\frac{717}{1717}$	
1718.....	$\frac{718}{1718}$.. $\frac{359}{859}$
1719.....	$\frac{719}{1719}$	
1720.....	$\frac{720}{1720}$.. $\frac{18}{43}$
1721.....	$\frac{721}{1721}$	
1722.....	$\frac{722}{1722}$.. $\frac{361}{861}$
1723.....	$\frac{723}{1723}$	
1724.....	$\frac{724}{1724}$.. $\frac{181}{431}$
1725.....	$\frac{725}{1725}$.. $\frac{20}{49}$
1726.....	$\frac{726}{1726}$.. $\frac{363}{863}$
1727.....	$\frac{727}{1727}$	
1728.....	$\frac{728}{1728}$.. $\frac{91}{216}$
1729.....	$\frac{729}{1729}$	
1730.....	$\frac{730}{1730}$.. $\frac{73}{173}$
1731.....	$\frac{731}{1731}$	
1732.....	$\frac{732}{1732}$.. $\frac{183}{433}$
1733.....	$\frac{733}{1733}$	

Pour	Otez	
1734 degrés	$\frac{734}{1734}$	ou $\frac{367}{867}$ du poids de
1735.....	$\frac{735}{1735}$.. $\frac{147}{347}$ l'aréomètre.
1736.....	$\frac{736}{1736}$.. $\frac{92}{217}$
1737.....	$\frac{737}{1737}$	
1738.....	$\frac{738}{1738}$.. $\frac{369}{869}$
1739.....	$\frac{739}{1739}$	
1740.....	$\frac{740}{1740}$.. $\frac{37}{87}$
1741.....	$\frac{741}{1741}$	
1742.....	$\frac{742}{1742}$.. $\frac{375}{875}$

Pour	Otez	
1743 degrés	$\frac{743}{1743}$	du poids de
1744.....	$\frac{744}{1744}$	ou $\frac{91}{218}$ l'aréomètre.
1745.....	$\frac{745}{1745}$.. $\frac{149}{349}$
1746.....	$\frac{746}{1746}$.. $\frac{373}{873}$
1747.....	$\frac{747}{1747}$	
1748.....	$\frac{748}{1748}$.. $\frac{387}{437}$
1749.....	$\frac{749}{1749}$	
1750.....	$\frac{750}{1750}$.. $\frac{3}{2}$









Dugros globe sur les différens points du contaët. La densité moyenne du gros globe est D ; son rayon R , le rayon du petit globe est r .

TABLEAU de 24 Équations destinées à déterminer la densité électrique moyenne de 24 petits globes, les centres placés en ligne droite, le petit globe x en contact avec un gros globe.

Dans ce Tableau, les N.^{os} au haut de chaque colonne indiquent la place du petit globe; en sorte, par exemple, qu'à la huitième colonne verticale, troisième ligne horizontale,

l'on trouve la quantité $\frac{a}{11^2}$ qui est sensée multipliée par d^8 , ou par la densité moyenne du huitième petit globe, à compter du gros globe.

[illegible]

SIXIÈME MÉMOIRE

SUR L'ÉLECTRICITÉ.

Par M. COULOMB.

Suite des recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs corps conducteurs : détermination de la densité électrique dans les différens points de la surface de ces corps.

I.

DANS notre cinquième Mémoire, dont celui-ci est la suite, nous avons tâché de déterminer la manière dont le fluide électrique se partage entre deux globes de différens diamètres mis en contact, & entre trois globes du même diamètre. Nous avons en même temps déterminé par l'expérience, ainsi que par la théorie, la densité électrique de chaque point de la surface de ces globes lorsqu'ils sont en contact. Nous allons actuellement chercher,

1.^o Comment l'électricité se distribue entre un nombre quelconque de globes égaux mis en contact de manière que tous les centres soient en ligne droite;

2.^o Comment le fluide électrique se distribue sur les différentes parties d'un cylindre électrisé;

3.^o Comment il se distribue entre un gros globe & une file de petits globes en contact avec ce gros globe;

4.^o Dans quel rapport le fluide électrique se partage entre un gros globe & des cylindres de différens diamètres & de différentes longueurs, mis successivement en contact avec le globe.

Mém. 1788.

liii

I I.

Détermination de la distribution du fluide électrique des six globes égaux mis en contact.

J'AI formé une ligne de six globes de deux pouces de diamètre, qui peuvent se séparer à volonté, un desquels, *C*, *fig. 1.^{re}*, est soutenu par un petit cylindre de gomme laque, & peut se placer soit dans la balance électrique, soit dans la file des globes. Après avoir, d'après les méthodes indiquées dans le *Volume de 1787, pages 421 & suivantes*, électrisé le petit plan de papier qui termine l'aiguille de la balance, j'électrise les six globes qui sont posés, *fig. 1.^{re}*, sur des supports idio-électriques : je place ensuite alternativement le globe *C* le premier & le deuxième de la file, & à chaque essai je le présente dans la balance à l'aiguille que j'ai soin de ramener à la même distance du centre du globe *C* : je fais ensuite la même opération en plaçant le globe alternativement le premier & le troisième dans la file ; par ces deux opérations, je détermine les rapports entre les quantités d'électricité que contiennent le premier, le deuxième & le troisième globe dans la file.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le globe C placé le premier dans la file, comparé avec le même globe placé le deuxième dans la file.

DANS chaque essai, lorsque le globe *C*, après avoir été tiré de la file, étoit placé dans la balance, l'on ramenoit l'aiguille, par la force de torsion, à 30 degrés du centre du globe *C*.

1.^{er} Essai : le globe *C* placé en 2, ou le deuxième dans la file, & présenté ensuite dans la balance, a

chassé l'aiguille, qui a été ramenée à 30 degrés du centre de ce globe, par une force de torsion, tout compris, de..... 44^{degr.}

- 2.^e *Essai*: placé le premier dans la file..... 64.
 3.^e *Essai*: placé le deuxième..... 40.
 4.^e *Essai*: placé le premier..... 54.
 5.^e *Essai*: placé le deuxième..... 34.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Le globe C placé le premier dans la file, comparé avec le même globe placé le troisième dans la file.

- 1.^{er} *Essai*: le globe C placé le troisième dans la file; le reste comme dans l'expérience qui précède la force de torsion, est de..... 81^{degr.}
 2.^e *Essai*: placé le premier dans la file..... 111.
 3.^e *Essai*: placé le troisième..... 61.
 4.^e *Essai*: placé le premier..... 85,
 5.^e *Essai*: placé le troisième..... 51.

I I I.

Résultat des deux Expériences qui précèdent.

LES cinq essais dans chaque expérience, ont été faits à des intervalles de temps à peu-près égaux, pour qu'en prenant une moyenne entre le premier & le troisième essai, par exemple, cette moyenne pût se comparer avec le deuxième essai; la différence entre le résultat donné par l'expérience entre le premier & troisième essai, provenant de la diminution de l'électricité qui est occasionnée dans cet intervalle de temps par le contact de l'air, comme nous l'avons déjà observé dans les Mémoires qui précèdent.

Dans la première expérience, en prenant une valeur moyenne entre le premier & le troisième essai comparé au deuxième, l'on trouvera que la quantité d'électricité que

contient le premier globe, est à celle que contient le deuxième globe :: 64 : 42 :: 1,52 : 1,00.

Une moyenne entre le deuxième & quatrième essai, comparé au troisième, donnera ce rapport :: 1,47 : 1,00.

Une moyenne entre le troisième & cinquième, comparé au quatrième, donnera ce rapport . . . :: 1,46 : 1,00.

Ainsi en prenant une valeur moyenne entre ces trois résultats, l'on trouvera que dans notre file de six globes, la quantité d'électricité du premier globe est à celle du deuxième comme 1,48 est à 1,00.

Un calcul analogue entre le premier & le troisième globe, donnera, d'après les essais de la deuxième expérience, que la quantité d'électricité que contient le premier globe dans la file des six globes, est à celle que contient le troisième globe :: 1,56 : 1,00. En sorte que la masse du fluide électrique diminue à peu-près d'un tiers du premier au deuxième globe, & seulement d'un quinzième du second au troisième.

I V.

Application de la théorie à cette expérience.

IL faut se ressouvenir dans tous les articles de ce Mémoire, relatifs à la théorie, 1.^o que le fluide électrique agit en raison inverse du carré des distances de ses parties.

2.^o Qu'il se distribue sur la surface des corps, mais qu'il ne pénètre pas au moins d'une manière sensible dans l'intérieur des corps. Nous avons prouvé la première proposition dans notre premier Mémoire, *vol. de 1785*; la deuxième dans le quatrième Mémoire, imprimé en 1786. On peut la confirmer par une nouvelle expérience qui paroît décisive: voici en quoi elle consiste. On isole un corps conducteur que l'on électrise; on lui forme ensuite une enveloppe coupée en deux parties, qui laisse en se réunissant un peu de jeu entr'elle & le corps. Que cette enveloppe ait ou non la même figure que le corps, peu importe au succès

de l'expérience. Si l'on électrise le corps placé sur un isoloir, & qu'on le renferme entre ces deux parties de l'enveloppe, soutenues par deux bâtons idio-électriques, en retirant les deux enveloppes, on trouvera, au moyen de nos petits électromètres à suspension de soie, que toute l'électricité du corps a passé aux enveloppes, & que le corps, ou n'en conserve point, ou n'en conserve qu'une partie insensible.

Ces deux propositions étant admises, pour déterminer par approximation la quantité moyenne d'électricité que contient chaque globe dans notre file de six globes, je suppose, pour avoir une première approximation, que la masse électrique de chacun des globes est répandue uniformément sur la surface de ces globes, mais qu'elle est différente pour chaque globe, de manière que l'action électrique de tous les globes sur chaque point de contact soit en équilibre. Dans cette supposition, l'action d'une surface sphérique, dont tous les points ont la même densité D , agissant sur un point de la surface dont la masse électrique seroit μ , seroit représentée par $\Pi D \mu$; Π étant le rapport de la circonférence au rayon. Mais si la même surface sphérique dont le rayon est R , agit sur un point éloigné de la surface de la quantité a , l'action sur ce point sera représentée par $2 \Pi D \mu R^2 : (R + a)^2$: ainsi, en calculant dans notre expérience, *fig. 1*, l'action des six globes sur les points de contact a & a' , l'on aura, en

nommant δ^1 la densité moyenne du fluide électrique sur le globe 1; δ^2 la densité moyenne sur le globe 2; δ^3 celle sur le globe 3, les deux équations suivantes :

$$1.^{\text{re}} \text{ Equation, équilibre en } a \dots \delta^1 = \delta^2 + \frac{2\delta^3}{3^2} + \frac{2\delta^1}{5^2} + \frac{2\delta^2}{7^2} + \frac{2\delta^3}{9^2},$$

$$2.^{\text{e}} \text{ Equation, équilibre en } a' \dots \frac{2}{3^2} \delta^1 = -\delta^2 + \delta^3 + \frac{2\delta^1}{3^2} + \frac{2\delta^2}{5^2} + \frac{2\delta^3}{7^2}$$

$$1.^{\text{re}} \text{ Equation} \dots\dots\dots 0,98 \overset{1}{\delta} = 1,04 \overset{1}{\delta} + 0,29 \overset{3}{\delta};$$

$$2.^{\text{e}} \text{ Equation} \dots\dots\dots 0,18 \overset{1}{\delta} = -0,92 \overset{2}{\delta} + 1,22 \overset{3}{\delta};$$

$$\text{d'où l'on tire } \overset{1}{\delta} = 1,33 \overset{2}{\delta}; \quad \overset{1}{\delta} = 1,42 \overset{3}{\delta}.$$

Nous avons trouvé par l'expérience, $\overset{1}{\delta} = 1,48 \overset{2}{\delta}$ &

$\overset{1}{\delta} = 1,56 \overset{3}{\delta}$; ainsi l'expérience donne le rapport de la densité moyenne du fluide électrique du premier globe aux deux autres, d'un dixième à peu-près plus grand que la théorie. Nous avons déjà eu ce résultat dans le Mémoire qui précède, pour trois globes égaux mis en ligne droite.

Il est facile de voir à quoi tient en plus grande partie la différence des résultats entre le calcul que nous venons de donner & l'expérience; dans le calcul qui précède nous avons supposé que la densité électrique est uniformément répandue sur chaque globe; mais dans la réalité cette densité est nulle, ou au moins insensible à tous les points de contact des globes, comme nous l'avons prouvé, *vol. de 1787, pag. 437 & suiv.* Dans le globe 2, *fig. 1*, ainsi que dans tous les autres, excepté le premier & le dernier de la file, la densité électrique croît depuis le point de contact jusqu'en 2d , placé vers le sommet de l'équateur, où est son *maximum*. Dans le premier & le dernier globe de la file, cette densité croît depuis le point de contact jusqu'au point *b*, pôle opposé: les lignes ponctuées dans notre figure, donnent à peu-près la forme de la courbe des densités.

Si nous cherchons à présent à déterminer l'équilibre au point *a*, en supposant que toute la masse du fluide électrique du globe 2, est réunie au point 2d ou à l'équateur, & que celle du globe 1 est une quantité moyenne entre celle réunie au point 2d & celle réunie au point *b*; la quantité

du fluide électrique répandue sur la surface de chaque globe, étant $2\pi dr^2$; π étant le rapport de la circonférence au rayon, le rayon du globe étant r , & δ la densité moyenne du fluide électrique, ou celle qui auroit lieu si le fluide électrique de chaque globe se répandoit uniformément sur la surface de ce globe, l'on auroit

$$\frac{2\pi\delta^2}{2^{\frac{1}{2}}} = 0,70\pi\delta^2 \text{ pour l'action du fluide électrique du}$$

globe 2 sur le point a , dans la supposition que tout ce fluide seroit concentré à l'équateur; cette action évaluée dans la direction de l'axe a 1. Les autres globes éloignés du point de contact sur lequel l'on calcule l'équilibre d'action, peuvent, sans erreur sensible, être supposés agir comme si la masse de leur fluide électrique étoit au centre de chaque globe.

Quant au globe 1, dont on veut avoir l'action relativement au point a , sa densité moyenne étant δ , si la masse de son fluide étoit concentrée au point de l'équateur d , son action seroit égale $0,70\pi\delta$; si elle étoit concentrée au point b , elle seroit..... $0,50\pi\delta$; en la prenant moyenne entre ces deux quantités, elle sera $0,60\pi\delta$. L'on peut actuellement former dans cette nouvelle supposition deux équations; la première, qui exprime l'équilibre au point a , la deuxième, qui exprime l'équilibre au point a .

$$1.^{\text{re}} \text{ Equat. } 0,60\delta = 0,70\delta^2 + 0,22\delta^3 + 0,08\delta^3 + 0,04\delta^2 + 0,02\delta$$

$$2.^{\text{e}} \text{ Equat. } 0,22\delta = -0,70\delta^2 + 0,70\delta^3 + 0,22\delta^3 + 0,08\delta^2 + 0,04\delta$$

qui réduites donnent

$$\left(\frac{58}{74} + \frac{18}{62} \right) \delta^1 = \left(\frac{30}{74} + \frac{92}{62} \right) \delta^3,$$

d'où $\delta^3 = 1,75 \delta^1$, l'expérience nous a donné $\delta^3 = 1,56 \delta^1$. Ainsi, dans notre nouvelle supposition, le calcul donne

δ^3 d'un huitième à peu-près plus grand que l'expérience : dans notre première supposition du fluide électrique uniformément répandu sur chaque globe, nous trouvons δ^3

$= 1,42 \delta^1$; mais, ainsi que nous l'avons prouvé dans notre précédent Mémoire, le fluide électrique se distribue sur la surface des globes, suivant une forme moyenne entre celle de nos deux suppositions, la densité étant nulle au point de contact, & la masse du fluide n'étant pas en entier réunie à l'équateur; ainsi, le rapport donné par l'expérience doit être à peu-près une quantité moyenne entre les résultats du calcul de nos deux suppositions. Nous avons, par la première supposition du fluide uniformément répandu sur la surface de chaque globe $\delta^3 = 1,42 \delta^1$, par la deuxième supposition du fluide concentré à l'équateur $\delta^3 = 1,75 \delta^1$, ce qui donne pour quantité moyenne $\delta^3 = 1,58$: l'expérience donne 1,56. La correction indiquée par le calcul de cet article, s'appliquera facilement à toute la théorie de ce Mémoire.

V.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

De la manière dont le fluide électrique se distribue entre douze globes égaux de deux pouces de diamètre, mis en contact sur la même ligne.

LES détails dans lesquels nous sommes entrés en expliquant l'expérience précédente, suffisent, je crois, pour
faire

faire entendre les procédés qu'il faut suivre; ainsi pour ne pas grossir inutilement ce Mémoire, nous ne rapporterons dans toutes les expériences analogues, que les résultats. Dans une ligne, formée par douze globes de 2 pouces de diamètre, nous avons trouvé que la quantité de fluide électrique que contient le premier globe, est à celle que contient le deuxième :: 1,50 : 1,00; en comparant le premier globe avec le sixième ou avec celui du milieu, nous avons trouvé que la quantité de fluide électrique que prend le premier globe, est à celle que prend le sixième :: 1,70 : 1,00.

V I.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Distribution du fluide électrique entre vingt-quatre globes de 2 pouces de diamètre, mis en contact sur une même ligne.

EN comparant toujours par la même méthode le premier globe avec le deuxième, j'ai trouvé que la quantité d'électricité que contenoit le premier globe, étoit à celle que contenoit le deuxième :: 1,56 : 1,00; en comparant le premier & le douzième, ou celui du milieu, j'ai trouvé que la quantité de l'électricité que contenoit le premier globe de la file, étoit à celle du globe du milieu :: 1,75 : 1,00.

Résultat des deux dernières expériences.

Il résulte de ces deux expériences que, quel que soit le nombre des globes mis en contact sur une ligne droite, la densité moyenne varie considérablement du premier au deuxième globe, mais qu'ensuite elle varie très-lentement du deuxième jusqu'à celui du milieu : dans la quatrième expérience, nous avions une ligne formée de 24 globes. La densité moyenne du premier au deuxième globe, a diminué

dans le rapport de 1,56 à 1,00; mais, du second au douzième, elle n'a varié que dans le rapport de 1,75 à 1,56.

Si nous voulons appliquer ici les méthodes d'approximation qui précèdent, nous prendrons d'abord la ligne formée de douze globes, en nommant δ^1 la densité moyenne du premier globe, δ^2 celle du deuxième, δ^3 celle du troisième, δ^4 celle du quatrième, &c. nous aurons pour la première équation qui exprime l'équilibre au point a ,

$$\delta^1 = \delta^2 - \frac{2}{3^2} \delta^3 + \frac{2}{5^2} \delta^4 - \frac{2}{7^2} \delta^5 + \frac{2}{9^2} \delta^6 \\ - \frac{2}{11^2} \delta^7 + \frac{2}{13^2} \delta^8 - \frac{2}{15^2} \delta^9 + \frac{2}{17^2} \delta^{10} - \frac{2}{19^2} \delta^{11} + \frac{2}{21^2} \delta^{12}$$

Mais puisque les densités, depuis le deuxième globe jusqu'à celui du milieu, varient lentement, que d'ailleurs les coefficients diminuent suivant une série très-convergente,

à mesure que l'on s'éloigne de δ^1 ; l'on peut, sans grande erreur, supposer $\delta^3, \delta^4, \dots, \delta^{12} = \delta^2$; d'où en sommant la série, l'on aura très-approchant $\delta^1 = 1,41 \delta^2$;

quantité moindre à peu-près d'un dixième que $\delta^1 = 1,55 \delta^2$ que nous a fourni l'expérience, différence produite, ainsi que nous l'avons expliqué, *article III*, par le fluide condensé au dernier globe à l'extrémité de l'axe; au lieu que dans les autres, c'est à l'équateur que le *maximum* de la condensation a lieu.

Pour déterminer à présent la quantité de l'électricité que contient le sixième globe, relativement au premier, je forme, d'après la méthode de l'*article IV*, un tableau

de cinq équations qui expriment l'état d'équilibre à tous les points de contact.

Voici ces cinq équations :

$$\begin{aligned} \text{Au point } a \dots & - \frac{1}{d^1} + \frac{2}{d^2} + \frac{2}{3^2} \frac{3}{d^3} + \frac{2}{5^2} \frac{4}{d^4} + \frac{2}{7^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{9^2} \frac{6}{d^6} \\ & + \frac{2}{11^2} \frac{6}{d^6} + \frac{2}{13^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{15^2} \frac{4}{d^4} + \frac{2}{17^2} \frac{3}{d^3} + \frac{2}{19^2} \frac{2}{d^2} + \frac{2}{21^2} \frac{1}{d^1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Au point } a^1 \dots & - \frac{2}{3^2} \frac{1}{d^1} - \frac{2}{d^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3^2} \frac{4}{d^4} + \frac{2}{5^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{7^2} \frac{6}{d^6} \\ & + \frac{2}{9^2} \frac{6}{d^6} + \frac{2}{11^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{13^2} \frac{4}{d^4} + \frac{2}{15^2} \frac{3}{d^3} + \frac{2}{17^2} \frac{2}{d^2} + \frac{2}{19^2} \frac{1}{d^1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Au point } a^2 \dots & - \frac{2}{5^2} \frac{1}{d^1} - \frac{2}{3^2} \frac{2}{d^2} - \frac{3}{d^3} + \frac{4}{d^4} + \frac{2}{3^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{5^2} \frac{6}{d^6} \\ & + \frac{2}{7^2} \frac{6}{d^6} + \frac{2}{9^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{11^2} \frac{4}{d^4} + \frac{2}{13^2} \frac{3}{d^3} + \frac{2}{15^2} \frac{2}{d^2} + \frac{2}{17^2} \frac{1}{d^1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Au point } a^3 \dots & - \frac{2}{7^2} \frac{1}{d^1} + \frac{2}{5^2} \frac{2}{d^2} - \frac{2}{3^2} \frac{3}{d^3} - \frac{4}{d^4} + \frac{5}{d^5} + \frac{2}{3^2} \frac{6}{d^6} \\ & + \frac{2}{5^2} \frac{6}{d^6} + \frac{2}{7^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{9^2} \frac{4}{d^4} + \frac{2}{11^2} \frac{3}{d^3} + \frac{2}{13^2} \frac{2}{d^2} + \frac{2}{15^2} \frac{1}{d^1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Au point } a^4 \dots & - \frac{2}{9^2} \frac{1}{d^1} - \frac{2}{7^2} \frac{2}{d^2} - \frac{2}{5^2} \frac{3}{d^3} - \frac{2}{3^2} \frac{4}{d^4} - \frac{5}{d^5} + \frac{6}{d^6} \\ & + \frac{2}{3^2} \frac{6}{d^6} + \frac{2}{5^2} \frac{5}{d^5} + \frac{2}{7^2} \frac{4}{d^4} + \frac{2}{9^2} \frac{3}{d^3} + \frac{2}{11^2} \frac{2}{d^2} + \frac{2}{13^2} \frac{1}{d^1} = 0. \end{aligned}$$

Ces cinq équations entre six inconnues étant du premier degré, il est facile par les méthodes ordinaires de les réduire à une seule, qui représentera le rapport de la densité moyenne de deux globes pris à volonté dans notre ligne formée par 12 globes mis en contact; mais, comme nous n'avons pas besoin ici d'une précision beaucoup plus grande que celle fournie par l'expérience, nous remarquerons que les densités des différens globes ne varient pas considérablement, excepté du premier au deuxième globe; ainsi l'on peut prendre les densités intermédiaires comme égales, lorsqu'on ne les introduit dans le calcul qu'en petites

fractions; ainsi, pour avoir le rapport de la densité d'un des globes de la ligne avec le premier, il faut faire en sorte de combiner les équations, de manière que le coefficient de la densité dont on veut avoir l'évaluation, soit beaucoup plus grand que les autres; mais, si j'ajoute ensemble les cinq équations qui précèdent, j'aurai

$$0 = -1,38 \overset{1}{\delta} - 0,33 \overset{2}{\delta} - 0,07 \overset{3}{\delta} + 0,07 \overset{4}{\delta} + 0,33 \overset{5}{\delta} + 1,36 \overset{6}{\delta} \\ + 0,38 \overset{6}{\delta} + 0,16 \overset{5}{\delta} + 0,10 \overset{4}{\delta} + 0,07 \overset{3}{\delta} + 0,05 \overset{2}{\delta} + 0,04 \overset{1}{\delta}.$$

Dans cette équation, on voit qu'il n'y a que les coefficients de

$\overset{1}{\delta}$ & $\overset{6}{\delta}$ qui soient considérables : nous savons de plus que la densité varie peu, excepté du premier au deuxième globe; ainsi nous pouvons supposer la densité moyenne électrique, à peu-près la même dans les termes dont les coefficients sont des fractions depuis le deuxième jusqu'au sixième globe;

il résultera de cette supposition $1,34 \overset{1}{\delta} = 2,16 \overset{6}{\delta}$;

d'où . . . $\overset{1}{\delta} = 1,54 \overset{6}{\delta}$.

L'expérience a donné $\overset{1}{\delta} = 1,70 \overset{6}{\delta}$; en sorte que le rapport de la quantité du fluide électrique du premier globe se trouve, relativement à celui du globe du milieu, d'un dixième à peu-près plus grand par l'expérience que par le calcul : résultat conforme à tout ce que nous avons trouvé précédemment.

V I I.

Distribution du fluide électrique sur la surface d'un cylindre.

C I N Q U I È M E E X P É R I E N C E.

ON s'est servi dans cette expérience, pour suspendre l'aiguille de la balance électrique, d'un fil d'argent doré, dont la force de torsion, sous le même angle de torsion,

n'étoit que la vingtième partie de celle du fil de cuivre le plus fin, numéroté 12 dans le commerce, qui a servi dans les quatre expériences qui précèdent.

On a placé, *fig. 2, n.º 3*, un cylindre de 2 pouces de diamètre & 30 pouces de longueur, terminé par deux demi-sphères, sur un support idio-électrique. On a fait toucher ce cylindre électrisé par un petit plan de papier doré, soutenu par un fil de gomme laque que l'on introduisoit ensuite dans la balance suivant les procédés déjà indiqués dans notre cinquième mémoire, *volume de 1787, planche I.^{re} figure 3*. Il a résulté de cette expérience, en touchant alternativement un point pris au milieu de la surface du cylindre & un point pris à l'extrémité, que la densité au milieu du cylindre est à celle à l'extrémité, comme 1,00 : 2,30.

En comparant un point au milieu du cylindre avec un point à 2 pouces de l'extrémité, l'on a trouvé la densité électrique au milieu du cylindre à celle à 2 pouces de l'extrémité, comme 1,00 : 1,25.

En comparant le point du milieu avec un point sur le grand cercle de la demi-sphère qui termine le cylindre ou au point *e*, à 1 pouce de son extrémité, on a trouvé les densités, comme 1,00 : 1,80.

Résultat de cette expérience.

Il résulte de cette expérience, que sur les deux derniers pouces à l'extrémité du cylindre, la densité électrique est beaucoup plus considérable que vers le milieu du cylindre; mais qu'elle varie peu depuis le milieu du cylindre jusqu'à deux pouces de son extrémité.

V I I I.

Théorie de la distribution du fluide électrique sur la surface d'un cylindre isolé.

LORSQU'UN corps est chargé de fluide électrique, &

que ce fluide est en équilibre, il faut qu'en divisant le corps en deux parties, & calculant l'action de ces deux parties sur un point quelconque, cette action étant évaluée dans une même direction, il y ait équilibre. Ainsi il suffit, pour avoir les conditions d'équilibre du fluide électrique sur la surface d'un cylindre, de calculer les conditions d'équilibre relativement à l'axe de ce cylindre.

PREMIER EXEMPLE.

Cylindre de deux pouces de diamètre & six pouces de longueur.

Le cylindre, *fig. 2, n.º 1*, a 2 pouces de diamètre & 6 pouces de longueur : on le divise aux points 1 & 2 par des plans perpendiculaires à l'axe, en trois parties égales ; il est terminé par une demi-sphère aux deux extrémités. On suppose que la densité moyenne sur la surface de la partie *d a e* est δ^1 ; que celle sur la partie *d e g f* est δ^2 : celle de la partie *f g b* sera la même que celle de *d a e*.

Mais l'action de la demi-sphère *k a L* sur le point 1, dans la direction *a 1*, est $\pi \delta^1 (1 - \frac{1}{\sqrt{1/2}})$: le rayon du cylindre étant l'unité, & π le rapport de la circonférence au rayon ; la portion du cylindre *d k L e*, dont la longueur est égale au rayon, a pour action sur le point 1 dans la direction *a 1*, la quantité $\pi \delta^1 (1 - \frac{1}{\sqrt{1/2}})$: l'action de la portion *d e g f*, qui a 2 pouces de longueur sur le même point 1 dans la direction opposée, est égale à $\pi \delta^2 (1 - \frac{1}{\sqrt{1/5}}) = 0,55 \pi \delta^2$; l'action de la portion *f b g*, sur le même point 1, dans la même direction, peut sans erreur sensible se calculer comme si elle étoit réunie au milieu de 2 *b* ou à 3 pouces du point 1 ; ainsi

son action sur le point 1 est très-approchant $0,22 \pi \delta$, d'où résulte pour exprimer l'équilibre au point 1 de toutes les actions évaluées suivant la direction de l'axe,

$$\text{l'équation } 0,59 \overset{1}{\delta} = 0,55 \overset{2}{\delta} + 0,22 \delta,$$

$$\text{d'où résulte } \overset{1}{\delta} = 1,49 \overset{2}{\delta}.$$

DEUXIÈME EXEMPLE.

Cylindre de deux pouces de diamètre & de douze pouces de longueur.

Si le cylindre, fig. 2, n.^o 2, avoit 12 pouces de longueur & qu'il fût terminé en demi-sphère à chaque extrémité, pour avoir une valeur approchée de la densité moyenne de ses différentes parties, on le diviserait en 6 parties égales de 2 pouces chacune de longueur, & on chercheroit les conditions d'équilibre dans la direction de l'axe

pour le point 1 & pour le point 2. Soit $\overset{1}{\delta}$ la densité moyenne sur la partie de la surface qui répond à a 1; $\overset{2}{\delta}$ la

densité moyenne sur la surface qui répond à 1 2; $\overset{3}{\delta}$ sur la surface qui répond à 2 3; l'on aura, d'après ce qui est expliqué dans l'article qui précède, les deux équations suivantes.

Pour l'équilibre au point 1 :

$$1.^{\text{e}} \text{ éq. } 0,59 \overset{1}{\delta} = 0,55 \overset{2}{\delta} + 0,22 \overset{3}{\delta} + 0,08 \overset{4}{\delta} + 0,04 \overset{5}{\delta} + 0,02 \overset{6}{\delta}.$$

Pour l'équilibre au point 2.

$$2.^{\text{e}} \text{ éq. } 0,22 \overset{1}{\delta} = -0,55 \overset{2}{\delta} + 0,55 \overset{3}{\delta} + 0,22 \overset{4}{\delta} + 0,08 \overset{5}{\delta} + 0,04 \overset{6}{\delta}.$$

Ces deux équations se réduisent à

$$1.^{\text{re}} \dots 0,57 \overset{1}{\delta} = 0,59 \overset{2}{\delta} + 0,30 \overset{3}{\delta},$$

$$2.^{\text{e}} \dots 0,18 \overset{1}{\delta} = - 0,47 \overset{2}{\delta} + 0,77 \overset{3}{\delta},$$

$$\text{d'où résulte } \overset{1}{\delta} = 1,60 \overset{3}{\delta} \text{ \& } \overset{2}{\delta} = 1,55 \overset{3}{\delta};$$

rapports un peu plus grands, mais qui se rapprochent cependant beaucoup de ceux que nous avons trouvés *art. II* & *III*, pour six globes égaux mis en contact sur une ligne droite. L'on sent en effet, d'après les observations que nous avons faites *art. IV*, dans la théorie de la distribution du fluide électrique sur six globes en contact & en ligne droite, que la densité étant presque nulle dans les points de contact des globes & dans les parties qui avoisinent, la distribution moyenne du fluide électrique sur chaque globe doit être à peu-près la même que sur un cylindre continu qui auroit 12 pouces de longueur, & qui seroit terminé par deux demi-sphères.

X.

Seconde méthode d'approximation pour déterminer par la théorie, la distribution du fluide électrique le long de la surface d'un cylindre terminé par deux demi-sphères.

D'APRÈS les deux exemples qui précèdent, & d'après la théorie que nous avons donnée de la distribution du fluide électrique sur une ligne formée de douze globes de 2 pouces en contact, il est facile, en divisant un cylindre en un nombre de parties égales chacune à son diamètre, de déterminer la densité moyenne de chacune de ces parties; mais lorsque le cylindre a une grande longueur, la méthode suivante est suffisante, & simplifie beaucoup le calcul.

Je prends pour exemple un cylindre de 30 pouces de longueur & 2 pouces de diamètre, *fig. 2, n.^o 3*. Je diviserai pour avoir une première approximation, ce cylindre en trois parties inégales; la première formée de la demi-

sphère *e b f*, dont la densité est δ^1 ; la deuxième, de la portion cylindrique *e e' f f'*, ayant 2 pouces de longueur,

dont la densité est δ^2 ; la troisième depuis *d'* jusqu'en *a*;

extrémité de l'axe du cylindre dont la densité est δ^3 . Il faut à présent calculer l'action de ces trois parties sur les points *d* & *d'* suivant la direction de l'axe. L'on en tirera les deux équations approchées.

Première équation pour l'équilibre au point *d*:

$$\frac{\delta^1}{2} = \delta^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{15}} \right) + \delta^3 \left(\frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{29} \right).$$

Deuxième équation pour l'équilibre au point *d'*:

$$\frac{\delta^1}{(2\frac{1}{2})^2} = -\delta^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{15}} \right) + \delta^3 \left(1 - \frac{1}{27} \right).$$

Le calcul de ces deux équations est fondé sur ce que l'action de la surface demi-sphérique *e b f*, sur le point *d*

qui est à son centre, est égal à $\frac{\pi \delta^1}{2}$; & sur ce que l'action

d'une portion de surface cylindrique, dont la densité *D* est uniforme, agissant dans la direction de l'axe, est égale

à $\pi D r \left(\frac{1}{(rr + aa)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(rr + xx)^{\frac{1}{2}}} \right)$ dans laquelle

a représente la distance du point où le cylindre commence; au point sur lequel il agit; *x* représente la distance du point où le cylindre finit, au point sur lequel il exerce son action; *r* est le rayon du cylindre; π le rapport de la circonférence au rayon: en appliquant cette formule

à notre exemple , l'on en tire les deux équations qui précèdent , d'où résulte $\delta = 2,09 \delta$, & $\delta = 1,14 \delta$.

Ainsi , par ce calcul approché , l'on trouve que la densité moyenne du fluide électrique sur la surface de la demi-sphère qui termine le cylindre , est double de la densité moyenne sur la surface du cylindre. Si nous comparons ce résultat avec la dernière expérience , *art. VII*, l'on a trouvé par cette expérience , que la densité à l'extrémité de l'axe du cylindre ou au pôle de la demi-sphère qui le termine , est à celle au milieu du cylindre :: 2,30 : 1,00 ; nous avons également trouvé , *même article* , que la densité sur le grand cercle de cette demi-sphère est à celle au milieu du cylindre :: 1,80 : 1,00. Ainsi , en prenant une moyenne entre ces deux valeurs , dont l'une représente la plus grande densité de la demi-sphère , & l'autre la plus petite , cette densité décroissant depuis le pôle de la demi-sphère jusqu'à l'équateur , l'on aura le rapport de la densité moyenne de la demi-sphère à la densité moyenne sur le cylindre , comme $\frac{2,30 + 1,80}{2} : 1,00 :: 2,05 : 1,00$,

presque exactement la même quantité qui nous a été fournie par la théorie ; ce qui doit effectivement avoir lieu , puisque la densité varie très-peu depuis le milieu du cylindre jusqu'à 2 ou 3 pouces de son extrémité. Nous donnerons dans la suite de ce Mémoire des méthodes d'approximations , pour déterminer d'une manière suffisamment exacte dans la pratique , les loix de la variation de la densité électrique le long de la surface d'un cylindre.

X.

De la manière dont le fluide électrique se distribue entre un certain nombre de globes égaux mis en contact sur une même ligne terminée par un globe d'un plus grand diamètre.

LES expériences de cet article s'exécutent comme celles

qui précèdent; l'on met sur des isoloirs idio-électriques la file des petits globes de 2 pouces de diamètre, ainsi que le globe de 8 pouces. Un de ces petits globes se place à différens endroits de la ligne, & alternativement dans la balance.

X I.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Distribution du fluide électrique entre trois globes en contact, l'un ayant 8 pouces de diamètre, & les deux autres 2 pouces de diamètre.

EN suivant *fig. 3*, dans cette expérience les procédés des articles qui précèdent, j'ai trouvé qu'en ne plaçant que deux globes, 1 & 2, de 2, pouces de diamètre, dont les centres étoient placés en ligne avec celui du globe *C* de 8 pouces de diamètre, la quantité d'électricité dont se chargeoit le globe 2, le plus éloigné du gros globe, étoit à celle du globe 1 en contact avec le globe *C* :: 2,54 : 1,00.

X I I.

Théorie de cette Expérience.

SI l'on fait le calcul de cette expérience, en supposant, comme dans les articles qui précèdent, que la masse du fluide électrique de chaque globe est répandue uniformément sur la surface de ce globe; si l'on représente par *D* la densité moyenne du fluide électrique sur la surface du gros globe *C*, par *R* le rayon de ce globe; si *A*¹ représente la densité du fluide électrique de la surface du petit globe 1 en contact avec le gros globe; & si *A*² représente la densité électrique de la surface du globe 2, dont le rayon est *r*₂, on aura les deux équations suivantes :

Dans le contact au point a ;

$$1.^{\text{re}} \text{ équation, } D = \overset{1}{\delta} + 0,22 \overset{2}{\delta}.$$

Dans le contact au point a' ;

$$2.^{\text{e}} \text{ équation, } \frac{\overset{2}{D} \overset{2}{R}}{(R + 2r)^2} = - \overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta}.$$

Et comme dans notre expérience le globe C a 8 pouces de rayon , & les deux autres seulement 2 pouces , l'on aura , d'après ces deux équations ,

$$\overset{2}{\delta} = 1,55 D, \overset{1}{\delta} = 0,67 D, \text{ \& } \overset{2}{\delta} = 2,35 \overset{1}{\delta}.$$

Nous venons de trouver par l'expérience $\overset{2}{\delta} = 2,54 \overset{1}{\delta}$, quantité un peu plus grande que celle trouvée par la théorie ; ce qui doit effectivement avoir lieu , ainsi que nous l'avons dit plus haut , en vertu de la condensation du fluide électrique vers le point a' , extrémité de l'axe du petit globe qui termine la file.

X I I I.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Un globe de 8 pouces , & quatre globes de 2 pouces en contact.

L'ON a mis , *fig. 3*, quatre globes de 2 pouces de diamètre 1, 2, 3, 4, en contact avec le globe C , de 8 pouces de diamètre , & l'on a cherché le rapport des quantités d'électricité que prenoit un globe de 2 pouces placé successivement en 1 & en 4. Par un résultat moyen entre six observations alternatives , l'on a trouvé qu'en plaçant 4 petits globes de 2 pouces à la file en contact avec le globe C , la quantité du fluide électrique que prenoit un petit globe de 2 pouces placé à l'extrémité de la file en 4, étoit à celle du globe 1, immédiatement en contact avec le globe de 8 pouces C , comme 3,40 : 1,00.

XIV.

Résultat & Théorie de la septième Expérience.

POUR calculer par la théorie la septième expérience, où nous avons mis en contact quatre globes de 2 pouces avec un globe de 8 pouces, l'on formera, d'après les méthodes que nous avons déjà expliquées, quatre équations qui exprimeront l'état d'équilibre aux points a, a, a, a . Soit, comme

à l'article précédent, D la densité moyenne du fluide électrique sur la surface du gros globe C' , dont le rayon est R ;

δ^1 la densité moyenne sur la surface du globe 1; δ^2 celle sur le globe 2; δ^3 celle sur le globe 3; δ^4 celle sur le globe 4, comme dans notre expérience $R = 4r$: nous aurons les quatre équations.

Première équation. L'équilibre au point a donne

$$D = \delta^1 + 0,22 \delta^2 + 0,08 \delta^3 + 0,04 \delta^4.$$

Deuxième équation. L'équilibre au point a' ,

$$0,89 D = - \delta^1 + \delta^2 + 0,22 \delta^3 + 0,08 \delta^4.$$

Troisième équation. L'équilibre au point a'' ,

$$0,50 D = - 0,22 \delta^1 - \delta^2 + \delta^3 + 0,22 \delta^4.$$

Quatrième équation. L'équilibre au point a''' ,

$$0,32 D = - 0,08 \delta^1 - 0,22 \delta^2 - \delta^3 + \delta^4.$$

Pour résoudre ces quatre équations, ajoutons la première à la quatrième, & la deuxième à la troisième, nous aurons;

$$1.^{\text{ère}} \& 4.^{\text{ème}} \quad 1,32 D = 0,92 \delta^1 - 0,92 \delta^3 + 1,04 \delta^4.$$

$$2.^{\text{ème}} \& 3.^{\text{ème}} \quad 1,39 D = - 1,22 \delta^1 + 1,22 \delta^2 + 0,30 \delta^4.$$

Il est clair que dans cette opération, le coefficient de δ^2 dispa- roît dans les deux résultats, & que dans chaque équation, δ^1 & δ^3 ont le même coefficient; ainsi, divisant le premier résultat par 0,92, le deuxième par 1,22, ajoutant l'un à l'autre, nous aurons

$$\left(\frac{1,32}{0,92} + \frac{1,39}{1,22} \right) D = \left(\frac{1,04}{0,92} + \frac{0,30}{1,22} \delta^4 \right);$$

d'où l'on retirera $\delta^4 = 1,88 D$.

Si l'on substitue cette valeur de δ^4 dans les trois premières équations, & que l'on continue l'opération pour déterminer les valeurs de δ^3 , δ^2 , δ^1 , l'on trouvera $\delta^1 = 0,60 D$; $\delta^2 = 1,06 D$; $\delta^3 = 1,28 D$; $\delta^4 = 1,88 D$;

d'où résulte $\frac{\delta^4}{\delta^1} = \frac{1,88}{0,60} = 3,13$: mais nous avons

trouvé par l'expérience $\delta^4 = 3,40 \delta^1$; ainsi le rapport donné par notre théorie est, comme l'on voit, plus petit à peu-près d'un dixième de celui que fournit l'expérience; ce qui est conforme à tout ce que nous avons trouvé précédemment, & aux réflexions d'après lesquelles nous avons vu qu'il falloit corriger notre théorie.

R E M A R Q U E.

Si nous ajoutons ensemble les densités des quatre petits globes, & que nous prenions le quart de cette somme, nous aurons la densité moyenne des quatre petits globes, en supposant que la somme des densités soit distribuée uniformément sur les quatre globes. Cette densité moyenne

seroit égale à $\frac{0,60 D + 1,06 D + 1,28 D + 1,88 D}{4} = 1,205 D$

X V.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

POUR confirmer la théorie qui précède, j'ai tâché de déterminer d'une manière directe par l'expérience, le rapport entre la densité du gros globe *C* de 8 pouces de diamètre, & celle du petit globe 4 qui termine la ligne dans la supposition précédente de cinq globes en contact. Voici le procédé que j'ai suivi dans cette comparaison.

Je déterminois d'abord comme dans l'expérience précédente, la densité du globe 4 placé à l'extrémité de la file; je séparois ensuite le globe *C* de la file des quatre petits globes, sans en détruire l'électricité; & je faisois toucher le gros globe par le globe 4 que je présentais ensuite dans la balance électrique, pour déterminer d'une manière directe la quantité d'électricité que ce globe 4 prenoit par un contact immédiat avec le gros globe. D'après ce procédé, j'ai trouvé que le globe 4 placé à l'extrémité de la file des petits globes, prenoit une quantité d'électricité qui étoit à celle qu'il prenoit lorsqu'on le mettoit seul en contact immédiat avec le globe *C* isolé, :: 1,60 : 1,00. Nous trouvons ce rapport par la théorie :: 1,88 : 1,00; mais la théorie, comme nous avons vu dans la supposition de la densité uniforme sur la surface de chaque globe, le donne nécessairement trop petit, & d'après les réflexions & les expériences qui précèdent, la théorie corrigée auroit donné très-approchant ce rapport comme :: 2,00 : 1,00. Pour évaluer le résultat de l'expérience, il faut à présent se ressouvenir, ainsi que nous l'avons vu dans le Mémoire qui précède, qu'un globe de 2 pouces mis en contact avec un globe de 8 pouces, prend une densité moyenne, plus grande que celle du globe de 8 pouces, dans le rapport de 1,30 à 1,00. Ainsi, pour avoir le véritable rapport entre la densité du globe 4 placé le dernier dans la file, & celle du globe *C*, il faut multiplier

1,60 *D*, qui représente la densité qu'a prise le globe 4, en touchant le globe *C'* par 1,30, & l'on trouvera par expérience, entre la densité moyenne du petit globe 4 placé le dernier dans la file, & entre la densité moyenne de la surface du globe de 8 pouces, le rapport comme 2,08 : 1,00, presque exactement le même que celui qui vient d'être donné par la théorie corrigée.

X V I.

N E U V I È M E E X P É R I E N C E.

Un globe de 8 pouces de diamètre, mis en contact avec une ligne de 24 petits globes de 2 pouces chacun de diamètre, formant une longueur de 48 pouces.

DANS cette expérience, l'on compare les différens globes qui forment la ligne au vingt-quatrième, c'est-à-dire, à celui qui termine la ligne.

Vingt-quatrième comparé au vingt-troisième.

En comparant le dernier à l'avant-dernier, c'est-à-dire, le vingt-quatrième globe de 2 pouces au vingt-troisième; l'on a trouvé par une moyenne entre six essais, que la quantité de l'électricité, ou la densité moyenne du fluide électrique sur la surface du vingt-quatrième globe, étoit à celle du vingt-troisième, comme. 1,49 : 1,00.

Vingt-quatrième comparé au douzième.

En comparant le vingt-quatrième globe au douzième ou à celui placé au milieu de la ligne, l'on a trouvé la densité moyenne du vingt-quatrième à celle du douzième globe, comme. 1,70 : 1,00.

Vingt-quatrième comparé au deuxième.

En comparant le vingt-quatrième avec le deuxième; l'on

l'on a trouvé que la quantité d'électricité moyenne du vingt-quatrième globe étoit à celle du deuxième, comme 2,10 : 10.

Vingt-quatrième comparé au premier.

En comparant le vingt-quatrième globe à celui immédiatement en contact avec le globe de 8 pouces, l'on a trouvé la quantité moyenne d'électricité du vingt-quatrième globe à celle du premier, comme 3,72 : 1,00.

Le vingt-quatrième globe comparé au globe de 8 pouces.

Enfin, en comparant par la méthode corrigée, expliquée dans l'article qui précède, la densité moyenne de l'électricité du vingt-quatrième globe de 2 pouces avec celle du globe de 8 pouces, l'on a trouvé ce rapport, comme 2,16 : 1,00, qui ne diffère, comme l'on voit, que très-peu de celui que nous avons trouvé à l'article qui précède, pour le quatrième globe qui terminoit une ligne formée de 4 globes de 2 pouces en contact avec un globe de 8 pouces.

X V I I.

Application du calcul aux expériences qui précèdent.

J'AI formé un tableau de 24 équations qui représentent, d'après la méthode des articles qui précèdent, l'état d'équilibre à tous les points de contact : ce tableau se trouvera à la fin de ce Mémoire. La réduction des 24 équations à deux inconnues, ne demande que de la patience, & n'a aucune difficulté ; mais comme la longueur du calcul pourroit fatiguer la plupart des physiciens, il est facile d'imaginer différentes méthodes d'approximation pour l'abréger ; en voici quelques-unes.

Si l'on prend dans notre tableau la vingt-quatrième équation, l'on remarquera, d'après l'expérience & d'après les observations théoriques qui précèdent, que la différence de la densité moyenne électrique entre le vingt-troisième

& le vingt-quatrième globe, est très-considérable, mais que la variation de densité des globes décroît ensuite très-lentement du vingt-troisième au vingt-deuxième globe, & consécutivement du vingt-deuxième au vingt-unième; l'on remarquera de plus que dans cette vingt-quatrième équation, les coefficients décroissent très-rapidement. Ainsi l'on peut sans grande erreur supposer dans cette vingt-quatrième équation, que la densité moyenne de tous les petits globes, depuis le vingt-troisième jusqu'au premier, est égale, & de-là résultera

$$D^{\frac{24}{25}} = D^{\frac{23}{25}} \left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \&c. + \frac{2}{43^2} \right) + 0,013 D.$$

Comme D est plus petit que $D^{\frac{23}{25}}$, on peut négliger $0,013 D$, & l'on aura *

* Pour avoir d'une manière approchée la valeur de cette série très-convergente, l'on peut se servir d'une méthode connue, très-simple, suffisante dans la pratique.

L'on voit que les termes consécutifs ayant le même numérateur, les dénominateurs suivent la progression du carré des nombres impairs; ainsi, si l'on prend un des termes de la progression à la distance m d'un autre terme, tel, par exemple, que $\frac{2}{7^2}$, cette somme intégrée comme formant une ligne courbe ordinaire, donneroit pour la différentielle

$$\frac{2 \, d m}{(7 + 2 m)^2}, \text{ \& pour l'in-}$$

$$\text{tégrale } k = \frac{1}{7 + 2 m}; \text{ ou } k = \frac{1}{7},$$

parce que cette quantité doit s'évanouir quand $m = 0$. Ainsi, si les termes consécutifs de la série différoient peu l'un de l'autre, cette intégrale représenteroit assez exactement la somme de la série. Mais il faut remarquer, pour corriger cette valeur, que, si, fig. 4, $c, c,$

&c. c , représente la courbe que nous venons d'intégrer, dont la base m est divisée en parties égales à l'unité; & si l'on construit sur les divisions de cette base, chaque terme de la série, ces termes seront représentés

par les parallélogrammes $1^2 \overset{1}{c} \overset{1}{b}$,

$2^2 \overset{2}{c} \overset{2}{b}$, &c.; ainsi chaque terme de

la série diffère du terme corres-

pondant dans la différentielle de la

surface de la courbe d'un petit triangle

$\overset{1}{c} \overset{1}{b} \overset{2}{c}$; & si chaque élément $\overset{1}{c} \overset{2}{c}$,

$\overset{2}{c}$, &c. peut être pris pour une ligne

droite, il est facile de voir que la

somme de la série diffère de l'inté-

grale de la courbe, d'une quantité

égale à la somme de tous les petits

triangles $\overset{1}{c} \overset{1}{b} \overset{2}{c}$, $\overset{2}{c} \overset{2}{b} \overset{3}{c}$, &c. plus au

dernier terme de la série, représenté

dans la figure par le parallélogramme

rectangle $m(m+1) \overset{m}{c} \overset{m}{b}$. Mais la

somme de ces petits triangles, plus

la moitié du dernier terme ou du

petit parallélogramme $\overset{m}{c} \overset{m}{b} m(m+1)$,

$$\delta^{24} = \delta^{23} \left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \&c. + \frac{2}{45^2} \right) = 1,44 \delta^{23}$$

l'expérience nous a donné à l'article qui précède,

$\delta^{24} = 1,49 \delta^{23}$, qui diffère, comme l'on voit, très-peu du résultat que fournit la théorie; mais il faut remarquer qu'ici les erreurs de supposition sur lesquelles nous fondons nos calculs, se compensent mutuellement; l'on fait la densité moyenne du vingt-quatrième globe plus petite qu'elle n'est réellement, comme nous l'avons vu *art. IV*; mais l'on fait aussi la densité du vingt-troisième globe trop petite, puisqu'on suppose la même densité depuis le vingt-troisième jusqu'au premier globe, au lieu qu'elle va toujours en décroissant.

Si nous voulons avoir d'une manière approchée les valeurs des densités $\delta^1 \delta^2 \delta^3$ relativement à D , nous supposons que dans les quatre premières équations, les densités sont égales depuis δ^4 jusqu'à δ^{24} , & pour lors les quatre premières équations du tableau se réduiront, *fig. 3*, à

$$\begin{aligned} \text{pour le point de contact } a... D &= \delta^1 + 0,22 \delta^2 + 0,08 \delta^3 + 0,14 \delta^4, \\ \text{pour le point de cont. } a. &0,89 D = -\delta^1 + \delta^2 + 0,22 \delta^3 + 0,22 \delta^4, \\ \text{pour le point de cont. } a. &0,50 D = -0,22 \delta^1 - \delta^2 + \delta^3 + 0,44 \delta^4, \\ \text{pour le point de cont. } a. &0,32 D = -0,08 \delta^1 - 0,22 \delta^2 - \delta^3 + 1,44 \delta^4. \end{aligned}$$

est égale à la moitié du premier terme ou du parallélogramme rec-

tangle $c \ b \ i \ z$; ainsi la somme des termes qui forme la série, est égale à l'intégrale de la courbe, plus à la moitié du premier terme, plus à la moitié du dernier; ainsi dans notre

$$\begin{aligned} \text{exemple : } 1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} \\ + \&c. + \frac{2}{45^2} = 1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} \\ + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{45} \right) + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{45^2} \\ = 1,44. \end{aligned}$$

M m m m ij

Faisons pour ces quatre équations les mêmes opérations que nous avons faites *art. XV*, & nous aurons

$$\delta^1 = 0, 51 D; \delta^2 = 0, 92 D; \delta^3 = 1, 04 D; \delta^4 = 1, 14 D.$$

Les valeurs δ^2 , δ^3 & δ^4 qui diffèrent peu l'une de l'autre, annoncent que, sans une grande erreur, l'on a pu prendre

depuis δ^4 jusqu'à δ^{24} les densités égales, puisque les coefficients décroissent, suivant une série très-convergente; il est clair

cependant que δ^4 , trouvé par cette opération, est un peu trop grand, puisque les densités vont en décroissant depuis

δ^4 jusqu'à δ^{24} , & que dans notre supposition elles sont égales.

Les densités δ^1 , δ^2 , δ^3 , δ^4 , étant déterminées relativement à D , d'après les équations qui précèdent, si nous substituons leurs valeurs dans les cinquième, sixième, septième & huitième équations de notre tableau, & que nous supposions dans ces quatre équations toutes les autres densités

égales, depuis δ^8 jusqu'à δ^{24} , nous pourrions, en suivant le même procédé, déterminer, au moyen de ces quatre nou-

velles équations, les densités approchées de δ^5 , δ^6 , δ^7 , δ^8 ; nous parviendrions ensuite, par la même méthode, à

déterminer par approximation les valeurs de δ^9 , δ^{10} , δ^{11} , δ^{12} , &c. Si d'après ces valeurs ainsi déterminées, nous voulions

avoir celle de δ^1 , δ^2 , δ^3 , δ^4 , d'une manière plus approchée que nous ne les avons eues par la première opération, nous substituerions dans les quatre premières équations,

les valeurs que nous aurions trouvées pour δ^5 , δ^6 , δ^7 , &c. & les quatre premières équations combinées ensemble,

nous donneroient pour lors d'une manière très-approchée

les valeurs de δ^1 , δ^2 , δ^3 , &c., en ayant soin d'y introduire les corrections indiquées au commencement de ce Mémoire.

X V I I I.

De la manière dont le fluide électrique se distribue entre un globe & des cylindres de différentes longueurs, mais de même diamètre.

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

L'ON a électrisé un globe de 8 pouces de diamètre, l'on y a fait toucher une balle de 9 lignes de diamètre, isolée & soutenue par un fil de gomme laque que l'on a introduit à l'ordinaire dans la balance; l'aiguille a été chassée à 28 degrés, avec une force de torsion, tout compris, de 154 degrés.

L'on a fait tout de suite toucher ce globe de 8 pouces par un cylindre de 2 pouces de diamètre & de 30 pouces de longueur, & en retirant le cylindre, l'on a fait toucher le globe par la petite balle de 9 lignes de diamètre que l'on a introduite de nouveau dans la balance; l'aiguille a été chassée à la même distance que la première fois avec une force, tout compris, de 68 degrés.

X I X.

Résultat de cette expérience.

LE globe de 8 pouces avant le contact du cylindre, a une quantité de l'électricité que nous trouvons représentée par 154 degrés; mais il faut remarquer que dans l'intervalle des observations, la quantité d'électricité diminueoit d'un quarantième par le contact de l'air; ainsi pour comparer la première observation à la deuxième, il faut réduire à 150 degrés la quantité d'électricité de la pre-

mière observation. Mais nous trouvons que par le contact du cylindre, ces 150 degrés se réduisent à 68 degrés; ainsi, par le contact, le cylindre a pris 82 degrés de la masse électrique du globe, & ne lui en a laissé que 68 degrés, en sorte que la quantité du fluide électrique du cylindre à celle du globe, est après ce partage, :: 82 : 68, :: 1,21 : 1,00.

Pour avoir actuellement le rapport des densités moyennes du fluide électrique répandu sur la surface du cylindre à la densité du fluide électrique sur la surface du globe, l'on remarquera que le globe ayant 8 pouces de diamètre, & le cylindre 2 pouces de diamètre & 30 pouces de longueur, la surface du cylindre est à celle du globe, :: 60 : 64; ainsi les densités moyennes du fluide électrique répandu uniquement sur la surface des corps, étant égales à la quantité de ce fluide divisée par la surface, la densité moyenne de ce fluide sur la surface du cylindre, sera à celle sur la surface du globe, :: $\frac{1,21}{60} : \frac{1,00}{64}$, :: 1,29 : 1,00.

Par une moyenne prise entre beaucoup d'autres expériences, l'on peut évaluer ce rapport, :: 1,30 : 1,00.

X X.

O N Z I È M E E X P É R I E N C E .

L'ON a déterminé par la même méthode, la quantité d'électricité, que prenoit un cylindre qui n'avoit que la moitié ou même le tiers de la longueur du premier; & l'on a trouvé, en suivant les procédés de l'expérience précédente, que la densité moyenne d'un cylindre de 15 pouces & même de dix pouces de longueur, étoit à la densité moyenne du même fluide sur le globe de 8 pouces, à peu-près dans le même rapport que nous venons de trouver pour le globe de 8 pouces lorsqu'il partage son fluide électrique avec un cylindre de 30 pouces de longueur.

Il faut seulement remarquer que, lorsque le globe est très-gros relativement au cylindre, & que ce cylindre a très-peu de longueur, pour lors la densité moyenne du petit cylindre, relativement à celle du globe, sera beaucoup moins grande que lorsque le cylindre aura beaucoup de longueur; ainsi, par exemple, lorsque j'ai mis en contact avec un globe de 8 pouces, un petit cylindre de 5 à 6 lignes de longueur & de 2 lignes de diamètre, la densité moyenne du fluide électrique sur la surface de ce cylindre, étoit à celle du globe à peu-près dans le rapport de 2 à 1; mais si je mettois en contact avec ce même globe, un cylindre de 2 lignes de diamètre & de plus de 6 pouces de longueur, la densité moyenne du cylindre étoit à celle du globe de 8 pouces, à peu-près :: 8 : 1. L'on verra dans la suite que la théorie s'accorde avec ce résultat.

X X I.

R E M A R Q U E.

IL est facile de sentir que la théorie doit donner à peu-près les résultats qui nous ont été fournis par les expériences qui précèdent; car, si l'on suppose que l'on mette successivement notre globe de 8 pouces en contact avec un cylindre de 30 pouces, & ensuite avec un cylindre de 15 pouces, en électrisant ce globe à chaque fois, de manière qu'après le contact avec les deux cylindres, il conserve dans les deux cas la même quantité d'électricité, il faudra, puisqu'il y a équilibre, que la quantité d'électricité & la distribution sur le cylindre de 15 pouces, soient telles, que son action sur le point de contact avec le globe, soit la même que celle du cylindre de 30 pouces; mais comme l'action est en raison inverse du carré des distances dans le cylindre de 30 pouces, toutes les parties placées au-delà de 15 pouces se trouvent à une distance assez considérable du point de contact, pour que leur action ne soit qu'une quantité très-petite, relativement à l'action

des 15 premiers pouces qui avoient le contact. Ainsi pour conserver l'équilibre dans les deux suppositions, la quantité du fluide électrique du gros globe étant supposée la même, il faut que le fluide sur les premiers 15 pouces produise, dans les deux cas, à peu-près la même action; ainsi, il faut que le fluide électrique y soit à peu-près en égale quantité, & distribué à peu-près de même. Par conséquent, le rapport de la densité moyenne entre le globe & les cylindres, doit être à peu-près le même dans les deux cas.

X X I I.

De la manière dont le fluide électrique se partage entre un globe électrisé & des cylindres de différens diamètres, mais de même longueur.

COMME les expériences destinées à cet article s'exécutent exactement par les mêmes méthodes que celles qui précèdent, je ne rapporterai ici que les résultats.

Le globe de 8 pouces de diamètre placé sur des supports idio-électriques, étant électrisé, l'on a fait toucher ce globe par trois différens cylindres de trente pouces de longueur.

Le premier cylindre a 2 pouces de diamètre; le deuxième cylindre a 1 pouce de diamètre; le troisième cylindre a seulement 2 lignes de diamètre.

L'on détermine d'abord la quantité d'électricité du globe avant qu'il ait été touché par un cylindre; l'on détermine ensuite la quantité d'électricité après qu'il a été touché par ce cylindre; la différence de ces deux quantités d'électricité, donne celle que prend le cylindre dans le contact, qui, comparée avec celle qui reste au globe, donne le rapport entre la quantité d'électricité du globe & la quantité d'électricité moyenne du cylindre après le contact: mais comme le fluide électrique est répandu, comme nous l'avons prouvé, seulement sur la surface des corps, l'on aura la densité de ce fluide, en divisant la quantité par la surface du corps.

En

En suivant cette méthode de réduction, il a résulté de beaucoup d'expériences, que la densité moyenne sur la surface d'un globe de 8 pouces étant représentée par le nombre.....1,00.

Celle d'un cylindre de deux pouces de diamètre

& 30 pouces de longueur seroit représentée par 1,30.

Celle d'un cylindre d'un pouce de diamètre par...2,00.

Celle d'un cylindre de 2 lignes de diamètre par...9,00.

Dans ces résultats, le cylindre de 2 lignes de diamètre n'ayant que la douzième partie du diamètre du premier, la densité moyenne du fluide électrique qui couvre la surface est 7 à 9 fois plus considérable que celle du cylindre de deux pouces de diamètre; d'où il résulte que cette augmentation de densité ne suit pas exactement le rapport des diamètres des cylindres, mais un rapport plus petit. Dans la pratique, il m'a paru que l'on auroit d'une manière suffisamment exacte les densités de différens cylindres, mis en contact avec un globe dont la densité électrique seroit une quantité constante, en les supposant entr'elles en raison inverse de la puissance $\frac{4}{3}$ du diamètre des cylindres; puissance qui varie & paroît s'approcher de l'unité, lorsque l'on compare entr'eux des cylindres dont le diamètre est très petit relativement à celui du globe, & qui est plus petite que l'unité, à mesure que les diamètres du cylindre augmentent relativement à celui du globe. Nous venons en effet de trouver que la densité électrique d'un globe dont le diamètre est 4 fois plus considérable que celui d'un cylindre, étant représentée par D , la densité moyenne du cylindre est égale à $1,30 D$; mais l'on trouve par des expériences analogues à celles dont nous venons de rapporter le résultat, que lorsque le diamètre du globe est seulement deux fois plus grand que celui du cylindre, la densité moyenne du cylindre sera égale à $0,85 D$; si enfin le diamètre du globe est égal à celui du cylindre, nous trouverons la densité électrique moyenne du cylindre égale à $0,60 D$.

X X I I I.

I.^{re} REMARQUE.

LE raisonnement, indépendamment de tout calcul, annonce le résultat qui précède; c'est-à-dire que, d'après le raisonnement, l'on aperçoit que la densité moyenne de deux cylindres de différens diamètres, ne doit pas suivre exactement l'inverse des diamètres, mais un rapport un peu plus petit.

Prenons deux cylindres égaux en longueur, dont les diamètres soient comme 2 : 1, & mettons-les successivement en contact avec un globe électrisé; supposons que la quantité d'électricité primitive de ce globe ait été telle qu'après le contact il ait conservé dans les deux cas la même quantité d'électricité: si l'on divise les cylindres en un grand nombre de parties égales en longueur, pour qu'il y ait équilibre aux points de contact du globe & des cylindres, il faut, puisque l'action du globe est la même dans les deux cas, que chaque partie correspondante, & de la même longueur dans les deux cylindres, ait la même force électrique pour faire équilibre à celle du globe. Mais il faut remarquer que les deux cylindres étant en contact avec le globe par l'extrémité de leurs axes, le fluide électrique répandu sur la surface des deux cylindres agira, dans les parties qui avoisinent le globe, plus directement sur le point de l'axe en contact avec le globe dans un cylindre d'un petit diamètre, que dans un cylindre d'un grand diamètre; ainsi il ne faudra pas pour l'équilibre, précisément la même quantité de fluide électrique sur la surface d'un cylindre d'un petit diamètre, que sur la surface d'un cylindre d'un plus grand diamètre; ainsi la densité sur la surface du globe étant supposée la même après le contact des deux cylindres, la densité moyenne du fluide électrique sur la surface du petit cylindre, ne fera pas à celle d'un plus grand cylindre tout-à-fait en raison inverse du diamètre des cylindres, &

la variation de ce rapport sera d'autant plus grande, que le diamètre de cylindre sera plus grand relativement à celui du globe.

XXIV.

Deuxième remarque.

IL se présente ici une observation très-intéressante, c'est celle de l'action des pointes, ou des cylindres d'un très-petit diamètre appliqués par leur extrémité à un corps électrisé. L'expérience apprend qu'un corps ainsi armé d'une pointe, perd rapidement la plus grande partie de son électricité. Les résultats qui précèdent rendent raison de ce phénomène.

Nous trouvons en effet par l'expérience, qu'un cylindre de deux lignes de diamètre & de 30 pouces de longueur, mis en contact avec un globe de 8 pouces, s'enveloppe d'un fluide électrique dont la densité moyenne est 9 fois plus considérable que celle du globe. Mais nous avons vu plus haut, *art. VII, quatrième expérience*, que lorsqu'un cylindre est électrisé & terminé par une demi-sphère du même diamètre que le cylindre, la densité du fluide électrique à l'extrémité de l'axe du cylindre étoit à celle sur le milieu du cylindre, :: 2,30 : 1,00. Ce rapport doit même être plus grand, ainsi que le raisonnement & l'expérience l'indiquent, lorsque ce cylindre a beaucoup de longueur & qu'une de ses extrémités est en contact avec un gros globe; ainsi en supposant le cylindre de 2 lignes de diamètre, arrondi à son extrémité en demi-sphère, la densité électrique à l'extrémité de l'axe de ce cylindre, seroit à celle sur la surface du globe, de 8 pouces, comme neuf fois 2,30 est à 1,00, comme 20,7 est à 1,0 : mais comme l'air est un corps d'une idio électricité imparfaite dont toutes les parties mobiles ne résistent à la communication & à la pénétration du fluide électrique, qu'autant qu'elle n'est portée qu'à un très-petit degré de densité, il en résulte

qu'en faisant toucher l'extrémité de notre cylindre de 2 lignes de diamètre, au globe de 8 pouces chargé d'électricité, le fluide électrique doit s'échapper par l'extrémité du cylindre avec d'autant plus de rapidité, que la densité électrique sera plus forte; & cette densité électrique étant encore très-grande à l'extrémité du cylindre, dans le temps qu'elle sera presque insensible sur la surface du globe, le globe doit se dépouiller très-promptement de presque toute son électricité. Ceci ne contrarie en rien la loi que nous avons trouvée dans notre troisième Mémoire, qui nous adonné le décroissement successif de la densité des petits globes proportionnel à la densité, parce que, ainsi que nous l'avons dit pour lors, cette loi n'a lieu que lorsque la densité électrique est peu considérable.

X X V.

De la manière dont le fluide électrique se partage entre des globes de différens diamètres, & un même cylindre.

EN suivant dans les expériences & dans leur réduction les mêmes méthodes que dans les articles qui précèdent, l'on trouvera que, lorsque les globes sont d'un diamètre beaucoup plus grand que celui du cylindre, comme par exemple huit fois & au-delà, les densités électriques des différens globes en contact avec le cylindre étant supposées égales à une même quantité D , les densités du fluide électrique qui enveloppera le cylindre seront entr'elles comme le diamètre des globes; en sorte, par exemple, que si l'on prend notre globe de 8 pouces en contact avec un cylindre d'un pouce, nous avons vu à l'article *XXII*, que la densité du globe étant D , celle du cylindre étoit à peu-près $2 D$: mais si au lieu d'un globe de 8 pouces l'on mettoit en contact avec le même cylindre un globe dont le diamètre seroit de 24 pouces, & dont la densité du fluide électrique répandu sur la surface de ce globe, seroit, comme dans le premier cas, égale à D , la densité électrique moyenne du fluide

électrique qui envelopperoit le cylindre , seroit à peu-près égale à $6 D$.

X X V I.

Résultat des Expériences qui précèdent.

Si d'après les expériences qui précèdent , l'on veut avoir le rapport entre la densité électrique du fluide répandu sur la surface d'un globe & celle d'un cylindre d'un diamètre quelconque en contact par son extrémité avec ce globe, il suffira d'observer que puisque pour un même globe & différens cylindres , d'après l'article *XXII* , les densités électriques des différens cylindres seront entr'elles en raison inverse de la puissance $\frac{4}{3}$ des diamètres du cylindre ; puissance qui se rapproche beaucoup de l'unité, lorsque le globe a un diamètre beaucoup plus grand que celui du cylindre , pour différens globes & le même cylindre, si le diamètre des globes est beaucoup plus grand que celui du cylindre, la densité du cylindre suivra le rapport du diamètre des globes : en supposant D la densité du globe, R son rayon, δ la densité moyenne du cylindre, r son rayon, l'on aura généralement

$$\delta = \frac{m D R}{r^{\frac{4}{3}}} , \text{ ou } \frac{m D R}{r} \text{ lorsque } R \text{ est beaucoup plus}$$

grand que r . Dans cette équation, m est un coefficient constant, que l'on déterminera facilement par l'expérience.

Si en effet l'on observe que lorsque nous avons mis ; article *XXXIII*, un globe de 4 pouces de rayon en contact avec un cylindre de 30 pouces de longueur & de 2 lignes de diamètre, nous avons eu pour la densité moyenne du fluide électrique qui enveloppe le cylindre $\delta = 9 D$; on

verra que dans cet exemple notre équation $\delta = \frac{m D R}{r}$,

en substituant à la place de $\frac{R}{r}$ le nombre 48, donnera

$$\delta = 48 m D = 9 D ; \text{ d'où résulte } m = \frac{9}{48}.$$

Application de ce résultat au cerf-volant électrique.

LORSQUE par un temps orageux l'on élève un cerf-volant, dont la corde est conductrice ou treffée avec un fil de métal, l'on fait qu'au moment du passage d'un nuage chargé de fluide électrique dans la région où se trouve le cerf-volant, si l'extrémité inférieure de la corde est isolée, ou attachée à un corps idio-électrique, la corde du cerf-volant lance des étincelles électriques de tout côté, & ces étincelles se portent avec la plus grande violence & le plus grand danger sur tous les corps conducteurs qui avoisinent cette corde: il est facile de voir que ce phénomène résulte nécessairement des expériences qui précèdent & de la formule que l'on en a tirée.

Supposons, pour servir d'exemple, que le nuage chargé de fluide électrique a la forme d'un globe de mille pieds de rayon; que la corde du cerf-volant a une ligne de rayon; que δ est la densité moyenne sur la surface de la corde:

l'équation $\delta = \frac{m D R}{r}$ donnera ici $\delta = \frac{2}{48} 1000. 12^2 D$

$= 27000 D$. Mais nous avons vu, *art. VII, 4.^e expérience*; que la densité électrique, à l'extrémité d'un cylindre électrisé, terminé en demi-sphère, étoit à la densité moyenne du cylindre, :: 2,30 : 1,00. Ainsi la densité électrique à l'extrémité de la corde, seroit égale à 62000 D , ou soixante-deux mille fois plus grande que la densité électrique du fluide qui est supposé envelopper le nuage. Il doit donc nécessairement arriver, comme il arrive effectivement, que le fluide électrique condensé à ce degré de densité le long de la corde du cerf-volant, étincelle de tout côté, sur-tout vers l'extrémité de cette corde ou vers son attache inférieure, & se porte avec violence à des distances souvent de plusieurs pieds sur tous les corps conducteurs qui avoisinent.

XXVIII.

Détermination théorique de la densité des différens points & de la densité moyenne d'un cylindre mis en contact par son extrémité avec un globe d'un plus grand diamètre que ce cylindre.

Cylindres de différens diamètres & de même longueur.

LE moyen d'approximation le plus simple pour déterminer le rapport entre la densité électrique de la surface du globe & celle du cylindre, lorsque le cylindre a beaucoup de longueur, est de diviser toute la longueur du cylindre en parties égales à son diamètre, & de regarder chaque partie comme un petit globe du même diamètre, de chercher, comme l'on a fait plus haut, *article XVII*, les conditions d'équilibre dans tous les points de contact. Voici deux autres méthodes d'approximation.

XXIX.

Première Méthode.

PREMIER EXEMPLE.

Cylindre de 30 pouces de longueur, 2 pouces de diamètre, en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces de diamètre.

Si je veux déterminer la densité moyenne ou la densité du fluide électrique sur le milieu d'un cylindre de 2 pouces de diamètre & de 30 pouces de longueur, en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces de diamètre, je supposerai ce cylindre terminé par deux demi-sphères, & divisé en quinze parties égales au diamètre du cylindre; je calculerai l'action à chaque division, comme si la ligne étoit formée de quinze petits globes de 2 pouces de diamètre

chacun. D'après cette supposition, les quinze premières équations de notre tableau nous donneroient la densité de chaque petit globe qui forme la ligne : mais si l'on veut avoir la densité moyenne électrique approchée, il faut déterminer cette densité vers le milieu du cylindre ou vers le huitième globe. Pour simplifier le calcul, il faut observer que, d'après notre tableau, si l'on ajoute ensemble les huit

premières équations, le coefficient de δ sera plus grand que le coefficient des termes qui en sont éloignés ; que d'ailleurs la variation de la densité d'un globe à l'autre vers le milieu de la ligne est peu considérable. Si d'après ces réflexions, l'on réunit ensemble les huit premières équations,

l'on aura pour tous les termes qui suivent δ , les séries suivantes :

$$\begin{aligned} \delta (1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \&c. + \frac{2}{15^2}) &= \delta^8 (1,30 + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{15^2}) \\ \delta (\dots \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \&c. + \frac{2}{17^2}) &= \delta^9 (0,30 + \frac{1}{7} - \frac{1}{17} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{17^2}) \\ \delta (\dots \dots \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \&c. + \frac{2}{19^2}) &= \delta^{10} (0,08 + \frac{1}{7} - \frac{1}{19} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{19^2}) \\ \delta (\dots \dots \dots \frac{2}{7^2} + \&c. + \frac{2}{(21)^2}) &= \delta^{11} (+ \frac{1}{7} - \frac{1}{21} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{21^2}) \\ \delta (\dots \dots \dots \frac{2}{9^2} + \&c. + \frac{2}{23^2}) &= \delta^{12} (\dots \frac{1}{9} - \frac{1}{23} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{23^2}) \\ \delta (\dots \dots \dots \frac{2}{11^2} + \&c. + \frac{2}{25^2}) &= \delta^{13} (\dots \frac{1}{11} - \frac{1}{25} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{25^2}) \\ \delta (\dots \dots \dots \frac{2}{13^2} + \&c. + \frac{2}{27^2}) &= \delta^{14} (\dots \frac{1}{13} - \frac{1}{27} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{27^2}) \\ \delta (\dots \dots \dots \frac{2}{15^2} + \&c. + \frac{2}{29^2}) &= \delta^{15} (\dots \frac{1}{15} - \frac{1}{29} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{29^2}) \end{aligned}$$

Tous les premiers termes de cette équation représentent la somme des coefficients des huit premières équations du tableau ; le second terme à droite représente chaque série qui

qui forme ces coefficients, sommée d'après la méthode que nous avons expliquée dans la note du quinzième article.

Actuellement la variation de la densité des petits globes qui avoisinent le globe δ étant peu considérable, & les coefficients diminuant rapidement à mesure que l'on s'éloigne de δ , l'on peut, par approximation, prendre toutes les densités égales depuis δ jusqu'à δ^{15} , ce qui donnera pour la somme de nos séries l'équation définitive,

$$\delta^{1,68} + \frac{3}{7} + \int \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. + \frac{1}{15} \right) - \int \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \&c. + \frac{1}{29} \right) + \frac{3}{7^2} + \int \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c. + \frac{1}{29^2} \right) + \frac{1}{15^2}.$$

L'on sommerá les séries par approximation, soit en prenant des valeurs moyennes, que l'on multipliera par le nombre des termes, soit en suivant, comme nous allons le faire, la méthode que nous avons donnée, *note de l'article XV*, qui donnera

$$\int \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{2\mu} \log. \left(\frac{15}{7} \right) + \frac{1}{14} + \frac{1}{30},$$

où μ est le module du système logarithmique : par la même méthode $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \&c. + \frac{1}{29} \right) = \frac{1}{2\mu} \log. \frac{29}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{58}$; l'on aura de plus

$$\int \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c. + \frac{1}{29^2} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{29} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{29^2};$$

ainsi en réunissant toutes ces valeurs, & faisant μ égal à 0,434, module du système logarithmique des tables ordinaires, la somme de tous les coefficients des huit premières équations de notre tableau, depuis δ jusqu'à δ^{15} , donnera

2,40 δ .

Mém. 1788.

O o o o

Pour compléter l'équation, il faut ajouter ensemble tous les termes qui, dans les huit premières équations précèdent $\overset{8}{D}$, depuis $\overset{7}{D}$ jusqu'à $\overset{1}{D}$. L'on remarquera, en examinant le tableau, que si toutes les densités étoient égales depuis $\overset{7}{D}$ jusqu'à $\overset{1}{D}$, tous ces termes se détruiraient mutuellement, le coefficient positif de $\overset{7}{D}$ étant égal au coefficient négatif de $\overset{1}{D}$, & ainsi alternativement: l'on remarquera de plus, qu'excepté ces coefficients de $\overset{7}{D}$ & de $\overset{1}{D}$, les autres sont très-petits; que d'ailleurs la variation de la densité d'un globe à l'autre, ne croît rapidement que du premier globe dont la densité est $\overset{1}{D}$, au second globe dont la densité est $\overset{2}{D}$. Ainsi l'on peut, sans une grande erreur, supposer que tous les termes entre $\overset{7}{D}$ & $\overset{1}{D}$ se détruisent mutuellement, & la valeur très-approchée de la somme de tous les termes qui précèdent $\overset{8}{D}$ dans les huit premières équations, sera représentée par

$$(\overset{7}{D} - \overset{1}{D}) \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \&c. + \frac{2}{13^2} \right) = 0,40 (\overset{7}{D} - \overset{1}{D});$$

mais, d'après les observations qui précèdent, $\overset{7}{D}$ peut être pris pour $\overset{8}{D}$. Nous avons trouvé, *article XIV*, par approximation, $\overset{1}{D} = 0,52 D$.

Ainsi, en prenant la somme des huit premières équations de notre tableau, nous aurons d'une manière approchée l'équation,

$$D \left(1 + \frac{2 R^2}{(R+2r)^2} + \frac{2 R^2}{(R+4r)^2} + \&c. + \frac{2 R^2}{(R+14r)^2} \right) \\ + 0,21 D = 2,80 D.$$

Comme dans nos expériences & dans la supposition de cet exemple, $R = 4 r$, il ne sera pas très-long de calculer exactement la somme du premier terme; mais si on la détermine par la méthode d'approximation de l'article XIV, ce qui est très-suffisant, l'on aura dans notre exemple,

$$D \left(1 + \frac{16}{6} - \frac{16}{18} + \frac{16}{6^2} + \frac{16}{18^2} - \right) + 0,21 D \\ = 3,48 D = 2,80 D;$$

d'où résulte finalement $D = 1,24 D$, quantité que nous avons trouvée, par les expériences, égale à $1,30 D$; ainsi la théorie & l'expérience ne diffèrent entre elles que par des quantités trop petites, pour que les opérations approchées qui précèdent puissent les évaluer.

X X X.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Cylindre de trente pouces de longueur, deux lignes de diamètre, en contact par son extrémité avec un globe de huit pouces.

Si je veux comparer actuellement un cylindre de 30 pouces de longueur & de 2 lignes de diamètre, avec un globe de 8 pouces, à la place du cylindre je peux supposer une ligne formée de 180 petits globes de 2 lignes de diamètre, en contact par son extrémité avec ce globe. Ainsi, en suivant, d'après cette supposition, la méthode de l'exemple qui précède, je formerai une table de 180 équations analogue à celle de cet exemple; & en prenant la somme des 91 premières équations, j'aurai pour tous

O o o o ij

les termes qui suivent $\overset{91}{\delta}$, la quantité

$$\overset{91}{\delta} \left(1,68 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{1}{181} + \int \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. + \frac{1}{181} \right) \right. \\ \left. - \int \left(\frac{1}{181} + \frac{1}{183} + \&c. + \frac{1}{359} \right) + \int \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c. + \frac{1}{359^2} \right) \right):$$

en prenant les sommes des séries, d'après la méthode expliquée à la note de l'article XVII, cette quantité se réduira à $3,70 \overset{91}{\delta}$.

Si l'on calcule actuellement la somme des termes qui précèdent $\overset{91}{\delta}$, dans le même membre d'équation, on la trouvera égale à $0,46 \left(\overset{90}{\delta} - \overset{1}{\delta} \right)$, en se conformant aux observations de l'article qui précède : mais $\overset{90}{\delta}$ peut être pris égal à $\overset{91}{\delta}$, & $\overset{3}{\delta}$ peut être sans erreur sensible pour notre opération, calculé d'après les deux premières équations qui formeront le tableau : en supposant les densités égales depuis $\overset{2}{\delta}$ jusqu'à $\overset{180}{\delta}$, ces deux premières équations seroient,

$$1^{re} \text{ équat. } D = \overset{1}{\delta} + \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \&c. + \frac{2}{359^2} \right) \overset{2}{\delta} = \overset{1}{\delta} + 0,46 \overset{2}{\delta}.$$

$$2^{e} \text{ éq. } 1,84 D = -\overset{1}{\delta} + \left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \&c. + \frac{2}{359^2} \right) \overset{2}{\delta} = -\overset{1}{\delta} + 1,46 \overset{2}{\delta},$$

d'où résulte $\overset{2}{\delta} = 48, D \& \overset{1}{\delta} = 0,32 D$. Ainsi $0,46 \overset{1}{\delta} = 0,15 D$; ainsi, le second membre de la somme des 91 premières équations, seroit égal à $(3,70 + 0,46) \overset{91}{\delta} - 0,15 D$.

Reste à calculer la somme du premier membre formé de l'addition des 91 premiers termes qui expriment l'action du gros globe; cette somme, d'après ce que nous avons dit à l'article qui précède, fera représentée par la formule,

$$D(1 + (48)^2 \left(\frac{2}{(48 + 2)^2} + \frac{1}{(48 + 4)^2} + \&c. + \frac{2}{225^2} \right)),$$

quantité égale d'après la méthode d'approximation de la note de l'article XIV à

$$D(1 + (48)^2 \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{228} + \frac{1}{50^2} + \frac{1}{228^2} \right)) = 38,18 D.$$

Ainsi en comparant ce terme avec le deuxième membre,

nous aurons $(38,18 + 0,15) D = 4,16^{\frac{91}{100}}$, d'où résulte finalement $\delta^{\frac{91}{100}} = 9,21 D$.

Nous avons trouvé, *article XXIV*, qu'en mettant un globe de 8 pouces de diamètre en contact avec un cylindre de 2 lignes de diamètre & de 30 pouces de longueur, si la densité du globe, après le contact, étoit D , la densité moyenne du cylindre étoit, d'après l'expérience, égale à $9,00 D$. Ainsi, l'expérience dans cet exemple s'accorde avec la théorie aussi-bien que l'on peut l'attendre dans des recherches de ce genre : nous avons trouvé le même accord dans l'exemple qui précède entre la théorie & l'expérience, quoique le cylindre soit douze fois plus gros que dans l'expérience actuelle ; ainsi la vérité des deux résultats se confirme l'un par l'autre.

XXXI.

Cylindres de différentes longueurs en contact avec le même globe.

Nous avons trouvé à l'article XXIX, que par la théorie l'on avoit la densité moyenne d'une ligne de 30 pouces de longueur, formés avec quinze petits globes de 2 pouces de diamètre en contact avec un globe de 8 pouces, égale à $1,24 D$, où D exprime la densité de la surface du globe après le contact ; mais nous avons trouvé, *remarque de l'article XIV*, qu'en mettant seulement quatre globes de 2 pouces de diamètre en contact avec le même globe de

8 pouces de diamètre, la densité de la surface du globe étant D , la densité moyenne pour la ligne des quatre globes, étoit par la théorie, égale à $1,21 D$; ainsi la théorie nous apprend, que quelle que soit la longueur d'un cylindre ou d'une ligne formée par des petits globes du même diamètre que ce cylindre, la densité moyenne est à peu près égale; résultat conforme à celui donné par la dixième & la onzième expérience.

X X X I I.

R E M A R Q U E.

IL faut seulement remarquer, que lorsque les cylindres ont très-peu de longueur, & sont d'un très-petit diamètre relativement à celui du gros globe, pour lors le petit cylindre prend une densité moyenne beaucoup plus petite que celle que prendroit un cylindre du même diamètre, mais d'une plus grande longueur. Pour se convaincre de cette vérité, calculons la densité de deux petits globes de 2 lignes seulement de diamètre chacun, formant une longueur de 4 lignes en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces de diamètre, cette supposition fourniroit les deux équations :

$$1.^{\text{re}} \text{ équation. } D = \overset{1}{\delta} + 0,22 \overset{2}{\delta}.$$

$$2.^{\text{me}} \text{ équation. } 1,84 D = \overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta}.$$

Il résulte de ces deux équations, $\overset{1}{\delta} = 0,48 D$, & $\overset{2}{\delta} = 2,36 D$; ainsi la densité moyenne du système de 4 lignes de longueur, formée par les deux petits globes de 2 lignes chacun de diamètre, seroit égale à $\frac{(0,48 + 2,36) D}{2}$

$= 1,42 D$, quantité que nous avons trouvée à l'article XXX, égale à $9,21 D$ pour une ligne du même diamètre, mais de 30 pouces de longueur.

XXXII.

REMARQUE.

CETTE théorie confirmée par l'expérience, d'après les méthodes que nous avons expliquées plus haut, rend raison d'un résultat électrique connu depuis long-temps. L'on fait que, lorsqu'un globe électrisé est armé d'une aiguille ou d'une pointe, il perd rapidement son électricité, mais beaucoup moins promptement lorsque cette aiguille est très-courte. Voici l'explication de ce phénomène; la force coërcitive que l'air oppose à l'écoulement du fluide électrique étant limitée, plus la densité de ce fluide sera grande, plus le fluide s'écoulera rapidement. Ainsi, dans notre exemple, lorsque l'aiguille a 30 pouces de longueur & 2 lignes de diamètre, la densité moyenne est égale à $9,21 D$; mais elle est seulement égale à $1,42 D$, lorsque le cylindre a 4 lignes de longueur; ainsi le fluide électrique doit s'échapper avec beaucoup plus de rapidité par la première aiguille que par la deuxième.

XXXIV.

Deuxième méthode d'approximation pour déterminer la variation de la densité électrique le long de la surface d'un cylindre en contact par son extrémité avec un globe.

IL est facile, d'après les observations qui précèdent, de trouver différens moyens d'approcher aussi près que l'on voudra, par le calcul, de la variation de la densité électrique le long de la surface d'un cylindre. Pour fixer l'imagination sur un exemple, prenons notre cylindre, *figure 7*, de deux pouces de diamètre & 30 pouces de longueur, & supposons-le comme dans cette figure, en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces. D'après tout ce que nous avons dit dans ce Mémoire & dans celui qui

précède, il est facile de voir que la densité du fluide électrique est nulle dans le cercle de contact $a' a$ du cylindre & du globe ; que pour le globe, la densité électrique croît depuis le point a jusqu'au pôle opposé f' où est son *maximum* ; que l'accroissement de cette densité rapide sur les 25 à 30 premiers degrés, en partant du point a , se ralentit ensuite considérablement, en sorte que l'accroissement de la densité électrique est presque insensible depuis le point μ de l'équateur jusqu'au pôle f' : dans la surface cylindrique, la densité est nulle ou au moins insensible au point a ; elle croît ensuite rapidement sur les deux ou trois premiers pouces, moins rapidement ensuite à, mesure que l'on s'approche du milieu du cylindre, où se trouve à peu-près le *maximum* de cet accroissement ; la variation de l'accroissement de la densité augmente ensuite assez lentement jusqu'à deux ou trois pouces de l'extrémité, mais très-rapidement sur ces deux derniers pouces. La distance, *figure 7*, de la ligne ponctuée au globe & au cylindre, indique à peu-près le lieu géométrique de la densité électrique : en prenant le cercle $f k f'$, & la ligne

$a^5 a$ pour axe, les ordonnées $k^1 i^1, n^1 g^1, f'^1 \phi^1 ; a^1 m^1, a^1 m^1,$
 $a^3 m^3, \&c.$ représenteront les densités.

Si l'on divise actuellement le cylindre, *figure 7*, en un nombre quelconque de parties égales ou inégales, telles que $f^1 1 ; 1^2, 2^2 M, \&c.$ en observant de faire très-courtes les parties où la variation de la densité doit être considérable, il sera facile de former à la place de la courbe

$a^1 m^1 m^2 m^3 m^4 m^5$ un polygone, en joignant les points $a, m,$

$m^2, m^3, m^4, \&c.$ par des lignes droites. Dans ce polygone les densités croîtront d'un point à un autre, suivant une ligne droite, & le polygone aura autant de côtés que le cylindre de divisions ; ainsi cherchant à chaque division l'état d'équi-

libre

libre sur l'axe entre l'action de toutes les portions du cylindre, & l'action du globe qui le termine, nous aurons autant d'équations que le polygone a de côtés. Il sera par conséquent possible, & même facile, ainsi qu'on va le voir, de déterminer, relativement à l'axe, l'inclinaison de chaque côté du polygone, & par conséquent d'avoir la variation approchée de la densité.

X X X V.

Voici les principes du calcul pour chaque partie du cylindre : une portion (*figure 6*) $B P$ d'une surface cylindrique agissant sur un point b de son axe, suivant l'inverse du carré des distances, la densité au point Q étant $Q d = \delta$, & croissant ensuite suivant la ligne $d M$, l'on demande l'action de cette surface sur le point b .

Soit $b B = a$; $b p = x$; $B p = x - a$, $\frac{p m}{B p} = n$; que le rayon du globe soit R , celui du cylindre r , le rapport de la circonférence au rayon égal π ; l'on aura pour l'action de la zone de superficie élémentaire qui répond à $p p'$, cette action évaluée dans la direction de l'axe, la quantité

$$\begin{aligned} & [\delta + n(x - a)] \frac{\pi r x dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\delta - na) \pi r dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{\pi r x^2 dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} = (\delta - na) \frac{\pi r x dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi r x^2 dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{\pi r dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi r dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}}, \text{ dont l'intégrale} \end{aligned}$$

prise de manière qu'elle s'évanouisse, quand $x = a$ donnera, μ étant le module logarithmique;

$$\begin{aligned} & \pi r \delta \left[\frac{1}{(rr + aa)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(rr + xx)^{\frac{1}{2}}} \right] + \pi r n \left[\frac{a - x}{(rr + xx)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ & + \frac{\pi \pi r}{\mu} \log. \frac{x + (rr + xx)^{\frac{1}{2}}}{a + (rr + aa)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

JE suppose à présent que je veux d'abord déterminer la variation de la densité vers le milieu de mon cylindre, qui dans notre exemple a 2 pouces de diamètre & 30 pouces de longueur; si, *fig. 7*, je fais passer par le point m , que je suppose répondre au milieu de mon cylindre, une ligne $d m d'$ parallèle à l'axe du cylindre, il sera facile de voir d'après toutes les observations qui précèdent, que la variation de la densité vers le milieu a suit à peu-près une ligne droite jusqu'à une assez grande distance de ce point; qu'ainsi l'action des points éloignés diminuant comme la raison inverse du carré des distances, il ne peut résulter qu'une petite erreur de la supposition que la ligne qui exprime la densité, s'étend en ligne droite jusqu'aux extrémités du cylindre.

D'après cette réflexion, il sera facile d'appliquer la formule à notre exemple, en remarquant qu'ici $a = 0$, & que la moitié de la longueur du cylindre représentée par x est beaucoup plus grande que r ; ainsi l'on aura pour la valeur de l'action de la moitié du cylindre $M g$ sur le point M , la quantité $\pi r \delta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) - \pi r n + \frac{n \pi r}{\mu} \log. \frac{2x}{r}$. Pour avoir l'action contraire de l'autre moitié du cylindre $M f$, il faut faire la quantité n négative, puisque la densité décroît de a vers a , ce qui donnera

$\pi r \delta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) + \pi r n - \frac{n \pi r}{\mu} \log. 2x$; ainsi l'action de tout le cylindre dans la direction $M f$ donnera $\frac{2 n \pi r}{\mu} \log. \frac{2x}{r} - 2 n \pi r$; quantité qu'il faut égaler à l'action du globe C , qui, puisque x est la moitié de la

longueur du cylindre, sera $\frac{2 \pi D R^2}{(R+x)^2}$; d'où résulte finalement

l'équation $\frac{2 \pi D R^2}{(R+x)^2} = 2 n \pi r \log. \frac{2 x}{r} - 2 n \pi r$, qui

exprimera la variation $n r$ de la densité au milieu du cylindre, sur une longueur égale au rayon. Dans notre exemple, le diamètre du cylindre est de 2 pouces, sa longueur de 30 pouces; le rayon du globe est de 4 pouces: ainsi $R = 4$, $r = 1$, $x = 15$, d'où résulte $n = 0,018 D$; c'est-à-dire que, sur un pouce de longueur, la densité électrique croît à peu-près vers le milieu du cylindre, de la cinquantième partie de celle du globe.

Si nous prenons pour second exemple le cylindre d'une ligne de rayon, & de 30 pouces de longueur, dont nous avons déterminé la densité moyenne par nos expériences, pour lors $R = 48 r$, $x = 180 r$, ce qui donne $n = 0,09 D$; c'est-à-dire que, dans un cylindre dont le diamètre seroit douze fois plus petit que le précédent, la densité sur une ligne de longueur croîtroit, au milieu du cylindre, de $\frac{1}{1000}$, & sur 12 lignes de longueur; elle croîtroit par conséquent six fois plus pour le cylindre de 2 lignes de diamètre que pour le cylindre de 2 pouces de diamètre.

Enfin, si nous prenons pour le rayon du cylindre un centième de ligne, nous trouverons que sur un pouce de longueur, la densité croît cinquante fois davantage que sur un cylindre d'une ligne de rayon, & par conséquent trois cents fois plus que sur un cylindre de 2 pouces de diamètre.

Si les cylindres avoient une longueur beaucoup plus considérable que dans l'exemple qui précède, pour lors les variations de la densité au milieu des deux cylindres, pour une même longueur d'un pouce, seroient entre elles dans un rapport plus approché de l'inverse des diamètres des deux cylindres; ainsi, par exemple, si la longueur des cylindres étoit de 300 pouces, notre formule nous donneroit au milieu des

cylindres, la variation de la densité du cylindre d'une ligne de rayon à celle du cylindre d'un pouce de rayon, à peu-près :: 8 : 1 ; rapport qui étoit :: 6 : 1, lorsque la longueur des cylindres n'étoit que de 30 pouces.

X X X V I I.

Si l'on veut, d'après la méthode des deux articles qui précèdent, déterminer d'une manière approchée les variations de la densité pour les différens points de notre

cylindre $a^5 a$, *fig. 7*, il faut diviser en différentes parties ce cylindre, & supposer que dans chaque partie la variation de la densité suit une ligne droite. Pour ne pas s'éloigner dans cette supposition beaucoup de la vérité,

il faut que la première partie $a^1 a$ soit très-courte. Ainsi le cylindre ayant 2 pouces de diamètre, je donnerois à

cette première partie $a^1 a$, 2 pouces de longueur; je don-

nerois à la deuxième $a^{12} a$, 4 pouces de longueur, à la troi-

sième $a^{23} a$, 9 pouces; ce qui me conduit au milieu du cylindre. Je prends pour la variation de la densité, depuis

le milieu a^3 du cylindre jusqu'à son extrémité a^5 , celle qui m'a été donnée tout-à-l'heure; je cherche ensuite les conditions d'équilibre de ces quatre parties de cylindre relativement au point de contact f , & aux points 1 & 2 de l'axe du cylindre, ce qui fournit trois équations qui, combinées ensemble, déterminent la variation des densités à chaque division du cylindre, la courbe des densités considérée comme un polygone; & comme la densité du fluide électrique est nulle au point de rencontre du globe & du cylindre, il sera facile d'en conclure d'une manière approchée la densité électrique sur tous les points de la surface du cylindre.

L'on trouvera à la fin de ce Mémoire une application assez détaillée de cette méthode.

XXXVIII.

Détermination théorique du rapport des densités électriques moyennes de deux cylindres d'un très-petit diamètre, d'une très-grande longueur, en contact par leur extrémité avec un gros globe.

Si l'on cherchoit la variation au milieu de deux cylindres, dont la longueur seroit $2a$, que nous supposons d'un diamètre différent, mais très-petit, relativement à celui du globe, l'on auroit d'après les formules qui précèdent, article XXXVI,

$$\frac{2 D R}{(R + a)^2} = 2 \pi r \left(\frac{\text{Log. } 2a}{\mu} - 1 \right);$$

mais il faut remarquer que, pour tout cylindre de la même longueur, mais d'un autre diamètre, il n'y auroit dans cette formule que les quantités n & r qui varieroient, le diamètre du globe R , ainsi que la moitié de la longueur a des cylindres, étant supposés les mêmes; d'où résulte

que si n représente la variation de la densité au milieu

du cylindre dont le rayon est r , & si n représente la variation de la densité au milieu du cylindre dont le rayon

est r , les longueurs des deux cylindres étant les mêmes, l'on aura

$$n r = n r, \text{ ou } \frac{n}{r} = \frac{n}{r}; \text{ c'est-à-dire que les varia-}$$

tions des densités au milieu des deux cylindres, seront entre elles comme l'inverse des rayons.

Il est facile actuellement de sentir que cette même

proportion doit avoir lieu, si l'on divise les deux cylindres égaux en longueur, dans un nombre de parties réciproquement égales, & que l'on compare dans les deux cylindres les parties correspondantes chacune à chacune. En effet, l'on conçoit d'après les principes sur lesquels sont fondés tous les calculs qui précèdent, que si dans un des cylindres l'on a pour exprimer la variation à une distance quelconque

a' du globe, la formule $\frac{2 D R^2}{(R + a')^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{r} A'$,

A' étant une fonction de a' , l'on aura, en prenant un point à égale distance du globe dans le deuxième cylindre, dont la longueur est divisée en un nombre de parties égales à

celles du premier, la formule $\frac{2 D R^2}{(R + a')^2} = \frac{2}{n} \frac{2}{r} A'$,

la quantité A' étant la même, puisque la distance a & le nombre des divisions sont les mêmes; ainsi pour chaque

point correspondant, $\frac{\frac{1}{n} \frac{1}{r}}{\frac{2}{n} \frac{2}{r}}$ sera une même quantité; ainsi

les variations de la densité pour des points à égale distance du globe, seront dans les deux cylindres en rayon inverse du rayon des cylindres, & par conséquent la somme de ces variations ou les densités moyennes de deux cylindres d'un très-petit diamètre en contact avec un gros globe, sont en raison inverse des rayons, ainsi qu'é l'expérience nous l'a appris.

X X X I X.

De deux corps conducteurs placés à une distance assez grande l'un & l'autre, pour que l'électricité ne puisse pas se communiquer à travers la couche d'air qui les sépare.

DANS les articles qui précèdent, nous avons déterminé

la manière dont le fluide électrique se distribue entre deux corps conducteurs en contact; nous allons actuellement chercher l'état électrique des différentes parties d'un corps non électrisé présenté à un corps électrisé à une distance assez grande, pour que l'électricité du corps électrisé ne puisse pas se communiquer au corps non électrisé à travers la couche d'air qui les sépare. L'on fait depuis long-temps, que dans cette disposition le corps non électrisé, s'il est isolé, donnera par la seule influence du corps électrisé, des signes d'électricité contraire à celle du corps électrisé, dans les parties voisines de ce corps, & des signes de la même nature que le corps électrisé dans les parties qui en sont le plus éloignées. L'on fait encore que si le corps non électrisé présenté à un corps électrisé n'est pas isolé, il donnera sur tous les points de sa surface des signes d'électricité contraire à celle du corps électrisé.

L'évaluation de l'état électrique des différentes parties d'un corps non électrisé, isolé ou non, mais présenté à quelque distance d'un corps électrisé, est l'objet de cette dernière partie de mon Mémoire.

X L.

Des deux natures d'électricité.

QUELLE que soit la cause de l'électricité, l'on en expliquera tous les phénomènes, & le calcul se trouvera conforme aux résultats des expériences, en supposant deux fluides électriques, les parties du même fluide se repoussant en raison inverse du carré des distances, & attirant les parties de l'autre fluide dans la même raison inverse du carré des distances. Cette loi a été trouvée par l'expérience pour l'attraction & la répulsion électrique, dans les premier & deuxième Mémoires sur l'électricité, *volume de l'Académie de 1785*; d'après cette supposition, les deux fluides dans les corps conducteurs, tendent toujours à se réunir jusqu'à ce qu'il y ait équilibre, c'est-à-dire, jusqu'à ce que par

leur réunion, les forces attractives & répulsives se compensent mutuellement. C'est l'état où se trouvent tous les corps dans leur état naturel ; mais si par une opération quelconque, l'on fait passer dans un corps conducteur isolé, une quantité surabondante d'un des fluides électriques, il sera électrisé, c'est-à-dire, qu'il repoussera les parties électriques de la même nature, & attirera les parties électriques d'une autre nature que le fluide surabondant dont il est chargé. Si le corps conducteur électrisé est mis en contact avec un autre corps conducteur isolé, il partagera avec lui le fluide électrique surabondant dans les proportions indiquées dans ce Mémoire & ceux qui précèdent ; mais si on le fait communiquer à un corps non isolé, il perdra dans un instant toute son électricité, puisqu'il la partagera avec le globe de la terre, dont les dimensions relativement à lui sont infinies.

M. *Æpinus* a supposé dans la théorie de l'électricité, qu'il n'y avoit qu'un seul fluide électrique, dont les parties se repoussent mutuellement & étoient attirées par les parties des corps avec la même force qu'elles se repoussent. Mais pour expliquer l'état des corps dans leur situation naturelle, ainsi que la répulsion dans les deux genres d'électricité, il est obligé de supposer que les molécules des corps se repoussent mutuellement avec la même force qu'elles attirent les molécules électriques, & que ces molécules électriques se repoussent entr'elles. Il est facile de sentir que la supposition de M. *Æpinus* donne, quant au calcul, les mêmes résultats que celle des deux fluides. Je préfère celle des deux fluides qui a déjà été proposée par plusieurs physiciens, parce qu'il me paroît contradictoire d'admettre en même temps dans les parties des corps, une force attractive en raison inverse du carré des distances démontrée par la pesanteur universelle, & une force répulsive dans le même rapport inverse du carré des distances ; force qui seroit nécessairement infiniment grande, relativement à l'action attractive d'où résulte la pesanteur,

La supposition des deux fluides est d'ailleurs conforme à toutes les découvertes modernes des chimistes & des physiciens, qui nous ont fait connoître différens gaz dont le mélange dans certaines proportions, détruit tout-à-coup & en entier l'élasticité ; effet qui ne peut avoir lieu sans quelque chose d'équivalent à une répulsion entre les parties du même gaz qui constitue leur état élastique, & à une attraction entre les parties des différens gaz qui leur fait perdre tout-à-coup leur élasticité.

Comme ces deux explications n'ont qu'un degré de probabilité plus ou moins grand, je prévien, pour mettre la théorie qui va suivre, à l'abri de toute dispute systématique ; que dans la supposition des deux fluides électriques, je n'ai d'autre intention que de présenter avec le moins d'élémens possible, les résultats du calcul & de l'expérience, & non d'indiquer les véritables causes de l'électricité. Je renverrai à la fin de mon travail sur l'électricité, l'examen des principaux systèmes auxquels les phénomènes électriques ont donné naissance.

X L I I.

DANS les Mémoires qui précèdent, , ainsi que dans les recherches qui vont suivre, j'ai souvent fait toucher différens points d'un corps électrisé, par un petit plan circulaire de papier doré isolé, que je plaçois ensuite dans la balance pour déterminer son action sur l'aiguille : dans les résultats, j'ai supposé que la densité électrique des points touchés étoit proportionnelle à celle que prenoit le petit plan dans le contact avec le corps. Pour savoir si cette supposition peut être admise, il est nécessaire de déterminer suivant quel rapport le fluide électrique se partage entre un corps & un petit plan qui le touche.

Distribution d'un seul fluide électrique entre un globe & un plan circulaire d'une très-petite épaisseur, qui touche le globe tangentiellement par le centre du cercle du plan.

J'AI placé un globe de 8 pouces de diamètre sur un isoloir décrit dans les Mémoires qui précèdent; je l'ai électrisé positivement, ainsi que l'aiguille de la balance. Au moyen d'un petit globe d'un pouce de diamètre, que je faisois toucher au gros globe, & que j'introduisois dans la balance, j'ai déterminé la densité électrique du globe de 8 pouces, que j'ai trouvée de 144 degrés. J'ai fait toucher au globe un plan circulaire isolé de 16 pouces de diamètre & d'un quart de ligne d'épaisseur, j'ai retiré tout de suite le plan; & au moyen de mon petit globe d'un pouce de diamètre, j'ai déterminé de nouveau la densité électrique qui restoit au globe de 8 pouces, je l'ai trouvé égale à 47 degrés.

X L I I I.

Explication & résultat de cette Expérience.

LA densité primitive du fluide électrique, ou, ce qui revient au même, la quantité du fluide électrique répandue sur la surface du globe, étoit, avant le contact du plan, représentée par 144 degrés. Par le contact avec le plan, elle a été réduite à 47 degrés; ainsi dans le partage entre le globe & le plan, le globe en conserve 47 parties, & le plan en prend 97 parties; ainsi la quantité de fluide se partage entre le plan & le globe, de manière que celle du plan est double de celle du globe. Si l'on calcule à présent la surface du globe de 8 pouces de diamètre, on la trouvera égale à une des deux surfaces du plan de 16 pouces de diamètre; ainsi, comme ce plan a deux surfaces, il

paroît par cette expérience que le fluide électrique se distribue entre le plan & le globe proportionnellement aux surfaces.

J'ai trouvé par un très-grand nombre d'expériences faites avec des plans plus petits que le précédent, que ce résultat avoit toujours lieu; c'est-à-dire, que, quels que fussent le diamètre du globe & celui du plan, toutes les fois que le plan étoit mis en contact tangentiellement avec le globe, il partageoit l'électricité du globe dans le rapport de la somme de l'étendue des deux surfaces du plan à celle du globe. L'expérience a sur-tout donné ce résultat d'une manière très-exacte, lorsque le plan mis en contact avec le globe étoit d'un très-petit diamètre, relativement à celui du globe; en sorte que, lorsque l'on touche, par exemple, le globe de 8 pouces de diamètre, avec un petit plan isolé de 6 lignes de diamètre, il prend à chacune de ces surfaces une densité électrique égale à celle de la surface du globe, c'est-à-dire, que ce petit plan de 6 lignes de diamètre se charge d'une quantité d'électricité double de celle de la portion de surface du globe qu'il a touchée.

XLIV.

Théorie de cette Expérience.

LE résultat de cette expérience est facile à expliquer par la théorie, au moins, lorsque le plan qui touche est d'un petit diamètre relativement à celui du globe touché; c'est le seul cas où je m'arrête, parce que c'est le seul dont j'aurai besoin dans les expériences qui vont suivre.

Plaçons, *fig. 8*, un petit plan *b* à une distance *a b* du globe électrisé *C*, assez petite pour que la couche d'air interposée ne puisse pas empêcher le fluide électrique de passer du globe *C* au petit plan *b*. Ce plan étant très-petit, l'action du globe sur le point *b* dans la direction *a b*, sera égale à $2 D R^2 : (R + a b)^2$, *D* étant supposé repré-

Q q q q ij

sentier la densité électrique de la surface du globe, & R son rayon. Comme a b est supposé très-petit relativement au rayon R du globe, l'action du globe sur le point b est très-approchant égale à $2D$; mais l'action d'un plan circulaire, dont le rayon est R' sur un point à une distance a du

centre de ce plan, est égale à $\Delta \left(1 - \frac{a}{(R' R' + aa)^{\frac{1}{2}}} \right)$;

& si a est une quantité infiniment petite, cette action se réduira à Δ , Δ étant la densité électrique de tous les points du plan. Ainsi, comme il doit y avoir équilibre au point b dans la direction ba , entre l'action du plan & celle du globe, l'on aura l'équation $2D = \Delta$; c'est-à-dire, que la densité du plan, ou que la quantité d'électricité qui passera au plan dans le moment que l'on le séparera du globe, sera double de la quantité d'électricité que contient une portion de la surface du globe égale à ce plan, ce qui se trouve très-exactement conforme à l'expérience.

X L V.

*Remarque générale sur la Théorie de l'article qui précède,
& sur l'Expérience dont elle résulte.*

LE résultat que nous venons de trouver par l'expérience & par la théorie, pour un petit plan mis en contact avec un globe, est général pour tous les corps terminés par une surface courbe, convexe d'une figure quelconque. Quelle que soit en effet la figure du corps, l'expérience apprend qu'un petit plan mis en contact avec ces surfaces, prend toujours, au moment qu'on le retire du contact, une quantité d'électricité double de celle de la portion de surface touchée. L'expérience donne encore ce même rapport double, en faisant toucher un plan très-petit à un grand plan électrisé.

Ce résultat général des expériences pour un petit plan mis en contact avec un corps conducteur, terminé par une surface d'une figure quelconque, auroit pu, comme

on va le voir, être prévu par le simple raisonnement; mais dans ce Mémoire, ainsi que dans les précédens, tous les phénomènes ont été donnés par l'expérience avant d'essayer d'y appliquer le calcul. Voici en effet ce qu'indique la théorie.

A la place du globe *C*, *fig. 8*, supposons un corps d'une figure quelconque, que la petite surface représentée par *f a f'*, ait été touchée par le plan *e b e*; l'on demande, après que le petit plan *e b e* a été séparé de *f a f'*, la densité électrique, ou la quantité de fluide électrique qu'il contient relativement à celle que contient la portion égale de surface *f a f'*. Prenons deux points ϕ & ϕ' à une distance infiniment petite du point *z* & de la surface *f a f'*, l'un en dedans l'autre en dehors du corps *C*; soit Δ la densité électrique du plan *f f'*; l'action de ce petit plan circulaire *f f'*, décomposée suivant la direction *a ϕ* , & agissant sur le point ϕ ainsi que sur le point ϕ' , sera par le calcul égale à Δ , ϕa étant supposé infiniment petit relativement à *f f'*; mais l'action de *f f'* sur le point ϕ doit faire équilibre à l'action de toute la surface *f k f'*; ainsi l'action de toute cette surface sur le point ϕ sera aussi égale à Δ . Cette action de toute la surface *f k f'*, sera la même sur un point ϕ' placé en dehors du corps, puisque $\phi \phi'$ est supposé infiniment petit; ainsi le point ϕ' éprouvant en même temps l'action du corps *f k f'* & celle du plan *f f'*, il éprouvera une répulsion égale à 2Δ . Ainsi, si nous supposons que le petit plan *e e'* est assez proche du point *a* pour que l'électricité puisse passer du corps à ce petit plan, à travers la couche d'air qui les sépare; & si l'on prend un point entre *a* & *b* à une distance infiniment petite de *b*, l'action de la petite surface circulaire *b e'* sur ce point dans la direction *b a*, sera, en nommant *D* la densité électrique du plan *e b e'*, égale à *D*; ainsi en nommant Δ la densité du petit plan *f f'*, l'on aura pour l'action de la surface entière du corps *f a f k* sur le point *b*, la quantité 2Δ , qui doit faire équilibre à l'action *D*.

du plan $e e'$ sur le même point; ainsi l'on aura généralement $2 \delta = D$, c'est-à-dire, que la quantité d'électricité du petit plan $e e'$, quelle que soit la figure de la surface du corps $f k f' a$, sera égale à une quantité d'électricité double de celle de la portion de surface $f a f'$, avec laquelle le petit plan $e e'$ aura été mis en contact. Ainsi la théorie se trouve avoir un accord parfait avec l'expérience.

X L V I.

COMME dans les expériences qui précèdent & dans celles qui vont suivre, nous avons principalement déterminé la densité de chaque point des corps, en les faisant toucher par un petit plan; il est clair, d'après les expériences & la théorie que nous venons d'expliquer, qu'en comparant pour la même distance les actions de notre petit plan sur l'aiguille électrisée de notre balance, après que ce petit plan a été successivement mis en contact avec différens points de la surface du corps, nous déterminons très-exactement le rapport des densités électriques de deux points successivement touchés.

Nous allons actuellement passer à la recherche des conditions d'équilibre dans des corps qui agissent l'un sur l'autre; ces corps étant séparés par un intervalle assez grand pour que le fluide électrique ne puisse pas se communiquer de l'un à l'autre, à travers la couche d'air qui les sépare.

X L V I I.

Deux petits globes, fig. 9, isolés & non électrisés, sont placés à une distance quelconque du gros globe C électrisé.

E X P É R I E N C E.

L'ON isole, fig. 9, un globe électrisé C de 8 pouces de diamètre. L'on isole également deux petits globes

de 2 pouces chacun de diamètre : l'un a' est porté sur un support idio-électrique formé d'un cylindre de verre, enduit & surmonté de quatre branches de gomme laque; l'autre petit globe a est porté par un soutien vertical, tel qu'il puisse être introduit dans la balance électrique. Nous avons décrit ce soutien dans les Mémoires qui précèdent. Ayant électrisé positivement l'aiguille de la balance, ainsi que le globe C , le petit globe a présenté dans la balance à une même distance de l'aiguille, a attiré l'aiguille, après avoir été placé en a , exactement avec la même force qu'il l'a repoussée, lorsqu'il a été placé en a' .

Résultat de cette Expérience.

Il est facile de voir que ce résultat s'accorde parfaitement avec le principe expliqué à l'art. *XL I*; car dans notre neuvième figure, le globe C étant électrisé positivement, une partie du fluide positif du globe a passe dans le globe a' ; & *vice versa*, une partie du fluide négatif du globe a' passe dans le globe a . Mais comme chacun des globes acquiert une portion de fluide égale à celle dont l'autre se dépouille, & que la quantité des deux fluides nécessaire pour la saturation, c'est-à-dire, pour qu'il n'y ait aucune action électrique, subsiste dans les deux corps, que ces fluides ne sont que déplacés; il en résulte que l'action attractive du globe a , relativement à l'aiguille de la balance, doit être exactement égale à l'action répulsive du corps a' .

XLVIII.

EXPÉRIENCE.

Comparaison, fig. 9, de la densité électrique moyenne du globe placé en a' , & de celle de la surface du globe C .

CETTE expérience est destinée à déterminer, tout étant

comme dans la neuvième figure, quelle est pour une distance R donnée, la quantité de fluide électrique positif surabondant dans le petit globe a' , &c.

Pour faire cette expérience, le globe C' ayant 8 pouces de diamètre, les globes a & a' deux pouces, le premier globe a étant placé à deux pouces du globe C' , j'ai présenté le dernier globe a' dans la balance, & j'ai déterminé son action répulsive, que j'ai trouvée de 21 degrés pour une distance donnée. J'ai fait ensuite toucher le globe C' par le globe a' , & l'introduisant de nouveau dans la balance, j'ai déterminé l'action du globe a' qui, à cause que la distance étoit la même que dans la première opération, se trouvoit proportionnelle à la quantité d'électricité dont le petit globe a' s'étoit chargé dans le contact avec le globe C' . J'ai trouvé que l'aiguille étoit chassée, dans cette deuxième, expérience, avec une force de 66 degrés.

X L I X.

Résultat & théorie de cette expérience.

LA quantité de fluide électrique, surabondante en plus ou en moins dans un corps, étant proportionnelle à son action, lorsque l'on compare les actions à des distances égales, soit, *fig. 9*, Δ la densité moyenne du fluide électrique répandu sur la surface du premier globe a , électricité qui sera négative dans notre expérience où le globe C est supposé électrisé positivement; soit Δ' la densité électrique positive du globe a' qui, dans notre figure & notre expérience, se trouve électrisé positivement de la même quantité dont le globe a est électrisé négativement.

Si nous cherchons l'action des trois globes C , a , a' , sur le point de contact b des deux petits globes, point où il doit y avoir équilibre, nous trouverons que si les fluides électriques étoient répandus uniformément sur la surface
des

des trois globes, l'on auroit pour l'équilibre d'action au point b , l'équation

$$\frac{2 D \cdot (CR)^2}{(Cb)^2} = -\Delta + \Delta';$$

mais, comme la quantité de fluide électrique positif naturel, dont le globe a est dépouillé, est égale à la quantité du fluide surabondant du globe a , il en résulte que la somme des quantités de fluide des deux globes, est égale à 0 : ainsi l'on a $\Delta' + \Delta = 0$; ainsi, substituant dans la première

équation la valeur de Δ , l'on aura $\frac{2 D \cdot (CR)^2}{(Cb)^2} = 2 \Delta'$.

Il faut à présent remarquer que, dans la première équation, nous avons supposé que le fluide étoit uniformément répandu sur la surface de chaque globe, au lieu que ces fluides, ainsi que nous l'avons vu, au commencement de ce Mémoire, n'ont nulle action ou sont réunis à saturation au point de contact b , & sont séparés & portés à leur plus grand degré de densité aux points 1 & 2. Nous avons trouvé dans le même article, que l'action corrigée du globe a , sur le point b , étoit mesurée par 0,60 Δ' , & non pas par Δ' ; il en est de même de celle du corps a , ainsi notre équation corrigée nous donnera :

$$\frac{2 D (CR)^2}{(Cb)^2} = 1,20 \Delta'.$$

Dans notre expérience, $CR = 4$ pouces, $R_1 = 2$ pouces, le rayon du globe $a = 1$ pouce; ainsi l'on aura 0,50 $D = 1,20 \Delta'$, d'où $D = 2,40 \Delta'$.

Nous avons trouvé dans notre expérience, que la densité moyenne du petit globe a' étant mesurée par 21 degrés, celle du même petit globe, lorsqu'il a touché a , étoit mesurée par 66 degrés : mais nous avons vu dans notre cinquième Mémoire, *vol. de 1787, pag. 437*, que, lorsqu'un globe d'un pouce de rayon touchoit un globe de 4 pouces de rayon, la densité moyenne sur la surface du globe d'un

pouce, étoit à celle du globe de 4 pouces, à peu-près comme 1,30 : 1,00 ; ainsi la densité moyenne du petit globe, après le contact, étant représentée par 66 degrés, celle du gros globe le seroit par 51 degrés : mais il faut remarquer que par le partage de l'électricité entre le gros globe & le petit globe, au moment du contact, le gros globe perd à peu-près $\frac{1}{12}$ de son fluide électrique, qu'il perdoit de plus dans l'intervalle des observations à peu-près $\frac{1}{20}$; ainsi la densité du globe C, avant le contact, étoit à peu-près mesurée par 57 degrés. Or nous avons trouvé par l'expérience la densité moyenne du globe a' placé comme dans la figure, mesurée par 21 degrés ; ainsi la densité moyenne du fluide électrique positif de la surface du globe C', est à celle sur la surface du globe a' placé comme dans la neuvième figure, :: 57 : 21 :: 2,70 : 1,00 ; ainsi, d'après l'expérience, nous avons $\delta' = 2,70 D$; quantité que nous venons de trouver égale à 2,40 D par la théorie ; ainsi la théorie & l'expérience diffèrent peu entre elles, & les erreurs ne peuvent être attribuées qu'à l'imperfection des opérations.

L.

Comparaison, figure 10, des densités électriques de quatre petits globes de 2 pouces de diamètre non électrisés, placés sur un isoloir, à 2 pouces de distance d'un globe C' électrisé, de 8 pouces de diamètre.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

LA figure dixième indique la position des globes. L'on a comparé, d'après les procédés indiqués dans l'expérience qui précède, la densité moyenne de l'électricité négative du globe ¹a avec la densité positive du globe ⁴a, & celle

du globe a^4 avec celle du globe C' ; le globe C' étant électrisé positivement.

L'on a trouvé, en nommant δ^1 la densité moyenne du globe a^1 , δ^4 la densité moyenne du globe a^4 , D celle du gros globe C , que $D = -1,50 \delta^1 = 2,20 \delta^4$.

Théorie de cette Expérience.

D'après tout ce que nous avons dit dans les articles qui précèdent, il est facile de voir qu'en nommant δ^1 la densité du globe a^1 , δ^2 la densité moyenne du globe a^2 , δ^3 la densité moyenne du globe a^3 , δ^4 la densité moyenne du globe a^4 , D celle du globe C , R & r les rayons des globes C & a' , faisant encore la distance $R_1 = a$, l'on aura les trois équations corrigées d'après l'*art. IV* de ce Mémoire :

$$\begin{aligned} \text{Pour le point de contact 2} & \dots\dots\dots \frac{2 D R^2}{(R + a + 2r)^2} \\ &= -0,60 \delta^1 + 0,70 \delta^2 + 0,22 \delta^3 + 0,08 \delta^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le point de contact 3} & \dots\dots\dots \frac{2 D R^2}{(R + a + 4r)^2} \\ &= -0,22 \delta^1 - 0,70 \delta^2 + 0,70 \delta^3 + 0,22 \delta^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le point de contact 4} & \dots\dots\dots \frac{2 D R^2}{(R + a + 6r)^2} \\ &= -0,08 \delta^1 - 0,22 \delta^2 - 0,70 \delta^3 + 0,60 \delta^4. \end{aligned}$$

Pour avoir une quatrième équation, il faut remarquer que les quatre petits globes étant primitivement dans leur

R r r r ij

état naturel, leur fluide électrique n'est que dérangé par l'influence de l'action du gros globe, & que la somme des fluides électriques des quatre petits globes, n'est ni augmentée ni diminuée; ainsi l'on aura la somme des densités égale à zéro pour les quatre petits globes; ainsi l'on aura

$$4.^{\text{e}} \text{ équation. } \overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta} + \overset{3}{\delta} + \overset{4}{\delta} = 0.$$

Au moyen de ces quatre équations, l'on fera disparaître à volonté trois des quatre inconnues $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, $\overset{3}{\delta}$, $\overset{4}{\delta}$, & l'on comparera la quatrième avec la densité D du globe C : ce calcul appliqué à notre expérience donnera

$D = -1,53 \overset{1}{\delta}$. L'expérience nous a donné $D = -1,550$;

le calcul donnera $D = 2,12 \overset{4}{\delta}$; l'expérience nous a

donné $D = 2,2040 \overset{4}{\delta}$: la théorie & l'expérience s'accordent encore ici aussi-bien que l'on le peut espérer dans des opérations de ce genre.

Nous n'étendrons pas les expériences & les calculs qui précèdent, à un plus grand nombre de petits globes placés en contact, & dont les centres seroient une même ligne avec le centre d'un gros globe; il est facile d'y appliquer les différentes méthodes d'approximation que nous avons déjà présentées; mais nous croyons nécessaire de développer dans un assez grand détail la manière dont le fluide électrique paroît se manifester avec différens degrés de densité dans les différentes parties d'un cylindre non isolé, ou ce qui revient au même, isolé, mais d'une longueur infinie, présenté par une de ses extrémités à une distance donnée d'un gros globe électrisé, la prolongation de l'axe du cylindre passant par le centre du globe. L'on sent que cette recherche doit avoir un rapport immédiat avec la théorie des paratonnerres.

L I.

Résultat des expériences destinées à déterminer l'état électrique des différentes parties de la surface d'un cylindre non isolé, d'une très-grande longueur, présenté par une de ses extrémités à un gros globe électrisé, isolé.

DANS les résultats qui vont être présentés, je n'entrerai dans le détail des expériences, qu'autant que ces détails seront assez différens de ceux qui précèdent, pour exiger une explication particulière.

L'on fait, & il suit des recherches qui précèdent, que lorsque l'on présente un cylindre non isolé à une distance d'un globe électrisé, assez grande pour que le fluide électrique du globe ne puisse pas passer dans le cylindre, la surface du cylindre donne des signes d'électricité contraire à celle du globe, & que la densité électrique de chaque point du cylindre, ou ce qui revient au même, l'action de chacun de ces points est d'autant plus grande, que le point du cylindre est plus rapproché du globe électrisé : l'objet de cette partie de mon Mémoire est de déterminer,

1.^o Pour un même cylindre placé à différentes distances du même globe électrisé, la densité électrique de l'extrémité du cylindre la plus proche du globe ; la loi que suit cette densité ; de comparer cette densité, en la supposant proportionnelle à son degré d'action, avec celle du globe électrisé que l'on suppose de même proportionnelle à son degré d'action ;

2.^o En plaçant des cylindres non isolés de différens diamètres, à la même distance d'un globe électrisé, de déterminer suivant quel rapport la densité de l'extrémité du cylindre augmente ou diminue, relativement aux diamètres de ces cylindres ;

3.^o Suivant quelle loi la densité des différens points

d'un même cylindre placé à une distance donnée d'un globe électrisé, diminue relativement à la distance de ces points au centre du globe électrisé;

4.^o Enfin suivant quelle loi la densité de la surface des cylindres augmente relativement au diamètre de différens globes, la densité électrique des globes étant la même.

L I I.

P R E M I E R R É S U L T A T.

Un cylindre non isolé placé à différentes distances d'un globe électrisé.

Si l'on place le même cylindre non isolé, ou, ce qui revient au même, isolé, mais d'une longueur infinie, de manière que l'axe du cylindre soit dans la direction du centre du globe électrisé, l'on trouvera par l'expérience, en faisant varier la distance du centre du globe à l'extrémité du cylindre la plus proche de ce globe, que la densité électrique de cette extrémité sera dans un rapport un peu au-dessous de la puissance $\frac{3}{2}$ de la raison inverse de la distance de cette extrémité au centre du globe. L'expérience qui a donné ce résultat s'est faite de deux manières; ou en touchant avec un petit plan isolé l'extrémité du cylindre, & plaçant ensuite à l'ordinaire ce petit plan dans la balance électrique; ou en faisant toucher l'extrémité du cylindre avec un petit globe du même diamètre que le cylindre, que l'on introduit ensuite dans la balance.

L I I I.

D E U X I È M E R É S U L T A T.

Densités électriques de l'extrémité de deux cylindres de différens diamètres non isolés, placés alternativement à la même distance du centre d'un globe électrisé.

EN plaçant successivement deux cylindres de différens

diamètres à la même distance d'un même globe électrisé, l'on a trouvé que les densités électriques de l'extrémité des deux cylindres étoient entr'elles à peu-près en raison inverse des diamètres des deux cylindres, pourvu cependant que les diamètres des cylindres fussent beaucoup plus petits que le diamètre du globe.

L I V.

T R O I S È M E R É S U L T A T.

Rapport des densités électriques des différens points de la surface d'un même cylindre d'une grande longueur, & non isolé, suivant que ces points sont plus ou moins éloignés de l'extrémité du cylindre, ou du centre du globe électrisé.

EN plaçant un cylindre à une distance donnée d'un globe électrisé, l'on trouve que la densité électrique des différens points de la surface de ce cylindre, est en raison inverse du carré de la distance de ces points au centre du globe électrisé.

Cette loi n'est pas suivie vers l'extrémité du cylindre qui avoisine le globe sur une longueur égale à quatre ou cinq diamètres du cylindre, l'on trouve par l'expérience que dans cette partie la densité électrique croît en s'approchant de l'extrémité du cylindre dans un rapport beaucoup plus grand que l'inverse du carré des distances; & si, comme dans toutes les expériences que nous avons faites; le cylindre est terminé comme à la *onzième figure*, par une demi-sphère, l'on trouvera que la densité à l'extrémité de l'axe a , point le plus proche du globe C , est à peu-près double de celle du point f , qui n'est éloignée du point a , extrémité du cylindre, que d'une quantité ae égale au diamètre du cylindre, quelle que soit d'ailleurs la distance Aa .

QUATRIÈME RÉSULTAT.

Un même cylindre non isolé, placé à la même distance du centre des deux globes électrisés de différens diamètres.

EN supposant la densité électrique de deux globes la même, l'on trouvera par l'expérience que la densité des points du cylindre placés à la même distance du centre des deux globes, sera comme le carré des rayons de ces globes. La théorie auroit annoncé *à priori* le résultat que l'expérience vient de donner; car l'action d'une surface sphérique sur un point quelconque placé en dehors de la sphère, est la même que si cette surface étoit réunie au centre de la sphère; ainsi son action sur tous les points placés en dehors de la surface, sera en raison directe de l'étendue de la surface multipliée par la densité électrique, & en raison inverse du carré de la distance au point sur lequel s'exerce l'action. Or comme le cylindre est le même, & que chaque point du cylindre sur lequel l'on évalue l'action, est supposé à la même distance du centre des deux globes; il en résulte que les densités électriques d'un même point du cylindre placé à la même distance du centre des deux globes électrisés, doivent toujours être en raison directe composée de la densité électrique de la surface des globes, & du carré des rayons des globes.

L V I.

Formule dérivée des résultats précédens.

POUR pouvoir, d'après les résultats qui précèdent, donner une formule qui indique tout de suite l'état électrique des différens points d'un cylindre non isolé, ou touché au point *G* par un corps non isolé, comme à la

figure

figure 11, à une très-grande distance du point *a*, l'on sent qu'il faut déterminer ce rapport par l'expérience pour un cas particulier, afin d'avoir un coefficient constant. Parmi les différentes expériences qui m'ont servi à fixer les quatre résultats qui précèdent, j'en vais choisir une qui me donnera ce coefficient.

E X P É R I E N C E.

J'AI isolé, *fig. 11*, le globe *C* de 8 pouces de diamètre; je l'ai électrisé; j'ai placé sur un isoïoir à $2\frac{1}{2}$ pouces de distance un cylindre *a G*, d'un pouce de diamètre: ce cylindre étoit terminé par une demi-sphère *b a b*. J'ai touché alternativement à l'ordinaire, par un petit plan isolé, le point *a* de la demi-sphère, & un point quelconque du globe *C*. Ayant électrisé l'aiguille de la balance de la même électricité que le globe, l'aiguille a été attirée par le petit plan lorsqu'il a eu touché en *a* l'extrémité du cylindre, & repoussée lorsqu'il a eu touché le globe. En mesurant les forces pour une même distance, j'ai trouvé que la force attractive du petit plan, lorsqu'il avoit touché le point *a*, étoit à la force répulsive du même plan, lorsqu'il avoit touché le globe, comme 4,00 : 1,00.

Lorsque par la même méthode j'ai comparé le point *a* avec le point *f*, placé à une distance d'un pouce de l'extrémité du cylindre, j'ai trouvé que la densité électrique du point *a*, étoit à celle du point *f*, comme 2,5 : 1,0; d'où il est facile de conclure que la densité électrique négative à un pouce de l'extrémité du cylindre, fera à la densité électrique positive de la surface du globe, à peu-près comme 16 : 10.

L V I I.

EN réunissant à présent les quatre résultats qui précèdent, nous trouvons par l'expérience que les densités électriques de la demi-sphère qui termine différens cylindres présentés à un globe électrisé, sont d'une nature contraire

à celle du globe, en raison directe composée de la densité sur la surface du globe, du carré du diamètre de ce globe, & en raison inverse composée de la puissance $\frac{3}{2}$ de la distance $c a$ fig 7, du centre du globe à l'extrémité du cylindre & du rayon du cylindre

Ainsi, si D est la densité du fluide électrique positif, répandu sur la surface d'un globe, dont R est le rayon; si r est le rayon du cylindre; si a est la distance entre le centre du globe & l'extrémité du cylindre, l'on aura pour exprimer Δ , densité électrique négative de l'extrémité du cylindre, la formule

$$\Delta = \frac{m D R^2}{r (R + a)^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle l'on va déterminer la valeur de la constante m , d'après l'expérience de l'article qui précède. Dans cette expérience $R = 4$ pouces; $r = \frac{1}{2}$ pouce; $a = 2,5$ pouces, Δ a été trouvée égale à $4 D$: substituant ces quantités dans la formule, l'on aura $m = 2,07 \sqrt{(1 \text{ pouce})}$, & la formule générale sera

$$\Delta = 2,07 D R^2 : r (R + a)^{\frac{3}{2}},$$

dans laquelle il faut réduire en pouces les valeurs de a ; de r , & de R .

L V I I I.

Application de la formule précédente à un exemple analogue aux paratonnerres.

SUPPOSONS qu'un nuage chargé de fluide électrique ait la forme d'un globe de mille pieds de rayon, & passé à 500 pieds au-dessus de l'extrémité d'un cylindre d'un pouce de diamètre; dans cet exemple $r = 1000$ pieds; $a = 500$ pieds; $r = \frac{1}{2}$ pouce. Ces valeurs substituées dans la formule donnent

$$\Delta = \frac{2,07 \cdot 12^2 \cdot (1000)^2}{\frac{1}{2} (1500)^{\frac{3}{2}} 12^{\frac{3}{2}}} = 278 D;$$

c'est-à-dire, que la densité électrique de l'extrémité du

cylindre, d'une nature contraire à celle du nuage, sera 278 fois plus grande que celle de la surface du nuage.

Mais comme l'expérience nous a indiqué, que dans notre formule $(R + a)$ étoit élevé à une puissance plus petite que $\frac{1}{2}$, la densité Δ doit être plus grande que 278 D . Pour s'en convaincre, il suffit de supposer que dans la formule $(R + a)$ est élevé à la puissance 1; pour lors l'on aura $m = 1,23$, la formule donnera $\Delta = 1,23 DR^2: r(R + a)$, qui, appliquée à notre exemple, donneroit $\Delta = 19680 D$; en sorte qu'une petite variation dans la puissance de $(R + a)$ en donneroit une très-grande dans celle de Δ .

Il résulte de cette observation, que Δ est plus grand que 278 D ; mais nous ne savons pas de combien, car comme les expériences d'où nous avons tiré les quatre résultats qui précèdent, ont eu pour limite des globes d'un pied de diamètre & au - dessous, & des cylindres depuis 4 lignes jusqu'à 2 pouces de diamètre; & pour plus de facilité dans les calculs, nous avons supposé que les résultats étoient représentés par une formule d'un seul terme, ce qui m'a paru donner des valeurs suffisamment approchées dans les limites où les expériences ont été faites. Il se pourroit cependant que cette formule ne pût pas s'étendre à des limites très-éloignées de celles dans lesquelles les expériences sont renfermées; c'est ce qu'il sera facile de vérifier par les méthodes d'approximations théoriques qui vont terminer ce Mémoire, & qui nous indiqueront conformément à l'expérience, que la densité de l'extrémité du cylindre est plus grande pour les gros globes qui agissent sur l'extrémité d'un cylindre non isolé d'un petit diamètre, que celle donnée par la formule, & que par conséquent dans notre exemple, la densité de l'extrémité du cylindre d'un pouce de diamètre, présenté à 500 pieds d'un globe électrisé de 1000 pieds de rayon, est plus grande que 278 fois la densité électrique de la surface de ce globe.

L I X.

Application du résultat précédent à l'effet des Paratonnerres.

DE-LÀ il résulte que le nuage, ainsi que la couche d'air, très - imparfaitement idio - électrique, interposée entre le nuage & l'extrémité du cylindre, étant composés de parties mobiles, celles de ces parties qui avoisinent l'extrémité du cylindre, doivent s'y précipiter avec une très - grande rapidité, y perdre leur électricité, se charger d'une forte électricité d'une nature contraire à celle du nuage, s'élancer ensuite vers le nuage en fuyant l'extrémité du cylindre, & en détruisant l'électricité des parties du nuage qu'elles rencontrent. Mais comme le diamètre du cylindre est très-petit, son action, quoique très - grande relativement aux points qui avoisinent la surface de la demi - sphère qui le termine, est très-peu considérable relativement aux points qui sont à 30 ou 40 pieds de l'extrémité de ce cylindre. Ainsi, il doit arriver que l'extrémité du cylindre dépouillera les parties du nuage qui l'avoisinent, sans explosion électrique, & que tous les corps qui seront en-dessous de l'extrémité de ce cylindre, à une distance peu considérable du cylindre, seront préservés de l'explosion du nuage.

L X.

Calcul théorique destiné à déterminer par approximation l'état électrique d'un cylindre non isolé, dont l'axe passe par le centre d'un globe électrisé & isolé, placé à une distance de ce cylindre, assez grande pour que l'électricité du globe ne puisse pas se décharger à travers la couche d'air qui les sépare.

LES différentes méthodes d'approximation dont nous nous

sommes servi dans les différens articles qui précèdent, peuvent être employés ici : nous allons en donner quelques exemples.

PREMIER EXEMPLE.

Commençons par appliquer ces méthodes à l'expérience dont nous avons donné les détails à l'article *LVI*. Dans cette expérience, *figure II*, un globe *C* électrisé de 4 pouces de rayon, est placé à $2\frac{1}{2}$ pouces de distance de l'extrémité demi-sphérique *a* d'un cylindre d'un pouce de diamètre & de 30 pouces de longueur. Ce cylindre est touché à son extrémité *G* la plus éloignée du globe, par un corps qui communique avec la terre.

Je suppose que dans la *figure II*, $m^1 m^2 m^3 m^4 m^5$ représentent la courbe des densités électriques des différens points correspondans de la surface du cylindre. Je cherche d'après la méthode expliquée, article *XXXVI* de ce Mémoire, les variations de la densité de ces différens points, en supposant que cette variation suit une ligne droite. Je remarque d'abord que l'action du globe étant en raison inverse du carré de la distance aux points sur lesquels il agit, & la distance *CG* étant très - considérable, l'on peut supposer la densité nulle ou au moins très-petite, au point *G*, où le cylindre est touché par un corps indéfini. D'après cette supposition, si l'on cherche la variation *nr* au milieu du cylindre, qui a 30 pouces de longueur ou soixante fois son rayon *r*, l'on aura, article *XXXVII* & suivans.

$$\frac{2 D \cdot 4^2}{(21,5)^2} = 2 nr \left(\log. \frac{60}{\mu} - 1 \right) = 2 nr (3,09),$$

d'où résulte $nr = 0,0112 D$. Dans cette équation, *nr* représente la variation ou l'accroissement de la densité sur une longueur égale au rayon du cylindre. Mais comme nous supposons la variation au point *G* nulle, la variation

moyenne sur une longueur de rayon, depuis le point m^4

milieu du cylindre, jusqu'au point G , sera $0,0056$; ainsi la densité au point m seroit égale à $0,168 D$.

Pour déterminer à présent la variation au point b de la surface du cylindre, point que nous supposons à 5 pouces de distance de l'extrémité a , prenons de l'autre côté du point b une longueur $b^2 b^3$ de 5 pouces; il restera depuis b^3 jusqu'au milieu du cylindre, une longueur $b^3 b^4$ égale à 5 pouces. Comme la variation au point m a été trouvée pour la longueur du rayon r égale $0,0112 D$, l'accroissement de la densité, depuis m jusqu'à m , seroit par une première approximation pour la longueur, de dix rayons, égale à $0,112 D$, qui, ajouté à la densité trouvée pour m , donnera pour la densité en m la quantité $0,28 D$.

Si la densité que nous venons de trouver pour le point b , étoit uniforme jusqu'à l'extrémité G , l'on auroit l'action de la portion du cylindre $b^3 b^5$ sur le point F , représentée par $0,28 D(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}) = 0,023 D$, quantité un peu trop grande, parce que la densité va en décroissant de b^3 en m . Mais comme nous venons de supposer la variation de la densité constante, depuis le milieu b^4 jusqu'au point b^3 , au lieu qu'elle va en croissant, les deux erreurs en sens contraire tendent à se compenser. A présent si nous cherchons l'action de la portion du cylindre $a b^3$ sur le point F placé à 5 pouces de distance de l'extrémité du cylindre, en supposant la variation en ligne droite sur toute cette

longueur $a \overset{3}{b}$, & égale à $n' r$ pour la longueur d'un rayon du cylindre; l'on aura, à cause que la portion $\overset{3}{b} \overset{5}{m}$ du cylindre agit dans le même sens que le globe C , l'électricité du globe & du cylindre étant d'une nature contraire, l'équation

$$\frac{2 D 4^2}{(11,5)^2} + 0,023 D = 2 n' r \left(\frac{\log_e 20}{u} - 1 \right) \text{ d'où}$$

résulte $n' r = 0,082 D$.

Ainsi, en prenant cette variation moyenne pour celle qui s'étend depuis le point b ou depuis un pouce, à compter de l'extrémité a jusqu'à 10 pouces, c'est-à-dire, sur une longueur de 18 rayons, l'on aura pour l'accroissement,

depuis le point $\overset{3}{m}$ jusqu'à un pouce de l'extrémité, la quantité $1,476 D$, qui, étant ajoutée à $0,28 D$, densité à 10 pouces du point a , donnera pour la densité, à un pouce de l'extrémité du cylindre, la quantité $1,72 D$. L'expérience nous a donné, *article LVI*, la densité de ce cylindre mesurée à un pouce de son extrémité a , égale à peu-près à $1,6 D$, qui diffère peu de celle donnée par la théorie.

Les variations des différens points du cylindre étant données par l'approximation qui précède, l'on peut les déterminer de nouveau par une seconde approximation qui nous rapprochera beaucoup de leur véritable valeur. Je suppose que l'on veuille avoir dans la *figure 4*, la variation

des densités au point i , qui tient le milieu entre $\overset{2}{b}$ & $\overset{3}{b}$, je calcule d'après les formules données, *article XXXVI* & suivans,

l'action que la portion du milieu du cylindre $\overset{2}{b} a$, dont la densité, ainsi que la variation, sont à peu-près connues par l'approximation qui précède, exerce sur le point de l'axe qui répond à i . Je fais la même opération pour les

portions de cylindre $\overset{3}{b} \overset{4}{b}$ & $\overset{4}{b} \overset{5}{m}$ D'après ces actions données par le calcul, ainsi que d'après celle du globe C ; je forme une équation analogue à celles qui précèdent; cette équation me donne la variation $n r$ de la densité moyenne entre les

points $\overset{2}{b}$ & $\overset{3}{b}$. Je fais les mêmes opérations pour un autre point quelconque du cylindre, & je détermine ainsi par une seconde approximation les variations dans tous les points de la surface, d'où je conclus la densité électrique du cylindre pour chaque point de sa surface. L'on pourroit, par une troisième approximation, en suivant la même méthode, s'approcher encore davantage de la vérité, si on le croyoit nécessaire; mais cette précision ne paroît pas devoir être jamais utile à la pratique dans les recherches électriques.

L X I.

S E C O N D E X E M P L E.

JE suppose, *fig. 12*, que C soit un globe de mille pieds de rayon, que la densité du fluide électrique répandu sur la surface de ce globe soit D ; que l'extrémité a du cylindre $a m$ soit placée à 500 pieds de ce globe; que ce cylindre ayant un pouce de rayon & 60 pieds de longueur de a en m , soit enfoncé au point m perpendiculairement dans une surface plane indéfinie $H o$ d'un corps conducteur.

D'après tout ce que nous avons dit, le cylindre $a m$ non isolé donnera dans toute sa longueur, des signes d'électricité contraire à celle du globe C . Son électricité sera nulle au point m , où il joint la surface $H o$, & cette surface sera elle-même électrisée d'une nature d'électricité contraire à celle du globe dans les parties qui avoisinent le globe; en sorte que pour avoir la variation de la densité sur un point quelconque q du cylindre, il faut déterminer cette variation, d'après l'action de chaque partie $a q$ & $q m$ du cylindre sur le point q , & d'après l'action du globe C de

la surface Ho sur le même point q . Si nous n'avions pas égard à l'action de la surface Ho , & que nous calculions la variation au milieu q du cylindre $a m''$ à 30 pieds de son extrémité, d'après la méthode de l'article qui précède, l'on trouveroit pour cette variation sur la longueur d'un rayon, $\pi r = 0,0766 D$. Ainsi, si la variation étoit constante sur toute la longueur du cylindre, qui a 60 pieds ou 720 r de longueur, l'on auroit la densité à deux ou trois pouces de l'extrémité du cylindre, égale à 55 D ; mais comme la variation augmente à mesure que l'on s'approche de l'extrémité a du cylindre, la densité à 2 ou 3 pouces de cette extrémité, sera beaucoup plus grande que celle que nous venons de trouver. En faisant le calcul de la variation pour les différens points du cylindre, d'après les méthodes données dans les quatre derniers articles du Mémoire qui précède, j'ai trouvé que la densité à cinq ou six pouces de l'extrémité a , seroit par une première approximation, égale à plus de 120 D , & qu'elle seroit égale à plus de 300 D sur la demi-sphère qui termine le cylindre.

Mais il faut remarquer que nous n'avons pas encore eu égard à l'action de la surface OH , dont l'électricité est de nature contraire à celle du globe C , & qui se réunit à celle du globe, pour pousser le point q ou un autre point quelconque du cylindre de q vers C ; elle doit par conséquent augmenter la variation de la densité pour tous les points du cylindre; ainsi la densité de chaque point du cylindre doit être encore plus grande que celle déterminée par le calcul précédent.

Cherchons donc quelle est la densité électrique de la surface HO , présentée à une certaine distance d'un globe électrisé C . Lorsque nous aurons l'évaluation de cette densité, d'après l'expérience & la théorie, il sera facile de déterminer l'action de la surface HO sur un point quelconque du cylindre; & en réunissant cette action à celle du cylindre & du globe sur le même point, de calculer d'une

manière assez précise la densité électrique des différentes parties de la surface du cylindre.

L X I I.

État électrique d'un plan non isolé, placé, fig. 13, à une distance A B d'un globe électrisé, assez grande pour que l'électricité ne se communique pas du globe au plan, à travers la couche d'air qui les sépare.

LA figure 13 indique la disposition du globe *C* & du plan *B t* qui lui est présenté : le globe *C* est isolé & électrisé ; le plan *B* est soutenu verticalement par un support idio-électrique *e f g*. Ce plan circulaire est percé en *B* vers son centre de deux pouces de diamètre, où l'on introduit un petit plan circulaire du même diamètre que ce trou. Ce petit plan peut être ensuite placé dans la balance électrique. Je ne donnerai ici que le détail d'une expérience, & le résultat général des autres.

E X P É R I E N C E.

Le plan *t B*, figure 13, avoit 16 pouces de diamètre ; le globe *C* avoit 8 pouces de diamètre ; le centre *B* de ce plan étoit placé à 4 pouces de la surface du globe *C* ; l'on touchoit avec le doigt en *t* le plan *B t*, & en retirant le petit cercle *B*, on l'introduisoit dans la balance électrique, dont l'aiguille étoit électrisée de la même nature d'électricité que le globe *C*. Cette aiguille étoit attirée avec une force dont on prenoit la mesure au moyen de notre micromètre de torsion ; l'on touchoit tout de suite le globe *C*, avec le même petit plan *B*, qui, présenté dans la balance, chasse l'aiguille ; l'on déterminoit cette action & on la comparoit pour une même distance avec la première. Le résultat de cette expérience a été que l'action répulsive du petit plan

après avoir touché le globe, étoit quatre fois plus grande que l'action attractive du même petit plan, après avoir été placé en *B* au centre du grand plan *Bt* non isolé.

Par une suite d'expérience analogue à la précédente, en faisant varier la distance *CB*, & en comparant entre elles les densités électriques du point *B*, relativement à cette distance *BC*, j'ai trouvé que les densités électriques du point *B*, d'une nature contraire à celles du globe *C*, étoient exactement entre elles, en raison inverse du carré des distances du point *B* au centre du globe *C*.

L X I I I.

Résultat de cette Expérience.

IL est facile de soumettre les résultats de l'expérience au calcul. Soit *D* la densité électrique de la surface du globe, *d* celle du plan dans les parties qui avoisinent le point *B*: l'action d'une surface dont la densité uniforme est *d* agissant en raison inverse du carré des distances, sera pour un point à distance infiniment petite de ce plan, égale à *d*; celle d'une surface sphérique agissant à une distance *a* du centre de la sphère, si *D* est la densité de la surface & *R* son rayon, sera égale à $\frac{2 D R^2}{a^2}$; ainsi, si l'on met en équation l'action du

globe *C* & celle du plan *D*, les densités électriques du globe & du plan étant d'une nature contraire, l'on aura $(\frac{2 D R^2}{a^2} + d) = 0$ ou $-d = \frac{2 D R^2}{a^2}$;

dans l'expérience de l'article qui précède $R = 4$ pouces, $a = 8$ pouces; ainsi $-d = \frac{1}{2} D$, quantité que nous avons paru trouver égale à $\frac{1}{4} D$ par notre expérience. Mais il faut se ressouvenir, ainsi que nous l'avons prouvé plus haut, *figure 8*, que lorsque le petit plan *B* touche le globe, il prend une quantité d'électricité double de celle de la surface touchée; d'où il suit que la quantité d'électricité

du petit plan *B*, après avoir touché le globe, est double de celle de la surface : ainsi comme en introduisant le petit plan *B* dans le trou du grand plan *B I*, nous ne prenons qu'une densité égale à celle du plan, il en résulte que l'expérience, ainsi que la théorie, donnent $\delta = \frac{1}{2} D$.

La même formule nous apprend que la densité δ du centre *B* du plan *B t*, doit suivre la raison composée directe de la densité électrique du gros globe & de sa surface, & la raison inverse du carré de la distance *B C* entre le milieu du plan & le centre du globe ; ce qui se trouve très-exactement conforme à l'expérience.

L X I V.

R E M A R Q U E.

DANS l'expérience dont nous venons de donner la théorie, à l'article précédent, il se présente une observation curieuse, c'est que lorsque le plan *B t*, *figure 13*, est touché en *t*, le globe *C* étant électrisé, il n'y a que la surface du plan qui est du côté du globe, qui donne des signes d'électricité, la surface opposée reste dans son état naturel ; c'est ce qu'il est facile de prouver par l'expérience, en touchant alternativement ces deux surfaces par un petit plan isolé, que l'on présente ensuite à un électromètre très-sensible. Lorsque ce petit plan touche le grand plan d'une surface du côté du globe, il donne des signes d'une forte électricité ; lorsqu'il le touche du côté opposé, il n'en donne aucun signe.

Ce phénomène est facile à expliquer par les considérations dont nous avons fait usage dans les différens Mémoires qui précèdent, pour prouver que le fluide électrique se distribue seulement sur la surface des corps. Nous y reviendrons dans le Mémoire qui suivra celui-ci, & qui complétera le travail que nous avons entrepris sur l'électricité. Il aura pour objet de déterminer la manière dont le fluide électrique se

distribuë, & pénètre la surface des corps idio-électriques, ainsi que sur les corps conducteurs qui les touchent ou les avoisinent.

L X V.

REVENONS à présent à notre deuxième exemple, *art. LXI*, dans lequel *C*, *figure 12*, est un globe de 1000 pieds, placé à 500 pieds de distance de l'extrémité d'un cylindre, dont la longueur est 60 pieds & le rayon un pouce. Dans cet exemple, le plan *H o* se trouvant à 1560 pieds du centre du globe *C*, la densité *D'* sera représentée par

$$D' = \frac{2 D \cdot (1000)^2}{(1560)^2} = 0,822 D, D \text{ étant la densité de la}$$

surface du globe. Si nous voulons déterminer par les méthodes d'approximation qui précèdent la variation du cylindre, nous trouverons que l'action du globe *C* sur le point *q* placé au

$$\text{milieu du cylindre, sera égale à } \frac{2 D \cdot (1000)^2}{(1530)^2} D = 0,854 D;$$

l'action du plan *H o* sur le même point *q*, en supposant le rayon de ce plan très-grand relativement à la distance, *m'' q* sera, comme nous venons de le trouver, égale à $D' = 0,822 D$, action qui pousse le point *q* vers le globe *C* dans le temps que le globe *C'* attire le même point; ainsi l'action réunie du globe & du plan *H o* sollicite le point *q* dans le sens *q C'* avec une force égale (à $0,822 + 0,854$) *D*.

Mais nous avons vu, dans les précédens articles, que si la variation des densités du cylindre *a m''*, *figure 5*, suivoit une ligne droite, l'action de tout le cylindre sur un point placé à

son milieu seroit égale $2 n r \left(\frac{\log. \frac{l}{r}}{\mu} - 1 \right)$, où *n r* représente

la variation de la densité sur une longueur égale au rayon *r* du cylindre, *l* est la longueur du cylindre, *μ* le module du système logarithmique; ainsi, dans notre exemple, comme

r est égal à un pouce, comme la longueur du cylindre est de soixante pieds ou de 720 r , nous aurons pour l'action du cylindre sur le point placé au milieu en q , la quantité 2 . 558 . $n r$, action qui agit sur le point q de q , vers m'' ; ainsi l'équilibre de ce point donnera

$(0,822 + 0,854) D = 2 n r . 5,58$ ou $n r = \frac{0,838}{5,58} D$
 $= 0,15 D$, quantité à peu-près double de celle que nous avons trouvée lorsque nous n'avions pas égard à l'action de la surface HO .

Si je veux à présent avoir la variation au point ϕ , que je suppose à 5 pieds de l'extrémité a du cylindre $a m''$, je trouverois que l'action du plan Ho sur le point ϕ est à peu-près égale D' ou à 0,822 D , la distance $m'' \phi$ étant très-petite relativement à l'étendue électrisée du plan Ho :

l'action du globe sur le point ϕ sera égale à $\frac{2D(1000)^2}{(1505)^2}$.

Pour avoir à présent l'action du cylindre sur le point ϕ , je supposerai le cylindre divisé en deux parties; la première ap , ayant 10 pieds de longueur; la deuxième pm , ayant 55 pieds de longueur. Si la variation de la densité trouvée au milieu du cylindre égale à 0,15 D , s'étendoit jusqu'au point p , à 10 pieds de l'extrémité a , l'on auroit à ce point la densité δ égale à $600 \times 0,15 D = 90 D$.

Ainsi, si l'on vouloit calculer l'action de la portion pm'' du cylindre sur le point ϕ , la densité électrique étant en p égale à δ , & décroissant de la quantité $n r$, sur une longueur du rayon, l'on auroit, pour exprimer cette action, en nommant ϕp , a , & $\phi m''$, x , d'après les articles qui précèdent la formule $\delta \left(\frac{r}{a} - \frac{r}{x} \right) + n r \left(\frac{a-x}{x} \right) + \frac{n r}{\mu} \log. \left(\frac{x}{a} \right)$.

Il faut dans cette formule substituer à la place de δ , sa valeur 90 D , à la place de a , sa valeur 60 r , à la place de x , la quantité 660, & à la place de $n r$, sa valeur 0,15 D ; d'où résultera pour l'action de cette partie mp du cylindre,

la quantité $1,14 D$. Si l'on suppose à présent, que la variation moyenne sur les dix derniers pieds est $n' r$, l'on aura au point p , milieu de ces dix derniers pieds, pour l'action dans le sens $a p$, des dix derniers pieds du cylindre, la quantité $2 n' r \left(\frac{\log. 120}{\mu} - 1 \right) = 7,58 n' r$. Ainsi, en réunissant l'action du globe à celle de la surface Ho & à celle de la portion du cylindre $p m''$, qui agissent dans le même sens, l'on aura pour l'équilibre au point ϕ , à 5 pieds de l'extrémité a , l'équation

$$\frac{2 D (1000)^2}{(1505)^2} + 0,82 D + 1,14 D = 7,58 n' r;$$

$$\text{d'où } n' r = \frac{1,42}{3,79} D = 0,37 D.$$

Ainsi la variation à 5 pieds de l'extrémité a seroit, par cette approximation, égale à $0,37$; d'où l'on concluroit que la variation moyenne entre un point pris au milieu du cylindre où cette variation est égale $0,15 D$, & un point à 5 pieds de l'extrémité où elle est égale à $0,37 D$, sera $0,26$. Ainsi l'accroissement de la densité, depuis le milieu du cylindre jusqu'à cinq pieds de distance de l'extrémité, sera sur vingt-cinq pieds ou sur $300 r$ de longueur, égal à $0,26 \times 300 D = 78 D$. La variation depuis le point q , milieu du cylindre, jusqu'au point m'' , n'est pas tout-à-fait égale à $0,15 D$ que nous avons trouvé pour la variation au milieu du cylindre; mais en prenant cette valeur pour une première approximation, nous aurons pour l'accroissement de la densité, depuis le point m'' jusqu'au milieu q du cylindre ou sur $360 r$ de longueur, la quantité $54 D$ qui représentera la densité au milieu du cylindre; ainsi en y joignant $68 D$, accroissement de densité que nous venons de trouver depuis le milieu du cylindre jusqu'au point ϕ , placé à 5 pieds de l'extrémité a du cylindre, nous aurons la densité à ce point ϕ égale à $132 D$.

Si, en suivant la méthode qui précède, je cherchois la variation à 2 pieds ou à $24 r$ de distance de l'extrémité a

du cylindre, je la trouverois pour la longueur d'un rayon, égale à $1,07 D$; je trouverois ensuite la variation, sur une longueur d'un rayon pris à 6 pouces du point a par la même méthode d'approximation, égale à $5 D$, ou à cinq fois la densité du globe; & en concluant, d'après ces variations, la densité à 2 ou 3 pouces de l'extrémité a du cylindre, on la trouveroit de plus de $200 D$.

Si nous voulions à présent déterminer la densité électrique à l'extrémité a qui termine le cylindre, il seroit facile de voir, ainsi que l'expérience le prouve, que cette densité est au moins deux fois plus grande que celle du point b , qui n'en seroit éloignée que d'à peu-près une longueur égale au demi-diamètre du cylindre ou au rayon de la demi-sphère qui le termine. Pour le prouver, supposons que depuis le point b , qui répond à l'équateur de la demi-sphère jusqu'au point m'' , la densité du cylindre soit uniforme & égale à δ ; que la densité de la surface de la demi-sphère $a b$ est égale à δ' ; l'on trouvera par un calcul très-facile, que l'action de la surface de la demi-sphère $a b$ sur son centre e dans la direction $a m''$, est égale à $\frac{\delta'}{2}$; l'on trouvera que l'action de la surface du cylindre $b m''$ sur le point e dans la même direction, est égale à δ . Ainsi, en réunissant à cette action, celle de la sphère C' & celle de la surface $H o$, elles doivent faire équilibre à l'action de la demi-sphère $a b$, d'où résulte l'équation

$$\frac{\delta'}{2} = \delta + \frac{2 D (1000)^2}{(1500)} + 0,82 D; \text{ \& comme } \delta$$

est beaucoup plus grand que D , il en résulte que δ' ou que la densité électrique sur la surface de la demi-sphère qui termine en a le cylindre, est plus que double de celle de la surface de ce même cylindre à un pouce de son extrémité. Ce résultat est conforme à ce que l'expérience nous a donné, art. *LVI*.

Les calculs de cet article, quoique très-imparfaits, sont presque suffisans pour tous les objets de pratique relatifs à



A diagram showing a large sphere labeled 'C' on the left. A horizontal dashed line extends from the center of sphere 'C' to the right, passing through the center of a small sphere labeled 'a'. To the right of sphere 'a' is another small sphere labeled 'a'', which is slightly higher than 'a'. A vertical dashed line passes through the center of sphere 'a'' and ends at a point labeled '2' on the right. The entire diagram is labeled 'Fig. 9' in the upper right corner.



à l'électricité, où il pourroit être nécessaire d'employer le calcul. Mais les valeurs données par cette première approximation, peuvent être corrigées & rapprochées de la vérité autant que l'on voudra, en regardant, ainsi que nous l'avons dit à la fin de l'article *LX*, la courbe des densités comme un polygone, dont l'inclinaison des côtés seroit donnée relativement à l'axe du cylindre, par l'approximation qui précède: le calcul de l'action des différentes parties de la surface du cylindre sur un point de son axe, se feroit par les méthodes expliquées à l'art. *XXXV* & suiv. & donneroit la variation au milieu d'une partie du cylindre, partie que l'on pourroit prendre plus ou moins grande, suivant que le point dont on voudroit déterminer la variation, seroit plus ou moins près de l'extrémité *a*.



DE LA JONCTION

*Des Observatoires de Paris & de Greenwich , &
Précis des travaux géographiques exécutés en France
qui y ont donné lieu.*

Par M. DE CASSINI.

Lû à la
rentrée de
Pâques 1787.

AUCUN siècle ne s'est occupé avec plus de lumières & de succès que celui-ci , de la perfection de la géographie ; aucune nation n'a contribué plus que la nation Française , aux progrès de cette science. Je n'entreprendrai pas de faire le tableau des travaux immenses exécutés par des François au travers des montagnes du Pérou , sur les glaces du cercle polaire , au milieu des sables de l'Afrique. Je ne parlerai point des voyages & des essais multipliés faits sur mer , à l'occasion des diverses méthodes proposées pour la solution du problème des longitudes , & particulièrement des montres marines. Il ne sera question ici que des opérations faites dans l'intérieur de la France , & qui ont donné lieu à celles dont nous avons à rendre compte dans ce Mémoire.

Le célèbre Picard fut le premier qui , en 1669 , réunissant les méthodes géométriques & astronomiques , mesura avec des soins & une précision jusqu'alors inconnus , la distance entre Malvoisine & Amiens , & nous donna la première mesure exacte du degré du méridien. Quatorze années après , J. D. Cassini entreprit de décrire d'un bout à l'autre du royaume la méridienne de l'Observatoire , en continuant du côté du midi la chaîne de triangle que Picard avoit commencée vers le nord. Il s'appuya sur la base de Villejuif , mesurée par cet académicien ; & partant de ce terme , il poussa ses opérations , dans la même année

1684, jusqu'à l'extrémité méridionale du Berry : mais ces travaux qu'il espéroit poursuivre l'année suivante, furent interrompus par un événement funeste. Colbert mourut : la perte d'un ministre protecteur des arts & des sciences, est un coup affreux qui ne manque jamais d'arrêter ou de suspendre leurs progrès ; ainsi, dans une grande machine, lorsqu'un des ressorts principaux vient à manquer, tout mouvement est aussitôt interrompu.

Dix-sept années s'écoulèrent avant que l'on reprît la description de la méridienne ; enfin, vers 1700, le Roi informé par M. le comte de Pontchartrain & M. l'abbé Bignon, des avantages à retirer de la continuation de ce travail, ordonna d'en poursuivre l'exécution : elle fut reprise avec ardeur, & totalement achevée dans la partie méridionale du royaume en l'année 1701. Il ne restoit plus qu'à prolonger dans un petit espace depuis Amiens jusqu'à Dunkerque, les mesures de Picard vers le nord, afin d'avoir la méridienne tracée d'un bout à l'autre de la France, & la mesure de $8^d \frac{1}{2}$ du méridien : mais de nouveaux obstacles vinrent encore à la traverser ; ils ne furent levés qu'en 1718, où, grâce à ce zèle & à cette persévérance dont les sciences seules rendent les hommes capables, cette grande entreprise commencée en 1669, quittée & reprise à plusieurs fois, parvint à son entière exécution au bout de cinquante années.

Les projets de la politique ou de l'ambition n'ont souvent qu'une existence passagère, ils meurent pour l'ordinaire avec ceux qui les ont enfantés : mais dans les entreprises & les recherches des sciences exactes, il en est autrement ; la vérité ne change jamais de face, ses sectateurs ne meurent point, ils se succèdent ; & comme leurs principes sont invariables, leurs efforts tendent constamment au même but, & finissent par surmonter tous les obstacles. C'est ce qui aura toujours lieu chez une nation éclairée ; c'est ce que nous voyons s'accomplir particulièrement dans ce moment où les entreprises d'une véritable utilité, les établissemens

véritablement grands , après bien des traverses & des obstacles , trouvent enfin auprès d'un ministre éclairé une protection forte qui hâte & opère leur exécution.

La description du méridien dans toute l'étendue du nord au sud de la France , en rectifiant des erreurs grossières dans la position d'un grand nombre de villes , en établissant une base exacte & des points invariables , venoit de procurer les connoissances géographiques les plus précieuses. On sentit dès-lors plus que jamais les grands avantages que la géographie pouvoit retirer des travaux ainsi réunis de la géométrie & de l'astronomie. Encouragé par les premiers succès , on osa former le vaste projet de tracer pareillement de distance en distance , dans toute la France , des méridiens & des parallèles qui , liés entr'eux , compléteroient la description géométrique de tout le royaume. Familiarisé avec les obstacles qu'on avoit appris à vaincre dans les premières opérations , on ne fut point effrayé du temps considérable que demandoit l'exécution d'une pareille entreprise , des fatigues & des difficultés nouvelles qu'on alloit éprouver dans la liaison & le raccordement des parties d'un si grand ensemble. Louis XV voulut bien lui-même applaudir à ce projet & en ordonner l'exécution. M. Orry , pour lors contrôleur général , le seconda ; dès-lors tout devint possible : les travaux furent commencés en 1733 , & poursuivis sans interruption pendant onze années consécutives , au bout desquelles on parvint à couvrir toute la superficie de la France d'une chaîne d'environ deux mille triangles. On fit plus ; on embrassa dans ce travail une nouvelle description de cette fameuse méridienne dont nous avons parlé plus haut , & qui avoit déjà coûté tant de temps & tant de peines. Elle fut recommencée en 1739 par MM. l'abbé de la Caille & Cassini de Thury , & ce fut alors que l'on reconnut l'erreur qui s'étoit glissée dans les premières mesures , résultant de la trop grande confiance que l'on avoit eue dans la base de Picard , trop longue de six toises. Cette petite rectification eut de bien grandes conséquences ,

puisque'elle changea totalement la figure de la terre dont la forme avoit paru alongée par le résultat des anciennes opérations , & qui fut reconnue aplatie par celui des nouvelles , conformément aux principes de Newton , & d'accord avec les mesures faites au Pérou & au cercle polaire.

Un autre fruit de cette description géométrique de la France , dont le tableau a été publié en 1744, fut l'exécution de la carte générale du royaume , en cent quatre-vingt feuilles ; cet ouvrage immense dans son ensemble & les détails , commencé depuis quarante ans , doit être terminé à la fin de cette année , à la gravure près de quelques feuilles , dont on n'attendra pas long-temps la publication.

Tel est le précis des travaux géographiques entrepris dans l'intérieur de la France , pendant l'intervalle d'un siècle entier , sous les auspices de trois règnes consécutifs , dirigés par les lumières de l'Académie royale des sciences , & exécutés par plusieurs de ses membres. Une aussi longue expérience , d'accord avec la théorie , avoit démontré l'avantage des opérations trigonométriques sur les observations astronomiques , pour la détermination exacte de la position respective des lieux qui ne sont éloignés que de quelques degrés. En effet , les mesures géométriques sont à peine susceptibles de se tromper d'une toise sur quatorze mille de distance , tandis que dans les observations célestes qui fixent la latitude d'un lieu , on ne peut garantir une erreur de 5" qui répond à quatre-vingts toises ; & dans les observations de longitude , cette erreur peut être six & sept fois plus grande.

Cette considération devoit naturellement faire désirer de recourir à la méthode trigonométrique , pour lever les petites incertitudes qui restoient encore sur la différence de longitude & de latitude entre les deux plus célèbres observatoires de l'Europe , celui de Greenwich & celui de Paris. M. Cassini de Thury eut la confiance de s'adresser directement à Sa Majesté Britannique , & de lui proposer , en 1783 ,

cette vérification importante pour l'astronomie. Un projet utile , une opération qui tendoit à la perfection de la géographie intérieure de l'Angleterre , peu avancée jusqu'à ce jour , ne pouvoit manquer d'être accueillie par un souverain , amateur éclairé des sciences , protecteur des grandes découvertes & des entreprises glorieuses à la nation qu'il gouverne. Des ordres furent aussitôt donnés pour préparer la jonction de Londres & de Paris , par une suite de triangles qui s'étendant vers l'est jusqu'à Douvres , & traversant la mer pour se lier à la chaîne que mon pere avoit établie depuis la côte de France jusqu'à la méridienne , fixeroit invariablement les positions respectives des deux capitales , des deux observatoires & des deux côtes de l'un & de l'autre royaume.

Un ancien militaire , membre de la Société royale , dont les talens avoient déjà été éprouvés & reconnus dans ce genre de travail , le général major Roy , fut chargé de cette opération , & le célèbre Ramsden , de la construction des instrumens nécessaires. Si l'Angleterre jusqu'alors avoit pris peu de part aux grands travaux de la mesure de la terre , elle se distingua dans cette occasion particulière. Aidée des lumières & de l'expérience du siècle passé , secondée par les talens du plus grand artiste de l'Europe , elle s'appliqua à perfectionner toutes les parties de l'exécution d'une pareille opération : une base fut mesurée près de Londres avec des soins , un scrupule & des moyens tout nouveaux. Ce ne fut plus avec des perches de bois , ni des règles de fer , employées jusqu'alors ; on y substitua de longs tubes de verre , dont l'assemblage , les ajustages & toutes les parties répondoient à cette précision rigoureuse que l'on avoit à cœur d'atteindre. Un grand théodolite , instrument inventé par M. Ramsden , d'une construction très-ingénieuse & d'une exécution non moins parfaite , fut destiné & employé à la mesure des angles. Enfin , pour éviter dans la partie de l'observation de ces angles , jusqu'aux petites erreurs qui peuvent résulter de l'aspect variable des objets terrestres en

plein jour , on disposa pour signaux des réverbères & de nouveaux feux indiens , dont la lumière éclatante s'apercevant à une distance considérable , procuroit des points de mire invariables.

Tels furent les préparatifs & les moyens employés à la mesure de la distance de Londres à Douvres. Quant à la jonction de Douvres & de la côte d'Angleterre avec la nôtre , la Cour Britannique ayant désiré qu'elle se fît par une coopération mutuelle de savans des deux nations , j'eus l'honneur d'être choisi conjointement avec MM. Mechain & le Gendre, membres de cette Académie, pour concourir avec M. le général Roy à cette opération. On doit juger combien nous fûmes jaloux d'apporter dans la jonction , une précision équivalente à celle que l'on avoit mise dans la première partie de l'ouvrage. Nous nous proposâmes d'abord de ne point nous en tenir à la simple liaison des derniers triangles formés sur les deux côtes , mais de reprendre l'ancienne chaîne , & de remonter par de nouvelles mesures jusqu'à la méridienne. Nous ignorions quel devoit être l'instrument employé par les savans Anglois à la mesure des angles , & dont il étoit essentiel que la précision répondît à l'exactitude de la mesure scrupuleuse de la base. Nous savions seulement que cet instrument devoit être d'un assez grand rayon , & d'une grande perfection dans la division , digne enfin de l'artiste qui l'avoit exécuté , des soins & du temps considérable qu'il avoit mis à le construire. Nous n'avions pas eu à beaucoup près le même temps pour nous préparer à notre opération ; malgré cela , nous osâmes nous flatter d'avoir de notre côté un instrument qui , pour la précision des résultats , ne le céderoit pas à l'instrument Anglois : le sieur Lenoir , dont les talens sont parfaitement connus , fut chargé de construire un cercle entier d'un pied de diamètre , suivant les principes de M. le chevalier de Borda , & dans le genre des cercles dont cet Académicien a introduit depuis plusieurs années l'usage dans la marine. La théorie nous indiquoit la possibilité d'obtenir avec

cet instrument la mesure des angles à la seconde, & la pratique nous a prouvé depuis qu'il y a peu de choses à rabattre, de cette précision, que l'on est d'abord tenté de regarder comme imaginaire. En effet, on apprendra sans doute avec surprise que, malgré les circonstances défavorables de la saison la plus fâcheuse, nous sommes parvenus à des mesures tellement exactes, que l'erreur commune sur les trois angles de chaque triangle, n'a été que de $1'' \frac{1}{2}$, & la plus forte n'a pas passé $4'' \frac{1}{2}$. Or, avec les anciens instrumens, ceux même de deux & trois pieds de rayon, on étoit satisfait de fermer chaque triangle à vingt & trente secondes près. Nous ne doutons pas que l'instrument du général Roy n'ait donné des résultats aussi satisfaisans que le nôtre, d'autant que l'avantage de ne pointer que sur des signaux de feux, a dû lui sauver des erreurs dont nous n'avons pu nous garantir de notre côté, en visant de jour sur des objets différemment éclairés & inégalement distincts.

C'est le 23 septembre de la présente année que nous nous réunîmes à Douvres avec le général Roy & le docteur Blagden son adjoint, nommé par la Société royale pour assister aux opérations de la jonction. La saison avancée nous pressoit de commencer : dès la première entrevue nous arrê tâmes notre plan de campagne. MM. les commissaires Anglois avoient apporté avec eux les nouveaux feux & les réverbères dont ils avoient coutume de se servir pour signaux; ils nous en donnèrent la quantité nécessaire à allumer dans les divers endroits de la côte de France, que nous jugeâmes les plus favorables. Le docteur Blagden repassa la mer avec nous, & nous vîmes prendre nos différentes stations pour les signaux que le général Roy, resté sur la côte d'Angleterre, devoit observer de Douvres & de divers autres endroits. M. Mechain se chargea d'allumer les feux sur le mont Lambert près Boulogne, M. Blagden sur le clocher de Calais, M. le Gendre sur la tour de Dunkerque, & moi sur le cap Blancnez. Dans l'intervalle de dix-sept jours que durèrent ces signaux donnés & rendus à diffé-

rentes

rentes heures convenues d'avance , il régna des temps épouvantables , & cependant presque tous nos feux furent observés par le général Roy : la plupart des siens nous furent aussi visibles ; & ce que l'on aura peine à croire , nous avons aperçu un de ses réverbères à 40 milles de distance , malgré l'interposition des vapeurs de la mer qui nous séparoit. Nous n'avions osé nous flatter d'un succès aussi complet. Cette opération finie , M. Blagden repassa en Angleterre. Le général Roy qui avoit interrompu la chaîne des triangles qu'il conduisoit de Londres vers Douvres , s'occupa d'aller la rejoindre. De notre côté nous nous rendîmes à Dunkerque , & partant d'un des côtés de la méridienne , nous redescendîmes jusqu'aux triangles de jonction que nous venions de jeter d'une côte à l'autre : cette opération fut l'affaire de près d'un mois. Les pluies & les ouragans presque continuels nous firent craindre plus d'une fois d'être obligés de l'abandonner ; mais en dépit de tous les obstacles , nous eûmes la satisfaction d'avoir terminé le 12 novembre , toutes les mesures que nous avions à prendre du côté de la France. Une seule chose nous restoit à désirer ; c'étoit de pouvoir mesurer à Douvres , sur la côte d'Angleterre , un des mêmes angles observés avec le théodolite Anglois , & de nous procurer par-là une comparaison curieuse des deux instrumens. MM. Roy & Blagden ne le souhaitoient pas moins que nous : ils nous procurèrent à cet effet toutes les facilités & les commodités désirables ; mais nous l'essayâmes en vain dans deux voyages que nous fîmes à Douvres en allant à Londres , & en revenant en France. L'interposition des vapeurs de la mer & le mauvais temps ne nous permirent jamais d'apercevoir assez distinctement la côte de Calais. On sait combien la saison fut affreuse : elle étoit d'ailleurs trop avancée. MM. les commissaires Anglois , moins heureux que nous , avoient même été obligés d'interrompre leurs opérations , & ne purent relier les deux bouts de la chaîne de triangles.

Nous nous trouvons donc dans l'impossibilité de satisfaire aujourd'hui la curiosité du public sur le résultat définitif de

cette entreprise, c'est-à-dire, sur la différence précise des longitudes entre Paris & Londres. Nous ne la saurons qu'en lorsque le général Roy, qui n'attend que le retour de la belle saison, pour reprendre ses observations, aura entièrement formé la suite de triangles de Londres à Douvres, & l'aura jointe, par nos communes mesures sur la côte, à celles que nous avons fait remonter jusqu'à la méridienne, ce qui lui donnera la distance précise de Greenwich au méridien de l'observatoire royal de Paris. Mais en attendant, nous avons cru devoir rendre compte au public d'une entreprise qui, quant à la partie qui nous concernoit, est entièrement achevée, & dont un des principaux résultats, que l'on me permettra sans doute d'annoncer avec quelque satisfaction, est l'exactitude de la position de Douvres, déterminée anciennement par mon père, & qu'après une vérification scrupuleuse, avec le secours d'un instrument plus précis que tous ceux qu'on avoit employés avant nous, nous avons trouvée absolument la même.

Nous aurions de la peine à terminer ce Mémoire sans dire un mot du voyage que nous avons fait en Angleterre. M. le baron de Breteuil, dont les vues tendent toujours à l'utilité générale, & faisoient tout ce qui peut contribuer aux progrès des sciences, nous avoit chargés de visiter les principaux observatoires de Londres & des environs, d'observer ce qu'ils nous présenteroient de nouveau & d'instructif dans la partie des instrumens. Nous nous rendîmes à Londres aussitôt après nos opérations : la vérité & la reconnoissance ne nous permettent point de passer sous silence l'accueil que nous avons reçu chez une nation où les arts & les sciences sont aussi honorés que cultivés, & qui, juste appréciatrice des talens, est dans ce genre plutôt notre émule que notre rivale. Accueillis de toute part, prévenus par les principaux membres de la Société royale & par son digne président, nous avions à peine énoncé les objets de notre curiosité, que nos desirs étoient satisfaits. On se doute bien qu'une de nos premières visites, je

pourrois dire le premier lieu de notre pèlerinage , fut l'observatoire de Greenwich. Sa modeste apparence à l'extérieur, ne fait que relever davantage la richesse intérieure des grands & nombreux instrumens dont il est orné ; & ce mérite est bien le plus réel. A quelque distance de Greenwich est l'observatoire de M. Aubert, recommandable par le choix & la quantité d'instrumens de tout genre , mais moins grands que ceux de Greenwich. Nous passâmes ensuite à Oxford où se trouvent, comme à Greenwich, deux superbes muraux du même rayon , & nombre d'autres excellens instrumens. L'observatoire d'Oxford a sur les autres l'avantage d'une belle distribution intérieure & extérieure ; le bâtiment tout neuf n'est pas même encore entièrement fini. Mais, nous l'avouons , aucun de ces observatoires ne nous intéressa autant que celui de Bleinheim. Nous avons vu partout des instrumens dont la grandeur & la construction nous étoient parfaitement connues : on en possède de pareils en France ; mais à Bleinheim tout fut nouveau pour nous, tout excita notre curiosité. Il n'y a cependant que deux instrumens, mais ce sont deux chef-d'œuvres de M. Ramsden, & c'est tout dire. Dans la lunette méridienne qui a six pieds de foyer & quatre pouces d'ouverture, nous admirâmes entr'autres cette manière ingénieuse & nouvelle d'éclairer les fils de la lunette par l'axe , & de former toutes les dégradations & teintes de lumières que l'observateur peut désirer. C'est par le moyen d'une coulisse qui , portant des verres plans plus ou moins polis, ou différemment colorés, les présente en se haussant ou se baissant au rayon de lumière qu'une lampe envoie dans l'axe conique de la lunette, d'où ils sont réfléchis sur l'oculaire par le moyen d'un miroir incliné. Dans le quart de cercle de six pieds, que nous nommerons improprement mural , nous ne pûmes voir sans étonnement la hardiesse & l'habileté de l'artiste qui a suspendu l'instrument sur une espèce de chaffis ou déformé de quatre colonnes de cuivre , & mobile sur deux pivots , l'un supérieur , l'autre inférieur ; de sorte que cet instrument fait la fonction de cercle mobile & de cercle

mural, se tourne avec une facilité extrême du côté du nord & du sud, conformément à l'idée qu'avoit proposée le premier M. le Monnier, de cette Académie, & qu'il a même depuis long-temps mise en exécution, mais d'une autre manière, en fixant son mural contre un mur tournant sur un boulet. Il seroit trop long de décrire ici tous les détails ingénieux de la construction du mural mobile où le célèbre Ramsden nous a paru avoir, du côté de l'invention & de l'exécution, surpassé tout ce qui a été fait avant lui. Nous nous hâtons de parler de l'observatoire & de l'observateur de Slough, si célèbres depuis quelques années. M. Herschel ne fut pas plutôt informé de notre arrivée à Londres, qu'il partit de chez lui, vint nous trouver & nous prendre pour nous conduire à Slough : c'étoit sur le chemin d'Oxford & de Bleinheim; cette position favorable nous procura l'avantage de faire deux visites à M. Herschel, & de profiter de cette complaisance & de cette honnêteté qui forment le caractère propre de ce grand observateur.

Son télescope de quarante pieds de longueur & quatre pieds d'ouverture, étoit monté, mais point encore en état d'observer. Nous fûmes frappés de la simplicité & de la légèreté de sa monture; c'est la même, mais en plus grand, que celle du télescope de vingt pieds, dont les mouvemens sont d'une facilité extrême. Rien n'est plus simple & plus ingénieux que les moyens employés par M. Herschel pour diriger son télescope, pour lui faire parcourir telle ou telle partie du ciel par un mouvement tellement combiné qu'aucun objet ne lui échappe, & que le même astre traverse trois fois le champ, pour se reconnoître au milieu de ce torrent d'étoiles qui passe à la fois dans l'ouverture, pour démêler celles qui méritent attention, en déterminer la position, & pouvoir la retrouver au besoin. Les bornes qui nous sont ici prescrites, ne nous permettent pas des descriptions qui d'ailleurs seroient peu faciles à saisir sans l'aide d'une figure. Nous dirons seulement que dans les différentes nuits que nous passâmes à Sloug, le temps peu favorable ou la présence de la lune nous empêcha d'observer la nou-

DES SCIENCES.

velle planète & ses satellites : les vapeurs de l'horizon ne nous permirent de voir Saturne qu'un instant ; mais nous observâmes très-bien dans le télescope de vingt pieds, dont l'oculaire est placé au bout du tuyau, Jupiter, une des étoiles doubles, une nébuleuse résolue en étoile, une nébuleuse planétaire.

M. Herschel n'employa jamais un grossissement plus fort que 157 fois, avec lequel Jupiter ne nous parut pas aussi parfaitement terminé qu'on auroit pu le désirer : la constitution de l'air y contribuoit peut-être ; mais ce que nous vîmes avec le plus de satisfaction, c'est la nébuleuse du petit cheval, où nous distinguâmes parfaitement sur un fond clair une quantité de petits points lumineux ; c'est la nébuleuse planétaire de la main d'Andromède, dont la rondeur parfaite du disque, la pâleur & l'égalité de lumière offrent l'aspect d'une planète telle que Jupiter, qui seroit vue au travers d'un verre coloré qui lui ôteroit toute la vivacité de sa lumière. Nous observâmes aussi avec plusieurs autres télescopes de sept & de dix pieds, auxquels M. Herschel n'appliquoit que des grossissemens ordinaires d'environ quatre cents fois : nous lui parlâmes de ces apparences qu'il a observées anciennement sur le disque de la lune, & désignées sous le nom de *volcans*, & nous reconnûmes que l'on nous avoit mal indiqué leur position dans une figure qui nous avoit été envoyée d'Angleterre lors de la première découverte. Cette erreur nous avoit fait à tort révoquer en doute une observation de M. de Villeneuve, élève de l'Observatoire, qui, le 22 mai 1787, avoit cru apercevoir quelque chose de lumineux à un endroit qui se trouve effectivement être la place d'un des volcans de M. Herschel. La même apparence vient encore d'être aperçue le 13 de ce mois à l'Observatoire royal par M. l'abbé Nouet ; mais il faut, ce me semble, que ce phénomène, qui ne paroît qu'instantanément, ait été observé long-temps & revu plusieurs fois, pour oser prononcer sur sa nature. Rassembler des faits avant de chercher les explications & les causes, c'est la conduite d'un esprit sage, qui aime mieux se mettre en état de conclure que de se piquer de deviner.

ÉCLIPSES

DES SATELLITES DE JUPITER,

Et autres Observations faites à Perinaldo, par M. Maraldi.

Par M. DE CASSINI.

LE grand âge & les infirmités de M. Maraldi, membre de cette Académie, ne lui permettant plus de faire les observations astronomiques qu'il avoit toujours continué de suivre à Perinaldo depuis son départ de France, M. son neveu, Jacques-Philippe Maraldi, s'est fait depuis quelques années un devoir de suppléer M. son oncle, & m'a adressé les observations suivantes des Satellites de Jupiter, depuis le 2 janvier 1787, jusqu'au 8 mai 1788. Il y a joint l'observation de la dernière éclipse de soleil du 4 juin, dont il n'a vu que le commencement.

Les observations ont été faites avec une lunette acromatique de trois pieds, de M. de l'Etang.

1787.	H. M. S.		
	Temps vrai.		
Janvier 1.	4. 44. 8 s.	Émerf. I.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
2.	6. 7. 46 s.	Imm. III.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
	7. 47. 41 s.	Émerfion	<i>Idem.</i>
3.	8. 51. 16 s.	Émerf. II.	Beau temps.
7.	0. 7. 25 m.	Émerf. I.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
9.	10. 5. 12 s.	Imm. III.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
	11. 46. 56 s.	Émerfion	<i>Idem.</i>
Mars 10.	7. 25. 10 s.	Émerf. I.	Beau temps : les bandes sont distinctes.

1787.	H.	M.	S.	
	Temps vrai.			
Août 16.	4.	0.26 m.	Imm. I.	Beau temps.
20.	2.	26.27 m.	Imm. III.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
	4.	41.50 m.	Émerfion	Il fait grand jour, de sorte qu'on ne voit plus que Jupiter seul.
Sept. 1.	2.	21. 4 m.	Imm. I	Beau temps : les bandes sont distinctes.
8.	4.	17. 4 m.	Imm. I.	<i>idem.</i>
13.	2.	34.10 m.	Imm. II.	Beau temps, bandes bien distinct.
20.	5.	10.41 m.	Imm. II.	Les bandes ne sont point distinct. il fait jour.
24.	2.	37.41 m.	Imm. I.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
Octob. 7.	11.	48. 6 f.	Imm. II.	On ne distingue pas les bandes; l'objectif est humide.
17.	2.	53. 7 m.	Imm. I.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
22.	5.	2.58 m.	Imm. II.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
Nov. 1.	8.	57.57 f.	Imm. II.	On ne distingue pas les bandes.
16.	2.	10.18 m.	Imm. II.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
26.	7.	45.39 f.	Imm. I.	Beau temps : les bandes sont distinctes.
Déc. 3.	8.	37.23 f.	Imm. II.	Ciel chargé de vapeurs; on ne distingue pas les bandes.
	9.	35.59 f.	Imm. I.	Beau temps : les bandes sont bien distinctes.

1788.	H.	M.	S.		
					Temps vrai.
Janv. 11.	9.	56.	51 f.	Émer. I.	Beau temps: les bandes sont bien distinctes; le vent agite la lunette.
12.	1.	28.	49 m.	Émer. II.	Beau temps: les bandes sont bien distinctes.
20.	6.	17.	50 f.	Émer. I.	Beau temps: les bandes sont distinctes; le vent agite la lunette.
24.	5.	57.	19 f.	Imm. III.	Beau temps: les bandes sont distinctes.
	8.	59.	30 f.	Émer. III.	<i>Idem.</i>
29.	7.	59.	27 f.	Émer. II.	Beau temps: bandes bien distinct.
Fév. 13.	1.	14.	42 m.	Émer. II.	Beau temps: les bandes sont distinctes.
26.	10.	21.	40 f.	Émer. I.	Ciel chargé de vapeurs: on ne distingue pas les bandes.
Mars 2.	7.	55.	16 f.	Imm. IV.	Les bandes sont distinctes; l'objectif étoit humide.
	9.	38.	18 f.	Émer. IV.	Ciel chargé de vapeurs: on ne distingue pas les bandes.
7.	8.	43.	24 f.	Émer. III.	Beau temps: les bandes sont distinctes.
13.	8.	44.	7 f.	Émer. I.	Beau temps: les bandes sont bien distinctes.
20.	10.	42.	52 f.	Émer. I.	Le ciel chargé de vapeurs: on ne distingue pas les bandes.
29.	7.	9.	25 f.	Émer. I.	On ne distingue point les bandes.
Avril 2.	7.	47.	42 f.	Émer. II.	On ne distingue pas les bandes; le vent agite très-fort la lunette.
9.	10.	26.	19 f.	Émer. II.	Beau temps: les bandes sont bien distinctes.
19.	9.	8.	55 f.	Émer. III.	Beau temps: les bandes sont bien distinctes.
Mai 8.	8.	19.	4 f.	Imm. IV.	Beau temps: les bandes sont distinctes.

Observation de l'Eclipse de Soleil du 4 Juin 1788.

1788.	H. M. S.	
	Temps vrai.	
Juin 4.	7. 37. 50.m.	Commencement de l'éclipse du ☉.
	7. 46. 44.	Commencement de l'immersion d'une tache.
	7. 47. 43.	Immersion totale de la tache.
	8. 14. 56.	Commencement de l'immersion de la tache ronde.
	8. 19. 3.	Immersion totale de la tache ronde.
		A 9 ^h 30' le Soleil s'est couvert, & il ne s'est découvert qu'à 9 ^h 42' 25", & l'éclipse étoit finie.



E S S A I

*Sur l'uniformité des Mesures , tant linéaires que de capacité
& de poids ;*

*Et sur une nouvelle manière de construire les toises destinées
à servir d'étalon.*

Par M. B R I S S O N.

Lu le 14
avril 1790.

M. l'évêque d'Autun a proposé à l'Assemblée Nationale de rendre uniformes dans tout le royaume les poids & les mesures. Cette idée qui s'est présentée depuis long-temps à plusieurs savans, a été goûtée par de grands administrateurs : ils ont senti , avec raison , combien cette uniformité seroit utile au commerce. J'ai fait là-dessus quelques réflexions qui me l'ont fait juger facile à établir. J'ai l'honneur de les soumettre au jugement de l'Académie.

Je ne connois dans la nature , de longueur constante que celle du pendule pour un lieu déterminé : je ne connois de poids invariable , pour un volume déterminé & une température donnée , que celui de l'or à 24 karats ou de l'argent à 12 deniers , ou de l'eau distillée. Ce sont donc cette longueur constante & ce poids invariable qui doivent servir de base à l'établissement de l'uniformité des mesures , tant linéaires que de capacité & de poids.

Comme la longueur du pendule varie suivant les différentes latitudes , il est nécessaire de faire usage de celle d'une latitude déterminée ; mais il me paroît égal de choisir l'une ou l'autre , pourvu qu'elle soit bien connue. On a proposé de choisir pour mesure élémentaire , la longueur du pendule qui bat les secondes à 45 degrés de latitude : mais cette longueur n'a été que calculée ; il faudroit la connoître par l'expérience , ce qui exigeroit un travail long & pénible. Si l'on préféroit la longueur du pendule prise à la latitude

de 45 degrés, ce seroit sans doute parce que ce point est le terme moyen entre l'équateur & le pôle, & que l'on croiroit avoir par-là une longueur moyenne entre celle du pendule qui bat les secondes à l'équateur & celle du pendule qui les battoit au pôle : mais on n'auroit point cette longueur moyenne ; car la longueur du pendule, qui paroît devoir être proportionnelle à la latitude, ne l'est probablement pas dans le fait ; c'est-à-dire, que cette longueur, exactement mesurée à une latitude quelconque, ne se trouvera pas proportionnelle à cette latitude : il faudroit, pour qu'elle se trouvât telle, que l'aplatissement de la terre eût donné à sa surface une courbure régulière, ce qui n'est probablement pas. Pourquoi ne prendroit-on pas pour mesure élémentaire la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris ? celle-ci est bien connue ; elle a été déterminée par des expériences rigoureuses, faites par M. de Mairan (*Mém. de l'Acad. des Sc. an. 1735, pag. 153*), & elle ne diffère que très-peu de celle du pendule à 45 degrés. Ce choix épargneroit beaucoup de temps, de travail & de dépenses.

Supposons donc qu'on choisisse pour mesure élémentaire, la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris : cette longueur est de 3 pieds 0 pouce $8\frac{17}{32}$ lignes. Ce sera d'après elle qu'on déterminera toutes les mesures linéaires : on comptera cette longueur totale pour 3 pieds seulement. La toise nouvelle aura une longueur double, c'est-à-dire, qu'elle aura 6 pieds 1 pouce $5\frac{2}{15}$ lignes de la mesure actuelle, qui ne seront comptés que pour 6 pieds. Chaque pied aura donc 1 pied 0 pouce $2\frac{7}{10}$ lignes, & chaque pouce aura 1 pouce $\frac{257}{1080}$ de ligne de la mesure actuelle, auquel cas les toise, pied & pouce nouveaux seront aux toise, pied & pouce actuels, à très-peu de chose près, comme 51 à 50.

Pour laisser à l'aune une longueur peu différente de celle de Paris, on pourra lui donner 3 pieds 6 pouces, pris sur la nouvelle toise ; ce qui vaudra de la mesure actuelle, 3 pieds 6 pouces $9\frac{179}{180}$ lignes ; de sorte que l'aune nouvelle ne

différera de l'aune usitée que d'environ 1 pouce, dont elle sera plus courte.

Le degré du méridien, mesuré à Paris avec la nouvelle toise, au lieu de 57070 toises, n'aura que 55960 toises 2 pieds 11 pouces 10 lignes. Cela n'empêche pas que ces deux longueurs ne soient la même, mais différemment exprimée, à cause des différences des mesures élémentaires.

Pour ne rien déranger aux calculs astronomiques, qui tous sont faits dans la supposition de 25 lieues au degré, je pense qu'il convient de continuer à diviser le degré en 25 lieues, dont chacune, mesurée avec la nouvelle toise, fera de 2238 toises 2 pieds 6 pouces 2 $\frac{4}{5}$ lignes; au lieu que cette même lieue, mesurée avec la toise actuelle, est de 2282 toises 4 pieds 9 pouces 7 $\frac{1}{5}$ lignes.

Le mille sera composé de 1000 toises nouvelles, qui, comparées aux toises actuelles, équivaldront à 1019 toises 4 pieds 11 pouces 9 $\frac{1}{5}$ lignes. En conséquence le nouveau mille sera au mille actuel, à très-peu de chose près, comme 51 à 50, dans le même rapport que la toise nouvelle à la toise actuelle.

Toutes les autres mesures linéaires seront, comme celles-ci, dérivées de la longueur constante du pendule qui bat les secondes à Paris.

Quant aux mesures de poids, j'ai dit ci-dessus que je ne connoissois que trois substances qui pouvoient en donner une invariable, savoir l'or, l'argent & l'eau; mais comme il pourroit souvent être assez difficile de se procurer l'or & l'argent dans un état de pureté parfaite, ce qui seroit cependant nécessaire pour l'invariabilité du poids, je pense qu'on doit préférer l'eau distillée, qui est toujours la même; c'est donc de son poids dont je vais faire usage.

Les mesures de capacité doivent toutes dériver du pied cube, mesuré sur la nouvelle toise. La nouvelle toise étant plus grande que la toise actuelle, le nouveau pied cube sera aussi plus grand que le pied cube actuel. Ce dernier, d'eau distillée, pèse 70 livres: le nouveau pèsera 74 livres 3 onces 7 gros 48 grains, poids de marc; de sorte que le premier

sera au dernier, à très-peu de chose près, comme 33 à 35.

Je voudrois ensuite que la livre, la pinte, le setier, le boisseau, &c. fussent tous des parties aliquotes ou des multiples du pied cube. J'énonce donc le poids du nouveau pied cube d'eau par 64 livres. La livre d'eau sera donc $\frac{1}{64}$ de ce pied cube, ou 27 pouces cubes, qui sont le cube de 3 pouces; & la livre de toute autre substance sera $\frac{1}{64}$ du poids du pied cube d'eau. Cette livre sera à notre livre, poids de marc, à très-peu de chose près, comme 29 à 25; car elle pèsera 1 livre 2 onces 4 gros 35 $\frac{5}{8}$ grains, poids de marc.

La pinte sera d'une capacité double, c'est-à-dire, $\frac{1}{32}$ du pied cube, ou 54 pouces cubes. Cette pinte d'eau pèleroit 2 livres 5 onces 0 gros 71 $\frac{1}{4}$ grains, poids de marc, qui ne vaudront que deux livres suivant la nouvelle mesure; & cette pinte sera à la pinte de Paris, à très-peu de chose près, comme 6 à 5.

Le setier de liqueur sera $\frac{1}{4}$ de pied cube ou 8 pintes.

Le muid de liqueur sera 36 setiers ou 9 pieds cubes, ou 288 pintes.

Le boisseau sera $\frac{1}{2}$ de pied cube ou 864 pouces cubes, & sera au boisseau de Paris, à peu-près, comme 10 à 7.

Le setier de grains ou 12 boisseaux seront 6 pieds cubes, &c. Il n'y a point de mesure, de quelque nature qu'elle soit, qu'on ne puisse régler sur celles-ci.

Toutes ces nouvelles mesures étant une fois régies, il me sera facile de déterminer, d'après les nouveaux poids, celui du pouce cube & du pied cube des différentes substances dont j'ai fait connoître la pesanteur spécifique; & c'est un travail auquel je m'engage, si toutefois les nouveaux poids sont réglés avant la fin de ma carrière.

On voit par ce que je viens de dire, que la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris, devient l'élément de toutes les mesures linéaires, & que du pied cube, qui lui-même tire sa mesure de cette longueur, dérivent toutes les mesures de capacité, tandis que les poids sont déterminés par celui du nouveau pied cube d'eau.

Toutes ces déterminations sont très-simples & très-faciles à exécuter, car elles ne dépendent que de deux quantités, qui sont en elles-mêmes invariables; savoir, la longueur du pendule à une latitude déterminée, & le poids de l'eau à une température donnée.

Il ne reste plus qu'un inconvénient, auquel il est nécessaire de remédier; c'est la variation de la longueur de la toise, par la différence de la température. On sait qu'une toise de fer ou d'acier, telle que sont celles que l'on conserve pour étalon, est susceptible de s'allonger du plus grand froid au plus grand chaud, d'environ $\frac{4}{7}$ de ligne: une toise de cuivre jaune s'allongeroit bien davantage par la même variation de température. On sait aussi que le bois ne change de dimension que d'une quantité presque insensible dans le sens de la longueur de ses fibres.

Je pense donc qu'il faut faire une toise de quelque bois dur, comme, par exemple, de bois de gayac, ou tout autre, pourvu que ses fibres soient droites & qu'il n'y ait point de nœuds, armée à ses deux extrémités d'une plaque d'acier trempé de tout son dur, afin de les garantir de l'usure. Une pareille toise variera infiniment peu de longueur, quels que soient les changemens de température qu'elle éprouvera. Il est vrai qu'elle pourroit se voiler, mais pour l'en empêcher, on donnera à la règle de bois qui formera la toise, environ 4 pouces de largeur & 10 à 12 lignes seulement d'épaisseur. Les surfaces larges seront, comme l'on fait, les seules qui pourront se courber. On prévientra cette courbure, en appliquant sur chacun des petits côtés une règle d'acier plus courte que la toise d'environ 1 pouce, & qui y sera attachée par plusieurs clous à vis, qui traverseront la toise d'un petit côté à l'autre, en passant dans des trous, non pas ronds, mais ovales, afin de donner à la règle d'acier la liberté de changer de dimension, indépendamment de l'invariabilité de la longueur de la toise de bois; & ces clous seront retenus par des écrous à oreilles, que l'on pourra serrer ou desserrer, suivant les différentes variations de la largeur de la toise.

Je pense qu'une toise ainsi construite, seroit un étalon plus sûr & moins variable que tous ceux qu'on a construits jusqu'à présent. Si le gouvernement le désire, je me chargerai de la faire exécuter, ainsi que les étalons des autres mesures de capacité & de poids.

T A B L E des comparaisons des mesures actuelles avec les nouvelles ; de l'expression de la valeur de ces nouvelles mesures , & leur rapport avec les mesures actuelles.

MESURES linéaires.	MESURES actuelles.	MESURES nouvel'es.	EXPRESSION de leur valeur.	Rapport.
	pieds. pouc. lig.	pieds. pouc. lig.	pieds. pouc. lig.	Nouv. Ad.
Long. du pendule à secondes à Paris..	3. 0. $8\frac{17}{10}$	3. 0. $8\frac{17}{30}$	3. 0. 0	
Toise.....	6. 0. 0	6. 1. $5\frac{1}{15}$	6. 0. 0	51 à 50
Pied.....	1. 0. 0	1. 0. $2\frac{77}{90}$	1. 0. 0	51 à 50
Pouce.....	0. 1. 0	1. 0. $\frac{217}{1080}$	0. 1. 0	51 à 50
Aune.....	3. 7. 10	3. 6. $9\frac{179}{180}$	3. 6. 0	43 à 44
Degré du méridien à Paris..	toises. 57070.....	toises.	toises. 55960. 2. 11. 10	1 à 1
Lieue de 25 au deg.	2282. 4. 9. $7\frac{1}{3}$	2238. 2. 6. $2\frac{4}{3}$	1 à 1
Mille.....	1000.....	toises. 1019. 4. 11. $9\frac{1}{3}$	1000.....	51 à 50
<i>M. sures de capacité ou de poids.</i>				
	liv. onc. gros. gr.	liv. onc. gros. gr.	liv. onc. gros. gr.	
Pied cube, d'eau..	70. 0. 0. 0	74. 3. 7. 48	64. 0. 0. 0	35 à 33
Pouce cube, d'eau. 5. 13 $\frac{1}{3}$ 5. 35 $\frac{71}{72}$ 4. 53 $\frac{1}{3}$	35 à 33
Liv. 27 pouc. cub. d'eau.....	1.....	1. 2. 4. 35 $\frac{5}{8}$ pied cube. 1..... $\frac{1}{64}$	29 à 25
Pinte, 54 pouces cubes de u.....	1. 15. 0. 64	3. 5. 0. $71\frac{1}{2}$	2..... $\frac{1}{32}$	6 à 5
Setier de liqueur..	pintes. 8..... $\frac{1}{4}$	6 à 5
Muid de liqueur..	288..... 9	6 à 5
Boisseau de Paris..	pouc. cub. 644 $\frac{2}{3}$	pouc. cub. 864..... $\frac{1}{2}$	10 à 7
Setier de grains, ou 12 boisseaux...	7736.....	10368..... 6	10 à 7



OBSERVATIONS

Sur la combinaison des Oxides métalliques avec les Alkalis & la Chaux.

Par M. BERTHOLLET.

Décembre
1788.

L'HABITUDE d'observer des propriétés opposées dans les acides & dans les substances qu'ils dissolvent, a dû porter les anciens chimistes à supposer une nature alcaline dans tous les corps qui, en se combinant avec les acides, forment une substance nouvelle; & les précipités métalliques produits par les alkalis ont dû être regardés comme des alkalis moins forts qui cèdent à une affinité plus puissante.

Cependant on avoit déjà observé que les alkalis pouvoient dissoudre quelques-uns de ces précipités, lorsque Margraff fit voir que la plupart étoient solubles; mais il confondit les alkalis purs, les alkalis combinés avec l'acide carbonique, & les prussiates d'alkalis. Ses expériences n'offrent que des résultats vagues; quelques-unes ont été contredites, & à cette époque l'on distinguoit les dissolutions des combinaisons chimiques.

Schéele nous fit connoître que trois substances métalliques pouvoient prendre l'état d'acide, ce qui détermina Bergman à regarder les métaux comme des acides saturés de phlogistique, & les oxides ou chaux métalliques comme un état moyen entre celui des métaux & celui des acides métalliques, de sorte que plus dépouillés de phlogistique, ils feroient de vrais acides. L'on se rappelle des découvertes importantes dont nous sommes redevables à M. Lavoisier, sur l'acidification de plusieurs substances qui se combinent avec l'oxigène.

Ces analogies sont trompeuses; il me paroît que les métaux qui sont oxigénés & qui cependant n'ont pas le caractère

caractère d'un acide , exercent les fonctions d'un alkali avec les acides & celles d'un acide avec les alkalis : je les considère comme un terme qui donne naissance à deux progressions opposées.

Je suivois des recherches sous ce point de vue , lorsqu'elles me conduisirent à l'argent fulminant que je présentai le 4 juin dernier. M. de Fourcroy s'est occupé du même objet ; il a déjà lu un mémoire intéressant sur les combinaisons de l'ammoniaque, & il en a annoncé plusieurs autres. J'ai cru devoir , avant qu'il les publiât , présenter mes essais , quelque imparfaits qu'ils soient.

Bergman avoit observé que les alkalis fixes caustiques dissolvoient l'oxide de plomb. J'ai éprouvé que la chaux avoit aussi cette propriété. J'ai fait bouillir de l'eau de chaux avec de l'oxide de plomb rouge ou minium, & avec de l'oxide demi-vitreux ou litharge ; il s'est dissous de ces deux substances , mais une plus grande quantité de l'oxide demi-vitreux : c'est de cette dernière dissolution que je me suis servi pour les expériences suivantes.

Cette dissolution évaporée dans une cornue , a donné de très-petits cristaux qui sont transparens & qui forment des iris ; ils ne m'ont pas paru beaucoup plus solubles dans l'eau , que ne l'est la chaux elle-même.

La combinaison dont je viens de parler , est décomposée par le sulfate de potasse , par le sulfate de soude & par le muriate de soude : l'acide sulfurique & l'acide muriatique se précipitent avec l'acide de plomb. C'est un moyen de séparer l'alkali de ces sels.

Les sulfures d'alkali en précipitent le plomb , ainsi que le gas hydrogène sulfuré.

Cette combinaison a la propriété de noircir quelques substances animales , telles que la laine , les ongles , les cheveux & le blanc d'œuf ; mais elle n'agit pas sur la couleur de la soie , de la peau , du jaune d'œuf & de l'huile animale ; c'est le plomb qui est précipité sur les

substances qu'il colore en noir, & il est encore dans l'état d'oxide; car tous les acides ont la propriété de le dissoudre.

Le simple mélange de l'oxide de plomb avec la chaux, noircit les substances que j'ai nommées; ce qui indique que la combinaison se fait facilement, mais la chaleur favorise cet effet. Quelques personnes se servent de ce mélange pour noircir les cheveux blancs, & ce moyen est moins nuisible aux cheveux que ne le sont les dissolutions métalliques; cependant il affoiblit les substances animales: il paroît que c'est en raison de la chaux; car ayant fait bouillir deux échantillons de laine dans l'eau de chaux & dans la dissolution d'oxide de plomb par la chaux, le premier m'a paru autant affoibli que le second.

L'ammoniaque ne précipite pas le nitrate d'argent lorsqu'il a un excès d'acide; mais s'il n'a point d'excès d'acide, il se forme un petit précipité noir, & la liqueur reste claire. Il ne faut pas conclure de là que l'oxide d'argent a autant d'affinité avec l'acide nitrique que l'ammoniaque; c'est un sel triple qui se forme, & qui par l'évaporation donne des cristaux qui ont été observés par Margraff: c'est probablement ce même sel qu'a vu Bergman, & dont il parle dans son traité des affinités, §. *L V I I*, comme d'une combinaison de l'argent & de l'ammoniaque.

Ce qui arrive dans cette occasion, est un phénomène qu'on pourroit observer dans la formation de la plupart des sels triples qui prennent dans leur composition une plus petite quantité de chacun des composans, qu'il n'en falloit pour un sel formé de deux de ces substances. C'est ainsi que M. Higgins a remarqué que l'ammoniaque ne précipite qu'une portion de la magnésie tenue en dissolution par un acide, parce que l'autre partie reste en dissolution & forme un sel triple; ce qui explique des anomalies observées par plusieurs chimistes dans les combinaisons de cette terre.

Le nitrate d'argent abandonne donc une portion de l'oxide d'argent, lorsqu'il est dans un état de saturation;

mais lorsqu'il a un excès d'acide, ce superflu d'argent se combine avec l'excès d'acide & avec l'ammoniaque pour former également un sel triple. Le nitrate d'argent & d'ammoniaque se décompose par la chaleur sans fulminer : lorsqu'il est en dissolution, la chaux en précipite l'oxide d'argent, mais l'alkali volatil qui en est dégagé en retient une partie. Je n'ai pu constater si ce précipité, ainsi que celui qu'on obtient par la chaux d'une dissolution nitrique, étoit combiné avec une petite portion de chaux.

Lorsqu'on a décomposé le nitrate d'argent par la chaux ou par les alkalis fixes (caustiques), le précipité qui est d'une couleur brune, se dissout presque entièrement dans l'ammoniaque; mais si on le fait sécher auparavant sur du papier à filtrer, on le dépouille par-là du nitrate qui s'est formé pendant la précipitation, sur-tout lorsque c'est un nitrate de chaux, & alors il présente avec l'ammoniaque d'autres propriétés. J'avois attribué à l'action de la lumière, ce changement qui dépend uniquement de l'absorption du papier à filtrer.

Dans cet état, l'oxide d'argent produit avec l'ammoniaque avec laquelle on le mêle, une espèce de frémissement semblable à celui qui a lieu lorsqu'on éteint la chaux vive dans l'eau, une partie seulement se dissout. Qu'on laisse reposer ce mélange dix à douze heures, on voit se former à la surface une pellicule brillante; qu'après ce temps on ajoute encore de l'ammoniaque, la pellicule se redissout. Si cependant on avoit mis d'abord une grande quantité d'ammoniaque, l'on n'auroit pas besoin d'en ajouter une seconde dose, & la pellicule ne se seroit pas formée. Qu'enfin on décante la liqueur, & que pour sécher le précipité qui est devenu noir, on le dépose sans secousse sur un papier à filtrer, on lui trouvera les propriétés suivantes.

Lorsque ce précipité est encore humide, si on le presse avec un corps dur, il fulmine avec violence, & l'argent se trouve réduit; mais s'il est sec, il suffit, pour le faire fulminer, de le toucher ou d'exciter un petit frottement en

le transportant ; l'ébranlement qui naît d'une fulmination , peut la communiquer à plus de deux pouces de distance.

Si l'on remplit une petite cornue de la liqueur qu'on a décantée , & si on la fait entrer en ébullition , il se dégage des bulles qui sont du gaz azote , & il se forme des petits cristaux qui sont opaques & qui ont un éclat métallique ; ces cristaux fulminent dès qu'on les touche , quoiqu'ils soient couverts de liqueur , & même ils la chassent avec violence , s'ils sont en certaine quantité , & brisent les vaisseaux de verre d'une manière dangereuse.

Les propriétés de l'argent fulminant ont une telle analogie avec celles de l'or fulminant dont j'ai donné l'explication dans les *Mémoires de l'Académie de 1785* ; elles répondent tellement à la nature connue de l'ammoniaque & de l'oxide d'argent , que j'ai cru inutile de m'exposer aux expériences dangereuses qu'auroient exigées les phénomènes de cette fulmination pour en établir directement la théorie.

L'oxide d'argent s'est combiné avec l'ammoniaque comme fait l'oxide d'or pour former l'or fulminant : son oxygène y tient très-peu ; de là vient sa grande causticité , ainsi que je l'ai fait voir ailleurs , & la facilité avec laquelle il se réduit par la simple chaleur ; cependant l'oxygène étant privé d'une grande partie de son élasticité , il est très disposé à former des combinaisons. D'un autre côté , l'hydrogène de l'ammoniaque se trouve dans la même disposition : une petite circonstance peut donc déterminer cette combinaison qui forme de l'eau en laissant l'argent dans l'état métallique : (a) mais l'oxygène & l'hydrogène qui dans ce cas se trouvent l'un & l'autre peu comprimés , pour ainsi dire , vu la foible affinité qui agit sur eux , contiennent beaucoup de caloriques ,

(a) Dans la fulmination , tout l'argent n'est pas réduit , une partie reste en oxide noir , de même qu'une partie de l'or reste en oxide pourpre. Cette partie qui reste non réduite & qui est variable selon les circonstances , doit être considérée comme étrangère aux phénomènes de la fulmination.

& ils sont obligés d'en abandonner beaucoup lorsqu'ils se réunissent pour former l'eau ; de là vient que celle-ci reçoit une grande expansion dans l'instant même de sa formation. Mais l'eau en vapeur n'est pas la seule cause de la dilatation subite ; le gaz azote qui se dégage de l'ammoniaque , y contribue aussi (*voyez les Mémoires de l'Acad. 1785*).

Dans la dissolution d'argent qui donne naissance aux cristaux fulminans dont j'ai parlé, le métal paroît trop oxygéné pour former l'argent fulminant ; mais par l'ébullition, une partie de l'ammoniaque se décompose, d'où vient le gaz azote qui se dégage ; son hydrogène se combine avec une partie de l'oxygène, & alors se forme l'argent fulminant ; dont les molécules qui ne sont plus solubles dans l'eau se réunissent en cristaux : c'est, pour ainsi parler, le commencement du phénomène de la fulmination qui s'exécute.

La pellicule qui se forme à la surface de la même liqueur, est due à l'oxide d'argent, auquel l'air paroît enlever l'ammoniaque par une supériorité d'affinité. Je recommande de la dissoudre par une nouvelle affusion d'ammoniaque, parce que son interposition diminueroit considérablement l'effet de l'argent fulminant.

Le nitrate & le muriate de Baryte ont précipité la dissolution précédente ; mais je n'ai pas examiné les précipités.

Le carbonate d'ammoniaque dissout l'oxide d'argent précipité par la chaux, & cela avec effervescence ; c'est une partie de l'acide carbonique qui se dégage : l'autre partie forme avec l'oxide d'argent & l'ammoniaque, un sel triple qui étant desséché, laisse une poudre jaune qui noircit au feu sans fulminer.

L'oxide d'argent précipité par la chaux reprend de l'acide carbonique, lorsqu'on le laisse long-temps exposé à l'air ; & alors il n'est plus propre à former l'argent fulminant, ainsi que l'ont observé MM. de Virli & de Morveau, parce qu'il forme un sel triple, semblable à celui dont je viens de parler.

Le mélange d'un peu de cuivre empêche la formation de l'argent fulminant ; probablement il se fait aussi un sel triple , qui n'a plus les mêmes propriétés.

L'on peut donc ne pas réussir à la préparation de l'argent fulminant , ou parce qu'on a employé un argent allié d'une portion de cuivre ; ou parce qu'on n'a pas séparé exactement les nitrates qui se sont formés dans la précipitation de l'argent ; ou parce qu'on s'est servi d'une ammoniaque qui n'étoit pas assez privée d'acide carbonique ; ou parce que l'oxide d'argent en avoit repris dans l'atmosphère. Je dois ajouter que , lorsqu'on a fait la précipitation avec les alkalis fixes , l'argent n'est pas aussi fulminant que lorsqu'on s'est servi de la chaux.

L'on avoit déjà donné le nom d'*argent fulminant* au précipité du nitrate d'argent par l'acide oxalique , dans lequel M. Klaprot avoit découvert la propriété de fuser avec vivacité , lorsqu'on l'expose à la chaleur. M. Ameilhon avoit aussi depuis long-temps fait connoître que l'acide oxalique communiquoit cette propriété au mercure , quoiqu'à un degré inférieur qu'à l'argent ; mais cet effet est fort éloigné de celui qu'on désigne par la fulmination , & au contraire celui que produit l'oxide d'argent ammoniacal répond tellement à cette dénomination , que j'ai cru devoir la lui transporter.

On a pensé jusqu'à présent que l'inflammation des corps se produisoit toujours , parce qu'on élevoit leur température ; mais il étoit difficile d'expliquer par-là comment l'on pouvoit décider la combinaison des principes , qui , en se réunissant , devoit abandonner la chaleur & la lumière. M. Monge a exposé avec énergie cette espèce de contradiction , lorsqu'il a discuté les phénomènes de la formation de l'eau : « Les » deux bases , dit-il , en abandonnant le feu qui les dissol- » voit , se combinent pour produire de l'eau ; il arrive » donc qu'en élevant la température , c'est-à-dire , qu'en » introduisant du feu dans le mélange des deux gaz , ou , » pour mieux dire encore , qu'en augmentant la dose

» du dissolvant, on diminue l'adhérence qu'il avoit pour
 » ses bases; ce qui est absolument contraire à ce qu'on
 » observe dans toutes les opérations analogues de la chymie ».

» Il nous manque donc encore, ajoute-t-il, beaucoup
 » de lumière sur cet objet, mais nous avons droit de les
 » attendre & du temps & du concours des travaux des
 » physiciens. » Ces lumières, nous les devons à M. Monge
 lui-même : en continuant de s'occuper de cet objet, il
 parvint à l'idée que la compression produite, soit par un
 moyen mécanique, soit par la chaleur, pourroit bien être
 la principale cause qui, en rapprochant les molécules du
 centre de l'action de leur affinité, les obligerait à se
 combiner & à relâcher la partie de leur calorique, qui ne
 pourroit pas entrer dans leur nouvelle combinaison.

Cette opinion me paroît prouvée non seulement par les
 propriétés de l'argent fulminant, mais encore par plusieurs
 phénomènes dont je rappellerai quelques-uns.

En effet, l'argent ne fulmine pas à la chaleur de l'eau
 bouillante, il lui faut une température plus élevée; or l'on
 ne peut supposer que la légère compression d'un simple
 contact produise une chaleur sensible.

L'accident arrivé chez M. Baumé, lorsqu'on comprima
 quelques molécules d'or fulminant qui se trouvoient dans
 le goulot d'un flacon, prouve bien que la compression peut
 seule faire fulminer l'or, quoiqu'elle doive être plus forte
 que celle qu'exige l'argent. Nous avons observé que la
 poudre faite avec le muriate oxigéné de potasse, s'enflam-
 moit lorsqu'on lui faisoit éprouver un choc assez médiocre
 entre deux corps durs, lequel seroit incapable de produire
 une chaleur sensible; & un choc un peu plus fort produit
 le même effet sur la poudre ordinaire. Enfin M. Lavoisier
 a remarqué que, lorsqu'on comprimoit fortement sur une
 table de pierre le muriate oxigéné de potasse, il se faisoit
 une explosion avec lumière.

Il me paroît que dans ces effets de la compression, il
 faut distinguer deux espèces de phénomènes qui dépendent

cependant d'un même principe. Dans les uns, les molécules de nature différente sont déterminées par la compression & par le rapprochement qui en résulte, à former une nouvelle combinaison qui exprime le calorique, ou, selon une autre manière de voir, qui a une chaleur spécifique moindre : dans les autres, c'est le cas du muriate oxygéné de potasse ; les principes qui constituent un corps, sont forcés par la compression à former un autre ordre de combinaison. Ainsi l'alkali rapproché de la base muriatique est déterminé à former du muriate de potasse, en abandonnant une grande partie du calorique, qui en surchargeant l'oxygène, lui rend l'état élastique, & qui est obligé même de se dégager en partie ; d'où vient la lumière, & sans doute la chaleur qui doit accompagner cette explosion.

N'est-ce pas un corollaire des explications que je viens de donner, qu'il peut se trouver des compressions & des frottemens dans lesquels il ne se dégage point de chaleur, si dans les combinaisons nouvelles qui se forment, il y en a qui puissent absorber tout le calorique que d'autres abandonnent, tout comme dans les dissolutions chimiques il ne se dégage point de chaleur, lorsqu'il se forme un gaz dans lequel le calorique peut se combiner ?

Ainsi les loix de la nature peuvent se modifier en apparence, quoiqu'elles restent invariables. C'est un fait qu'on a peut-être regardé comme trop général, que les substances gazeuses abandonnent le calorique auquel elles devoient l'élasticité, lorsqu'elles reprennent l'état liquide & sur-tout l'état solide ; & cependant une prodigieuse quantité de gaz muriatique oxygéné se concentre pendant plusieurs heures dans une solution alkaline, & une quantité considérable de muriate oxygéné de potasse se dépose sous forme concrète, sans qu'il se dégage aucune chaleur sensible. Il peut arriver que le calorique ait une telle affinité avec les principes qui entrent dans une combinaison, qu'il puisse y être retenu en entier, quoiqu'elle prenne l'état solide. Je dirai même qu'il ne me paroît pas impossible qu'il se trouvât telle combinaison dans l'état de solide, qui, quoique
formée

formée en partie par des substances gazeuses, pourroit pendant sa formation, absorber du calorique & produire du froid. Cette considération me paroît mériter attention pour la théorie de la chaleur qui s'accroît & se perfectionne si fort de nos jours.

Je ne crois cependant pas qu'il faille borner la chaleur sensible aux effets de la compression, pour expliquer tous les phénomènes qu'elle produit dans les compositions & décompositions chimiques; elle apporte un principe nouveau qui, dans les distillations, par exemple, se combine plus ou moins facilement avec les principes d'un mixte, & donne aux uns plus d'élasticité qu'aux autres.

La propriété que les oxides métalliques ont de se combiner avec les acides & avec les alkalis, peut expliquer la disposition qu'ils ont à former des sels triples : le mercure en offre plusieurs exemples.

Lorsqu'on précipite ce métal de l'acide muriatique par l'ammoniaque, l'on a un précipité blanc : M. Bayen a fait voir que ce précipité étoit dû, pour la plus grande partie, à un sel composé d'acide muriatique & d'oxide de mercure. J'ai prouvé (*Mémoires de l'Académie 1780*) que les précipités obtenus par la chaux & par les alkalis fixes, étoient aussi dûs en partie à une combinaison du même genre; mais Schéele a fait voir que cette combinaison que nous avions pensé n'être dûe qu'au mercure & à l'acide muriatique, contenoit aussi de l'ammoniaque, de sorte qu'elle doit être considérée comme un sel triple. Il est probable, d'après cela, que le sel blanc que j'ai retiré des précipités par l'alkali fixe & par la chaux, est aussi un sel triple qui retient une partie de ces substances.

Si l'on verse une très-petite quantité du muriate corrosif dans l'eau de chaux, le précipité qu'on voit d'abord se former, se redissout à l'instant. Si enfin on continue à former un précipité avec l'eau de chaux, & qu'on filtre la liqueur, on y trouve des indices de l'existence du mercure, & c'est de-là que dépendent les propriétés médicales que cette

liqueur, à laquelle on a donné le nom d'*eau phagédénique*, retient, lors même qu'on l'a séparée du précipité. L'oxide de mercure se combine dans ce cas, ou avec la chaux, ou avec le muriate de chaux; lorsqu'on a précipité le nitrate de mercure par la potasse, la liqueur retient aussi du mercure qu'on peut en précipiter par le sulfure d'alkali.

M. le Blanc nous a fait voir que l'oxide de mercure pouvoit se combiner avec le muriate de soude en assez grande quantité, & l'on connoît le muriate de mercure & d'ammoniaque auquel on a donné le nom de *sel alembroth*.

L'oxide de mercure entre aussi en combinaison directe avec les alkalis & avec la chaux. Si on le fait bouillir avec l'eau de chaux, il se fait un mercuriate de chaux, qui forme par l'évaporation des petits cristaux transparens & jaunes.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Lavoisier m'a communiqué la note suivante, qu'il avoit consignée depuis long-temps dans son registre d'expériences. « Un fait que » j'ai eu occasion de remarquer, c'est que le mercure » précipité rouge se dissout abondamment dans l'alkali » volatil caustique, sans effervescence. Si on fait évaporer » la liqueur, on a un sel blanc qui fait pellicule; la chaux » de mercure fait alors l'office d'acide ».

M. Sage a décrit la cristallisation de la combinaison de l'oxide de cuivre avec l'ammoniaque. J'ai observé que la dissolution de ce sel est décomposée par la chaleur: le cuivre se précipite en prenant une couleur noirâtre, & il se dégage des bulles qui sont du gaz azote; le précipité forme du gaz nitreux, pendant qu'il se dissout dans l'acide nitrique, de manière qu'il s'est rapproché de l'état métallique. J'ai déjà décrit ailleurs les phénomènes de cette décomposition du cuivrate d'ammoniaque (*Anal. de l'alk. Mémoires de l'Acad. 1785*). On peut seulement remarquer qu'il ne faut qu'un degré de chaleur bien foible, pour opérer en partie cette décomposition.

La dissolution de l'oxide de cuivre ammoniacal laisse précipiter une portion d'oxide, lorsqu'on l'étend de beau-

coup d'eau distillée ; mais la liqueur surnageante retient une teinte bleue. Une plus petite quantité d'eau de chaux précipite l'oxide de cuivre, de manière que la liqueur reste sans couleur. La chaux a donc la propriété de précipiter cet oxide, indépendamment de l'eau qui la tient en dissolution. J'ai séché ce précipité en le comprimant dans du papier à filtrer pour en extraire toute l'eau de chaux, ensuite je l'ai dissous dans un acide ; la dissolution s'est faite sans effervescence : je l'ai décomposée avec le carbonate de soude, & j'ai redissous le précipité cuivreux par l'ammoniaque ; il est resté du carbonate de chaux. Il s'étoit donc combiné une partie de la chaux avec l'oxide de cuivre ; aussi voit-on, lorsqu'on mêle de la chaux avec un précipité verdâtre de cuivre fait récemment, & une quantité suffisante d'eau, que ce précipité prend avec le temps une couleur bleue, qui approche beaucoup de la couleur de la cendre bleue dont on se sert dans les arts.

La potasse précipite l'oxide de cuivre, ce qui paroît prouver que la potasse a aussi la faculté de se combiner avec cet oxide.

Glauber avoit déjà observé que l'ammoniaque avoit la propriété de dissoudre le zinc ; & de Laffonne a publié dans les Mémoires de l'Académie, des observations nombreuses & intéressantes sur cet objet : j'ai éprouvé que l'eau de chaux & la potasse pouvoient dissoudre une petite partie d'oxide de zinc sublimé.

L'on fait que l'oxide d'antimoine forme des sels triples avec plusieurs sels à base alcaline. Rouelle le jeune avoit remarqué que l'oxide d'antimoine, par le nitre ou antimoine diaphorétique, se dissolvoit dans l'eau ; mais j'ai observé qu'on précipitoit cette dissolution en y versant un peu d'acide : j'ai oxidé l'antimoine en le faisant détoner avec le muriate oxigéné de potasse, & en faisant bouillir le résidu avec de l'eau distillée ; cette eau ne s'est point troublée par l'affusion d'un acide. Lors donc qu'on fait détoner l'antimoine avec le nitre, son oxide se combine avec une

Portion de l'alkali de ce sel; mais lorsqu'on le fait détoner avec le muriate oxigéné de potasse, cette combinaison ne peut se former, parce que l'alkali reste engagé avec l'acide muriatique. Je ne m'arrête pas à d'autres combinaisons connues, sur lesquelles je n'ai point encore d'observations particulières, telles que la combinaison de l'oxide de cobalt, & celle de l'oxide de nickel avec l'ammoniaque.

Les oxides métalliques ont non-seulement la propriété de se combiner avec les alkalis & la chaux, mais ils se combinent quelquefois entr'eux, comme les acides font avec les alkalis; c'est ce qui arrive dans la précipitation de l'or par l'étain. MM. Vogel & Baumé avoient observé que ce précipité contenoit de l'étain: M. Erxleben remarqua avec raison que ces deux métaux se séparoient des acides qui les tenoient en dissolution par l'affinité qu'ils avoient l'un pour l'autre, & qu'il ne falloit pas confondre cette précipitation avec celle qui a lieu lorsqu'on sépare l'or par le moyen du fer ou du sulfate de fer; car dans cette dernière il est précipité dans l'état métallique, & il s'est séparé parce qu'il a cédé l'oxigène à une substance qui avoit plus d'affinité avec ce principe. M. Erxleben a encore observé qu'il falloit que l'étain ne fût oxidé qu'à un certain point pour pouvoir précipiter l'or; car si l'on a fait bouillir la dissolution d'étain, elle n'a plus la propriété de précipiter l'or, & ce phénomène d'affinité est analogue à plusieurs autres qu'on observe en chimie. Ce qui confirme cette explication, c'est que, comme l'a fait voir Bergman (*de præcipitatis metallicis*), l'or & l'étain sont réellement dans l'état d'oxide, lorsqu'ils forment le précipité pourpre de Cassius, ou l'oxide pourpre d'or & d'étain.

On pourroit m'objecter que je compare des effets bien foibles à l'affinité puissante qu'exercent les acides sur les alkalis ou même sur les métaux; mais l'on vient de remarquer deux oxides métalliques qui se séparent mutuellement des acides qui les tenoient en dissolution: l'oxide d'or a une telle affinité avec l'ammoniaque, qu'il l'enlève à

tous les acides , ainsi que l'a prouvé Bergman ; l'oxide d'argent fulmine à une chaleur supérieure à celle de l'eau bouillante , & décompose l'ammoniaque , plutôt que de l'abandoner. L'observation pourra nous faire connoître d'autres faits , & nous donner d'autres preuves de la force de ces combinaisons ; d'ailleurs a-t-on fait quelques difficultés de reconnoître pour acides , l'acide tunstique , le molibdique , le lithique , le boracique , quoiqu'ils ne paroissent former que de foibles combinaisons ?



OBSERVATIONS ET CALCULS

De l'Éclipse de Soleil du 4 juin 1788, au matin.

Par M. JEAURAT.

Lû le 16 août 1788. L'OBSCURITÉ du ciel & la pluie du 4 juin dernier ont empêché à Paris & dans les environs, qu'aucun observateur pût observer l'éclipse de soleil du 4 juin dernier; il n'a même pas été possible d'en observer une seule phase. Mais MM. Maskelyne & d'Arquier ont complètement fait l'observation de cette éclipse en Angleterre. A Rouen, M. Dulague en a observé la fin; & à Perinaldo, M. Maraldi en a observé le commencement. Ce sont ces observations que je donne ici, & notamment le calcul de l'observation faite à Greenwich, ainsi que la légère correction qu'il convient de faire aux meilleures Tables de la lune que nous ayons.

Ce qu'on verra ici avec plaisir, c'est que pour la longitude de la lune, la correction à faire aux Tables n'est que de 31" pour les Tables d'Euler, quoiqu'elles n'aient pas encore été rectifiées d'après les observations; & que les Tables de Mayer corrigées récemment & déjà pour la troisième fois, ne diffèrent cette fois du vrai que de 17", & les avant-dernières de 4'.

Les Tables de Mayer les plus récentes se sont trouvées moins précises que les précédentes. Cependant ce degré d'infériorité aura rarement lieu pour les dernières Tables de Mayer; & si celles d'Euler étoient, comme j'espère pouvoir le faire, rectifiées de même que les autres, d'après les observations, elles jouiroient, comme les Tables de Mayer, de l'avantage d'être des plus utiles pour l'astronomie-pratique, dans la détermination des longitudes, tant sur terre que sur mer: alors elles auroient pour titre de préférence sur celles de Mayer, l'avantage d'être plus

conformes à la théorie de la lune, ce dont se sont considérablement occupés les plus savans géomètres de l'Europe.

Ce qui surprend, c'est que la correction que j'assigne ici pour les Tables de la lune, est moins forte pour la longitude que pour la latitude ; car pour les dernières Tables de Mayer, la correction en latitude est cette fois-ci de $23''$, & pour les Tables d'Euler de $50''$, tandis que pour la longitude, ces corrections ne sont que de $17''$ & de $31''$.

Le calcul que je vais donner de l'observation de MM. Maskelyne & d'Arquier, faite à Greenwich, a été peu de chose pour moi ; car M. Rotrou, habile géomètre, qui ci-devant a pris la peine de dresser une excellente carte de cette éclipse de soleil, a de nouveau fait les calculs pour Greenwich ; savoir, le calcul de la différence de la conjonction apparente calculée, à la conjonction apparente observée. Or la différence en temps $57''$, 5 qui en résulte, est naturellement la correction demandée pour la différence de la longitude de la lune à celle du soleil ; car la correction correspondante à la différence des temps $57''$, 5 est pour les Tables d'Euler de $+ 31''$, comme on va le voir par ce qui suit.

Les Tables du soleil dont je me suis servi sont celles de M. l'abbé de la Caille.

OBSERVATIONS de l'Éclipse de Soleil du 4 juin 1788, au matin, faites à Perinaldo, par M. Maraldi neveu ; à Rouen, par M. Dulague, chanoine régulier de Sainte - Geneviève ; & à Greenwich en Angleterre, par MM. Maskelyne & d'Arquier.

A Perinaldo, par M. Maraldi neveu.

{ Latitude de Perinaldo.....	{ 43 ^d 52' 2"
{ Différence des méridiens en temps.	{ .. 21 0, or. }
Comencement de l'éclipse.....	7 ^h 37' 50", temps vrai à Perinaldo.
La fin n'a pu être observée.	

A Rouen, par M. Dulague.

{ Latitude de Rouen.....	49 ^d 26' 27". }
{ Différence des méridiens en temps.	4' 57" oc. }
Commencement estimé & non observé.....	7 ^h 21' 33", temps vrai à Rouen.
Sensiblement, & certainement l'éclipse étoit commencée.....	7. 28. 30.
Fin de l'éclipse observée.....	9. 7. 14.

A Greenwich, par MM. Maskelyne & d'Arquier.

{ Latitude de Greenwich.....	51 ^d 28' 40". }
{ Différence des méridiens en temps.	9. 18. oc. }
Commencement de l'éclipse.....	7 ^h 24' 46" 5, temps vrai à Greenwich
Milieu moyen.....	8. 13. 6. 0.
Fin de l'éclipse.....	9. 1. 25. 5.
Demi-durée de l'éclipse.....	... 48. 19. 0.

Calcul de cette dernière observation faite à Greenwich.

Ces calculs sont faits suivant les Tables de la lune d'Euler, & suivant les Tables du soleil de M. l'abbé de la Caille.

Commencement de l'éclipse	7 ^h 27' 7" 0. temps vrai à Greenwich.
Milieu moyen.....	8. 14. 3. 5.
Fin de l'éclipse.....	9. 1. 0. 0.
Demi-durée de l'éclipse 46. 56, 5.

Soit { S, centre du soleil.	7 ^h 27' 7" }
L, centre de la lune au commen-	
cement de l'éclipse.....	
L, centre de la lune à la fin de l'éclipse.....	

746 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

2.^o Calcul, savoir, correction à faire en la latitude aux Tables de la lune, d'Euler.

Par calcul, selon Euler, on a..... $lH = LH = 1438''$.

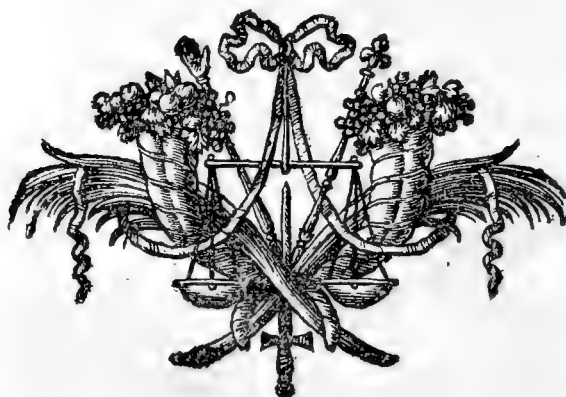
Par observation, suivant M. Maskelyne... $lH = HL = 1482''$.

D'ailleurs la somme des demi-diamètres... $Sl = SL = 1934''$.

Alors $\left\{ \begin{array}{l} \text{ayant supposé..... } lH = HL = 1438'', \\ \text{on a trouvé..... } SH = 1293'', \\ \text{Présentement ayant..... } lH = HL = 1483'', \\ \text{on trouvera..... } SH = 1243''. \end{array} \right\}$

Donc pour correction cherchée à faire en latitude, aux Tables + 50'',
conséquemment à 7^h 26' 26'', temps vrai à Paris le 4 juin 1788, au

matin, on a pour la latitude de la Lune observée..	21' 11" boréale.
Calculée selon Mayer, $\left\{ \begin{array}{l} \text{nouvelles Tables.....} \\ \text{anciennes Tables.....} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 20. 48..... \text{erreur} - 23. \\ 20. 44..... - 27. \end{array} \right.$
Calculée selon Euler.....	20. 21..... - 50.



SUITE DU CALCUL DES TRIANGLES

*Qui servent à déterminer la différence de longitude entre
l'Observatoire de Paris & celui de Greenwich.*

(Voyez le vol. précéd. pag. 373).

Par M. LE GENDRE.

POUR continuer les calculs commencés dans le volume précédent, il étoit nécessaire de connoître les côtés & les angles de quelques triangles depuis Douvres jusqu'à Greenwich. Le général Roy a eu la bonté de nous donner communication de ses mesures & de ses résultats dès la fin de 1789 ; le travail entier a paru depuis dans le volume des *Transactions philosophiques* publié en 1790. Nous renvoyons à cet ouvrage ceux qui voudront prendre une connoissance détaillée de la belle opération faite en Angleterre. Nous nous contenterons pour le présent de donner la position de quelques points de la chaîne de triangles tracés depuis Douvres jusqu'à Greenwich, d'où nous concluons la différence de longitude des deux observatoires.

Le tableau suivant présente à la fois les élémens empruntés des Anglois, & les résultats que nous en avons tirés par la méthode expliquée dans le volume précédent. Les côtés des triangles sont évalués en pieds Anglois dans l'ouvrage du général Roy ; nous les avons réduits en toises, en retranchant de leurs logarithmes la quantité constante 0,8058068 , ou simplement 0,805807 lorsque les logarithmes n'ont que six décimales.

Bbbbb ij

Tour nord du Château de Douvres.

Longitude.....	$1^d \ 0' \ 928 - 218 \text{ } ^c - 11 \omega + 80 + 3 \text{ } ^z$ $+ 22 \text{ } ^x - 1000 \text{ } ^y.$
Latitude.....	$51. \ 7. \ 813 - 46 - \omega - 12 \text{ } ^z + 1000 \text{ } ^x.$
Az. E. de Calais..	$116. \ 53. \ 334 + 169 \text{ } ^c + 8 \omega - 60 - 30 \text{ } ^x$ $- 1002 \text{ } ^z.$

Folkstone Turnpike.

Éléments.....	{ Logarithme de la distance à Douvres.. 3,6932556. * Angle à Douvres, entre Blannez & Folkstone..... $117^d \ 14' \ 40'', 75.$
Longitude.....	$1. \ 8. \ 506 - 244 \text{ } ^c - 12 \omega + 80 + 2 \text{ } ^z$ $+ 25 \text{ } ^x - 1000 \text{ } ^y.$
Latitude.....	$51. \ 5. \ 775 - 6 - \omega - 13 \text{ } ^z + 1000 \text{ } ^x.$
Az. E. de Douvres.	$66. \ 48. \ 881 + 189 \text{ } ^c + 9 \omega - 60 - 33 \text{ } ^x$ $- 1001 \text{ } ^z.$

Allington Knoll.

Éléments.....	{ Logarithme de la distance à Folkstone 3,9381864. Angle à Folkstone, entre Douvres & Allington..... $162^d \ 56' \ 26'', 75.$
Longitude.....	$1. \ 22. \ 899 - 294 \text{ } ^c - 15 \omega + 80 + 2$ $+ 30 \text{ } ^x - 1000 \text{ } ^y.$
Latitude.....	$51. \ 4. \ 787 + 6 - \omega - 16 \text{ } ^z + 1000 \text{ } ^x.$
Az. E. de Folkstone	$83. \ 41. \ 230 + 227 \text{ } ^c + 11 \omega - 60 - 40 \text{ } ^x$ $- 1001 \text{ } ^z.$

* Cet angle, & tous les semblables parmi les élémens, sont ouverts du côté du sud.

Hollingborn Hill.

Éléments.....	Logarithme de la distance à Allington.	4,1766293.
	Angle à Allington, entre Folkestone & Hollingborn.....	231 ^d 15' 45" ¹ / ₂ .
Longitude.....	1 ^d 40' 709 — 355 6 — 18 ω + 8 θ + 6 ζ + 36 x	— 1000 y.
Latitude.....	51. 15. 917 — 10 6 — 3 ω — 19 ζ + 1000 x.	
Az. E. Allington..	134. 43. 113 + 276 6 + 13 ω — 6 θ — 49 x	— 1005 ζ.

Wrotham Hill.

Éléments.....	Logarith. de la distance à Hollingborn	4,1037309.
	Angle à Hollingborn, entre Allington & Wrotham.....	148 ^d 26' 27".
Longitude.....	2. 1. 450 — 428 6 — 21 ω + 8 θ + 7 ζ + 44 x	— 1000 y.
Latitude.....	51. 18. 925 — 12 6 — 3 ω — 23 ζ + 1000 x.	
Az. E. Holl.....	102. 53. 378 + 332 6 + 16 ω — 6 θ — 59 x	— 1006 ζ.

Severndroog Castle.

Éléments.....	Logarithme de la distance à Wrotham.	4,0970775.
	Angle à Wrotham, entre Hollingborn & Severndroog.....	211 ^d 2' 56", 5
Longitude.....	2. 16. 605 — 481 6 — 24 ω + 7 θ + 50 x + 12 ζ	— 1000 y.
Latitude.....	51. 28. 030 — 20 6 — 5 ω — 26 ζ + 1000 x.	
Az. E. Wrotham..	133. 44. 478 + 375 6 + 18 ω — 5 θ — 66 x	— 1009 ζ.

<i>Greenwich.</i>	
Éléments.....	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Logarith. de la distance à Severndroog.} \quad 3,3588606. \\ \text{Angle à Severndroog, entre Wrotham} \\ \quad \text{\& Greenwich.....} \quad 152^{\circ} 28' 57'', 75. \end{array} \right.$
Longitude.....	$2. 20. 298 - 494^{\circ} 6 - 25 \omega + 7 \theta + 51 x + 12 z - 1000 y.$
Latitude.....	$51. 28. 700 - 206 - 5 \omega - 26 z + 1000 x.$
Az. E. Severn....	$106. 10. 551 + 385^{\circ} 6 + 19 \omega - 5 \theta - 68 x - 1009 z.$

Si on jette un coup-d'œil sur la carte des triangles Anglois; dans les Transactions philosophiques, on verra qu'on peut vérifier le résultat précédent, en choisissant une autre route pour déterminer la position de Greenwich. Ainsi en partant du cap Blannez, on peut calculer successivement les positions de Fairlight Down, Goudhurst, Wrothamhill, Severndroog-Castle & Greenwich: on trouve pour ce dernier point,

$$\begin{aligned} \text{Longitude } 2^{\circ} 20' 296 - 495^{\circ} 6 - 24 \omega + 5 \theta + 52 x \\ + 13 z - 1000 y; \\ \text{Latitude } 51. 28. 702 - 216 - 5 \omega - \theta - 28 z + 1000 x; \\ \text{Az. E Severn. } 106. 10. 741 + 386^{\circ} 6 + 19 \omega - 4 \theta \\ - 69 x - 1008 z; \end{aligned}$$

La différence de ce résultat avec le précédent, est à peu près nulle sur la longitude & la latitude; elle monte à $0', 19$ sur l'azimuth de Severndroog observé de Greenwich. Mais il n'est pas étonnant que la combinaison d'un très-grand nombre d'angles horizontaux produise cette erreur, d'autant plus que nous avons employé ces angles tels que l'observation les a donnés, sans y faire aucune correction.

Si nous prenons un milieu entre ces deux azimuths,

nous aurons

$$106^d 10', 646 + 385^c + 19^w - 5^t - 68^x - 1009^z.$$

Le même angle observé immédiatement à Greenwich a été trouvé de $106^d 10' 433$: la différence est en millièmes de minute

$$213 + 385^c + 19^w - 5^t - 68^x - 1009^z.$$

D'autres observations d'azimuth faites à Folkestone & à Goudhurst, ont donné avec le calcul les différences,

$$295 + 189^c + 9^w - 6^t - 33^x - 1001^z$$

$$435 + 309^c + 15^w - 4^t - 56^x - 1001^z.$$

On voit que ces différences augmenteroient en supposant c positif; ainsi, il ne paroît pas que l'aplatissement doive être plus grand que nous ne l'avons supposé. Quant à la valeur de z , il paroît qu'elle doit être positive, & que pour réduire les différences à une valeur probable, il faut supposer au moins $z = \frac{1}{4}$, ou encore mieux $z = 0,3$, ce qui surpasse un peu la limite que nous avons attribuée à cette erreur : les erreurs des autres élémens ne sont pas manifestées par les observations d'azimuth.

Prenant donc $z = 0,3$, on aura pour la position de Greenwich,

$$\begin{aligned} \text{Longitude } 2^d 20' 294 - 494^c - 25^w + 7^t \\ + 51^x - 1000^y; \\ \text{Latitude } 51^d 28' 692 - 20^c - 5^w + 1000^x. \end{aligned}$$

La latitude est reconnue de

$$51^d 28' 40'' = 51^d 28', 667;$$

ainsi nous aurons

$$0 = 25 - 20^c - 5^w + 1000^x;$$

ce qui donne

$$x = -\frac{1}{40} + \frac{1}{50} C,$$

& enfin la longitude devient

$$2^d 20' 293 - 493 C - 25 \omega + 7 \theta - 1000 y.$$

Les erreurs ω & θ influent très-peu sur ce résultat : l'erreur 1000 y , est la quantité dont on peut s'être trompé sur la longitude de Dunkerque dans l'opération de la méridienne ; elle ne peut guère surpasser une seconde, quoique nous ayons dit dans le volume précédent, qu'elle pouvoit aller à trois ou quatre. Ainsi on peut juger de l'incertitude qui reste encore sur la différence de longitude des deux observatoires. La quantité qui influe le plus dans la détermination est l'aplatissement ; si on le suppose de $\frac{1}{320}$, ce qui donne $C = 0$, la différence de longitude sera $2^d 20' 17'',6$, & cette quantité ne doit pas s'écarter de la vérité de plus d'une seconde.

Si on suppose l'aplatissement de $\frac{1}{178}$, ce qui donne $C = \frac{142}{178}$, la différence de longitude sera $2^d 19' 54''$, à une seconde près.

Cette incertitude ne provient nullement de l'opération trigonométrique, dont l'exactitude est plus que suffisante pour cet objet ; elle est due toute entière à l'aplatissement, dont l'effet pouvoit être déterminé *a priori*.

Comme le plus petit aplatissement nous paroît le plus probable, nous fixerons à $2^d 20' 15''$ la différence de longitude entre les observatoires de Paris & de Greenwich, ce qui fait en temps $9' 21''$.

Le général Roy trouve $2^d 19' 42''$ ou $9' 18'',8$ en temps, résultat assez différent du nôtre, & que nous ne pourrions obtenir qu'en supposant l'aplatissement de $\frac{1}{145}$. Nous n'entrerons dans aucun détail sur cette différence de résultats ; nous observerons seulement que les calculs du
général

général Roy (*a*) ne paroissent pas fondés sur des principes bien géométriques. Il s'appuie principalement sur l'hypothèse de Bouguer, dans laquelle les accroissemens des degrés sont proportionnels aux carré - carrés des sinus de latitude; mais il joint de plus à cette hypothèse qui devoit suffire, d'autres moyens d'approximation dont on n'aperçoit pas la légitimité. C'est aux géomètres à décider laquelle des méthodes mérite la préférence. Nous reviendrons sur cet objet lorsque la grande opération ordonnée par l'Assemblée Nationale pour déterminer l'unité de poids & de mesure, aura été exécutée. Cette entreprise, l'une des plus belles qui aient été conçues en faveur des sciences & de l'humanité, ne peut manquer de jeter un nouveau jour sur la grande question de la figure de la terre. Nous pouvons même espérer que tous les doutes seront levés à cet égard, si les autres nations secondant les vues de la France, ordonnent des travaux semblables pour la détermination de la mesure universelle.

(*a*) Nous avons assés quelque reproche à faire au général Roy, dans la manière dont il a corrigé les angles de ses triangles. Ces corrections, dont il n'indique point le fondement, sont souvent assez fortes; il paroît qu'elles sont faites dans l'intention de faire coïncider les deux bases, & que sans cela la base de vérification différeroit de sa valeur calculée d'après la première base, d'environ un vingt-cinq millième, ce qui est beaucoup, eu égard au degré d'exactitude que présentent les autres parties de l'opération. Un autre défaut de ces corrections, c'est que le général Roy a négligé la courbure des triangles; il les calcule tous comme rectilignes, & comme si la chaîne entière pouvoit se développer sur un plan; il ne fait donc aucune différence entre le véri-

table angle de chaque triangle sphérique, & celui qu'il convient de prendre, pour que son sinus soit proportionnel au côté opposé; cependant le premier angle est plus grand que le second du tiers de l'aire du triangle, conformément au théorème que nous avons donné dans le *vol. préc. pag. 358*. Au reste, ces erreurs sont trop légères pour influer sur la position de Greenwich; elles ne concluent pas non plus contre l'opération Angloise, dont l'exactitude est au-dessus de tout reproche, & dont les différentes parties se concilient aisément avec des corrections moindres que celles du général Roy. Il paroît seulement que la base de vérification n'a pas été mesurée avec la même précision que le reste; c'est sur quoi nous pourrions revenir dans une autre occasion.

Fautes à corriger dans le volume précédent.

Pag. 364, vers le milieu — $\frac{2}{3} \delta^3 (\frac{1}{2} + \text{tang.}^2 L)$,

lisez — $\frac{2}{3} \cdot \frac{\delta^3}{\cos L} (\frac{1}{2} + \text{tang.}^2 L)$.

Pag. 373, longitude de Calais 0 29, 217,

lisez 0 29, 017.

Pag. 372, vers le milieu, l'incertitude 1000 y, &c.

lisez l'incertitude 1000 y n'est que d'environ une seconde.



SUITE DE L'ESSAI

Pour connoître la Population du Royaume, & le nombre de ses habitans, en adaptant aux Villes, Bourgs & Villages, portés sur chacune des Cartes de M. de Cassini, l'année commune des Naissances, & en la multipliant par 26.

Par M.^{rs} DU SÉJOUR, DE CONDORCET & DE LA PLACE.

Population de la Carte de France, n.º 168.

SAINT-POL-
DE-LÉON.

« CETTE Carte contient les villes de Landernau, de
» Morlaix & de Saint-Pol-de-Léon, & 113 bourgs ou
» villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Landernau,

est de..... 158.

Dans celle de Morlaix..... 427.

Dans celle de Saint-Pol-de-Léon..... 222.

Et dans les 113 bourgs ou villages, de..... 6653.

NOMBRE des LIEUX de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieu carré.
146.	3.	113.	20982.	172978.	193960.	1184.

Cette carte ne contient que 146 lieux carrés ; le surplus est couvert par la Manche.

756 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

S. BRIEUC

Population de la Carte de France, n.º 156.

« CETTE Carte contient les villes de Saint-Brieux;
 » de Guincamp, de Lannion & de Tréguier, & 140 bourgs
 » ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Saint-Brieux, est de.....	267.
Dans celle de Guincamp, de.....	188.
Dans celle de Lannion, de.....	111.
Dans celle de Tréguier, de.....	148.
Et dans les 140 bourgs ou villages, de.....	6418.

NOMBRE des LIEUX de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
156.	4.	140.	18564.	166868.	185432.	1070.
Cette Carte ne contient que 156 lieues carrées; le surplus est couvert par la Manche.						

SAINTES.

Population de la Carte de France, n.º 102.

« CETTE Carte contient les villes de Cognac, de
 » Saint-Jean-d'Angely, de Marennes, de Pons, de
 » Rochefort & de Saintes, & 259 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Cognac, est de.....	135.
Dans celle de Saint-Jean-d'Angely, de.....	144.
Dans celle de Marennes, de.....	244.
Dans celle de Pons, de.....	147.
Dans celle de Rochefort, de.....	519.
Dans celle de Saintes.....	100.
Et dans les 259 bourgs ou villages, de.....	5917.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
234.	6.	259.	34320.	153842.	188162.	657.

La superficie de cette Carte n'est que de 234 lieues carrées; le surplus est couvert par la mer.

Population de la Carte de France, n.º 37.

MONTAUBAN.

« CETTE Carte contient les villes de Castel-Sarrasin,
» de Moissac, de Montauban, de Rabastens, de Verdun,
» & 345 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Castel-Sarrasin, est de..... 175.
Dans celle de Moissac, de..... 227.
Dans celle de Montauban, de..... 733.
Dans celle de Rabastens, de..... 118.
Dans celle de Verdun, de..... 93.
Et dans les 345 bourgs ou villages, de..... 6195.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	5.	345.	34996.	161070.	196066.	644.

Population de la Carte de France, n.º 172.

QUESSANT.

« CETTE Carte ne contient que 27 bourgs ou villages,
» & point de ville. »

758 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

L'année commune de naissances dans ces 27 bourgs ou villages, est de 1153.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
27.	0.	27.	0.	29973.	29978.	1110.
La superficie de cette Carte n'est que de 27 lieues carrées ; le surplus est couvert par la mer.						

TARASCON.

Population de la Carte de France, n.º 40.

« CETTE Carte contient la ville de Maffat, & 67.
» bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Maffat,
est de 297.
Et dans les 67 bourgs ou villages, de 1827.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
141.	1.	67.	7722.	47502.	55224.	337.
Cette Carte ne contient que 141 lieues carrées ; le surplus fait partie de l'Espagne.						

DINAN.

Population de la Carte de France, n.º 128.

« CETTE Carte contient la ville de Dinan, & 117,
» bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Dinan,
est de.....

293.

Et dans les 217 bourgs ou villages, de.....

8520.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	1.	217.	7618.	221520.	229138.	886.

Population de la Carte de France, n.º 144.

REMIREMONT.

« CETTE Carte contient la ville de Remiremont,
» & 159 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Remi-
remont, est de.....

130.

Et dans les 159 bourgs ou villages, de.....

7067.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
248.	1.	159.	3380.	183742.	187122.	741.

Population de la Carte de France, n.º 173.

LE CONQUET.

« CETTE Carte ne contient que 15 bourgs ou villages,
» & point de villes. »

L'année commune des naissances dans les 15 bourgs ou
villages, est de.....

638.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS delacampagne par lieue car..
28.	0.	15.	0.	16588.	16588.	592.

PÉRIGUEUX,

Population de la Carte de France, n.° 70.

« CETTE Carte contient les villes de Périgueux,
» de Barbesieux & de Montron, & 256 bourgs ou
» villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Perigueux,
est de..... 272.
Dans celle de Barbesieux, de..... 81.
Dans celle de Montron, de..... 113.
Et dans les 256 bourgs ou villages, de..... 592.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS delacampagne par lieue car.
250.	3.	256.	12116.	155792.	167908.	623.

MONTMÉDY.

Population de la Carte de France, n.° 109.

« CETTE Carte contient les villes de Montmédy,
» de Longwy, de Stenay, & 118 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montmédy,
est de..... 31.
Dans

DES SCIENCES.

761

Dans celle de Longwy, de,..... 81.

Dans celle de Stenay, de,..... 109.

Et dans les 118-bourgs ou villages, de,..... 1586.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de lacampagne par lieue car.
72.	3.	118.	5746.	41236.	46992.	725.

Population de la Carte de France , n.° 19.

CARCASSONNE.

« CETTE Carte contient les villes d'Aleth, de Carcassonne,
» de Castelnaudary, de Limoux, de Mirepoix, & 330.
» bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Aleth,
est de,.....

23.

Dans celle de Carcassonne, de,.....

445.

Dans celle de Castelnaudary, de,.....

301.

Dans celle de Limoux, de,.....

171.

Dans celle de Mirepoix, de,.....

90.

Et dans les 330 bourgs ou villages, de,.....

14998.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de lacampagne par lieue car.
250.	5.	330.	26780.	114998.	141778.	460.

Population de la Carte de France , n.° 110.

VERDUN.

« CETTE Carte contient les villes de Verdun, d'Étain
» & de Varennes, & 350 bourgs ou villages »

Mém. 1788.

D d d d d

762 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

L'année commune des naissances dans la ville d'Etain ,
 est de..... 88.
 Dans celle de Varennes , de..... 64.
 Dans celle de Verdun , de..... 389.
 Et dans les 350 bourgs ou villages, de..... 4773.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	3.	350.	14066.	124098.	138164.	496.

L'ORIENT.

Population de la Carte de France , n.° 170.

« CETTE Carte contient les villes de l'Orient, de
 » Ploëmur, de Port-Louis, de Quimper & de Quimperlé,
 « & 85 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de l'Orient
 est de 626.
 Dans celle de Ploëmur, de..... 370.
 Dans celle de Port-Louis, de..... 106.
 Dans celle de Quimper, de..... 271.
 Dans celle de Quimperlé, de..... 117
 Et dans les 85 bourgs ou villages; de..... 4634.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des villages.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
142.	5.	85.	38740.	120484.	159224.	841.

La superficie de cette Carte n'est que de 142 lieues carrées; le surplus est couvert par l'Océan.

Population de la Carte de France, n.° 158.

VANNES.

« CETTE Carte contient les villes de Vannes, d'Auray,
 » de Hennebont, de Joffelin, de Ploermel, & 122 bourgs
 » ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Vannes

est de.....	359.
Dans celle d'Auray, de.....	139.
Dans celle de Hennebont, de.....	139.
Dans celle de Joffelin, de.....	138.
Dans celle de Ploermel, de.....	206.
Et dans les 122 bourgs ou villages, de.....	7269.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des villages.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue. car.
248.	5.	122.	25506.	188994.	214500.	762.
La superficie de cette Carte n'est que de 248 lieues carrées; le surplus est couvert par l'Océan.						

*Population de la Carte de France, n.° 140.*Saint-Jean-
Pied-de-Port.

« CETTE Carte contient la ville de Saint-Jean-Pied-
 » de-Port, & 45 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Saint-Jean-

Pied-de-Port, est de.....	20.
Et dans les 45 bourgs ou villages, de.....	874.

D d d d d ij

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
50.	1.	45.	520.	22724.	23244.	454.

La superficie de cette Carte n'est que de 50 lieues; le surplus est couvert par la mer & par l'Espagne.

QUINTIN.

Population de la Carte de France, n.° 157.

« CETTE Carte contient les villes de Quintin, de Pontivy, de Lamballe, & 156 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Quintin, est de.....	209.
Dans celle de Pontivy, de.....	142.
Dans celle de Lamballe, de.....	95.
Et dans les 156 bourgs ou villages, de.....	8940.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	3.	156.	11596.	233844.	245440.	935.

GUERRANDE.

Population de la Carte de France, n.° 159.

« CETTE Carte contient les villes de Guerrande, de Rhuis, & 47 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Guerrande,	
est de.....	248.
Dans celle de Rhuis, de.....	225.
Et dans les 47 bourgs ou villages, de.....	2457.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
124.	2.	47.	12298.	63882.	76180.	515.
La superficie de cette Carte n'est que de 124 lieues; le surplus est couvert par la mer.						

Population de la Carte de France, n.° 129.

RENNES.

« CETTE Carte contient les villes de Rennes, de
Châteaubillant, & 142 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Rennes,	
est de.....	1349.
Dans celle de Châteaubillant, de.....	134.
Et dans les 142 bourgs ou villages, de.....	7946.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	2.	142.	38558.	206596.	245154.	826.

Population de la Carte de France, n.° 131.

NANTES.

« CETTE Carte contient les ville de Nantes, de
» Machecoul, & 114 bourgs ou villages. »

766 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

L'année commune des naissances dans la ville de Nantes,
est de..... 2026.
Dans celle de Machecoul, de..... 157.
Et dans les 114 bourgs ou villages, de..... 6677.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
234.	2.	114.	56758.	173602.	230360.	742.

La superficie de cette Carte n'est que de 234 lieues carrées ; le surplus est couvert par la mer.

B R E S T.

Population de la Carte de France, n.° 169.

« CETTE Carte contient la ville de Brest, & 109
» bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Brest,
est de..... 1107.
Et dans les 109 bourgs ou villages, de..... 6368.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
235.	1.	109.	28782.	165568.	194350.	704.

La superficie de cette Carte n'est que de 235 lieues carrées ; le surplus est couvert par la mer.

Population de la Carte de France, n.° 130.

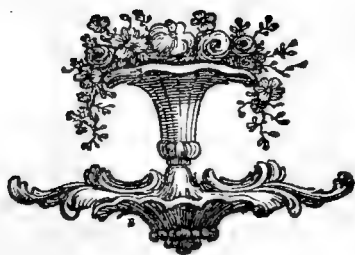
RÉDON.

« CETTE Carte contient les villes de Rédon,
» de Paimbœuf, & 92 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Rédon,
est de..... 133.
Dans celle de Paimbœuf, de..... 148.
Et dans les 92 bourgs ou villages, de..... 4931.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
247.	2.	92.	7306.	128206.	135512.	519.

La superficie de cette Carte n'est que de 247 lieues carrées; le surplus est couvert par la mer.





*MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ
Royale des Sciences établie à Montpellier, ont
envoyé à l'Académie le Mémoire suivant, pour
entretenir l'union intime qui doit être entre
elles, comme ne faisant qu'un seul corps, aux
termes des Statuts accordés par le Roi, au mois
de Février 1706.*

OBSERVATIONS

*Sur la manière de former l'Alun par la combinaison
directe de ses principes constituans.*

Par M. CHAPTAL.

L'ALUN résulte de la combinaison de l'acide sulfurique avec l'alumine ou argile pure.

Cette combinaison se fait ou par la nature ou par l'art.

Dans le premier cas, elle est presque toujours le produit de la décomposition du schiste pyriteux; dans le second, la combinaison directe de l'acide sulfurique avec l'alumine.

Le premier effet de la décomposition du schiste pyriteux, est la formation de l'acide sulfurique; le second, c'est sa combinaison avec les métaux & les terres qui forment la base du schiste, d'où il résulte des sulfates de fer, de chaux, d'alumine, de magnésie, &c.

La suite d'opérations usitées dans les ateliers d'alun, n'est destinée qu'à hâter la décomposition du schiste, extraire l'alun & le dégager de tous les autres sels qui se trouvent mêlés avec lui.

L'étendue des usages de l'alun en fait une des substances les plus précieuses dans les arts, mais les bonnes mines d'alun sont rares, & notre vaste royaume tire de l'étranger presque tout celui qu'il emploie (a).

Il étoit donc intéressant de former l'alun de toutes pièces, & assez économiquement, pour pouvoir concourir avec les fabriques où l'on ne fait que l'extraire des terres qui le contiennent; on paroît avoir rempli le double but dans quelques endroits.

Tous les procédés connus se réduisent en général à imprégner l'argile d'acide sulfurique, & à faciliter la combinaison en exposant le mélange à une chaleur modérée. M. Sage nous a décrit avec exactitude le procédé qu'on suit à Javelle, & l'on peut voir dans ses écrits les détails qu'il nous a fait connoître de cette opération intéressante; mais ce procédé varié de mille manières m'a toujours paru coûteux & pénible, & on ne peut pas le pratiquer avec économie dans notre province, où les aluns étrangers ne se vendent en ce moment que de 16 à 25 livres le quintal: une fabrication en grand pendant 15 mois m'en a fourni la preuve, & on peut acquérir la même conviction, sans courir les mêmes risques, en évaluant au plus bas prix la terre, l'acide, la main-d'œuvre & généralement tous les élémens qu'un fabricant fait entrer dans ses calculs.

J'ai été donc forcé à rechercher des moyens plus économiques & plus simples, & c'est sur les principes suivans que j'ai établi mes recherches.

(a) C'est d'après mes analyses, mes conseils & mes procédés qu'on a formé un établissement d'alun sur les mines de Saint-Georges, à une lieue de Milhau: je désire que cet exemple soit suivi,

L'acide sulfurique qu'on emploie, est le principe qui renchérit les aluns. Cet acide, me suis-je dit, n'est que le mélange de l'eau & de la vapeur qui est produite par la combustion du salpêtre & du soufre : exposons nos terres préparées à l'atmosphère de cette vapeur ; l'effet doit être d'autant plus sensible, que l'acide à l'état de vapeur est infiniment plus énergique, que lorsqu'il est à l'état liquide (a). Il étoit question de soumettre les idées à l'expérience, & c'est ce que j'ai fait : des argiles de toutes espèces, préparées de toutes manières, présentées sous toutes les formes, ont été exposées à la vapeur sulfurique dans l'intérieur de mes chambres de plomb : ces expériences m'ont offert divers résultats dont j'aurai occasion de parler dans ce Mémoire ; il me suffira d'observer en ce moment, que les mêmes expériences ont été variées & répétées jusqu'à ce que j'aie eu acquis des principes assez sûrs & assez positifs pour travailler en grand, & me décider à former un atelier des plus considérables. Mon établissement est en pleine activité depuis deux ans, & je crois mes principes assez éprouvés pour pouvoir les présenter avec quelque confiance.

Je diviserai tout ce que j'ai à dire sur ce sujet en trois chapitres. Dans le premier, je parlerai de la manière de disposer le local pour brûler le mélange de soufre & de salpêtre. Dans le second, je m'occuperai du choix & de la préparation des terres. Dans le troisième, je ferai connoître ce que l'expérience m'a appris sur les phénomènes que présentent les terres exposées à la vapeur, sur le temps qu'il convient de les y laisser, sur la manière de les gouverner dans les chambres.

(a) La vapeur qui se dépose sur les parois des chambres de plomb, ne marque que 45 à 50 degrés, parce que cette vapeur s'est affoiblie en se combinant avec l'eau de l'atmosphère ; mais si on reçoit cette même vapeur dans des vaisseaux

secs, au moment où elle se dégage, elle se dépose en cristaux mal prononcés sur les parois des vases, par un refroidissement artificiel, & devient liquide dès qu'on y laisse pénétrer l'air extérieur plus ou moins aqueux.

I.^o Nos chambres de plomb sont très-propres aux usages dont nous venons de parler : les vapeurs d'acide sulfurique attaquent peu le plomb, celles d'acide nitreux qui se forment & se développent dès qu'on ouvre les chambres pour les aérer, ont plus d'action sur le métal; mais lorsque la surface est enfin corrodée, il en résulte une couche d'oxide ou chaux blanche de plomb, qui garantit le métal sur lequel elle forme comme un vernis qui le défend. Mais le plomb est pesant & coûteux, & sous ce double rapport, peu favorable à des entreprises vastes & étendues : ces considérations m'ont engagé à chercher un mastic qui ne fût pas sensiblement attaqué par l'acide à l'état de vapeur, ne se ramollît point à une température de 40 à 50 degrés (*thermom. Réaumur*), & fût si uni, qu'il ne présentât ni fentes ni gerçures, lorsqu'une fois il étoit appliqué. Il étoit difficile de remplir toutes ces conditions, & pour me livrer aux essais convenables, je fis construire une chambre en bois, supportée par des piliers de pierre à 5 pieds au-dessus du sol, & isolée de toutes parts, pour qu'elle fût exposée à une observation plus rigoureuse. Cette chambre a 30 pieds de long, 12 de large & 6 de haut. J'ai successivement enduit les parois de cette chambre, avec tous les mastics sur lesquels des expériences en petit me faisoient fonder quelque espoir; je brûlois le mélange ordinaire de soufre & de salpêtre pendant un ou deux mois, & au bout de ce temps-là je retirois le produit de la combustion, & examinois attentivement l'état du mastic dont les parois étoient revêtues. Quelquefois je le trouvois gercé & tout fendillé, d'autre fois fondu & ayant coulé sur le sol, souvent détaché du bois quoiqu'appliqué soigneusement avec le pinceau; plus souvent encore l'huile qui ruisseloit sur les bords, s'y coloroit & le dissolvoit : dans l'un & dans l'autre de ces cas je me décidois à racler les parois, à enlever tout le mastic, & à en substituer un autre qui n'eût point les défauts dont je venois d'être témoin. Enfin après 12 à 15 mois de tentatives, je

parvins à trouver une composition qui me parut réunir le plus d'avantages; & l'enduit que j'appliquai alors existe depuis trois ans, sans dégradation sensible, quoique la chambre ait été employée sans interruption pour la fabrication de l'huile de vitriol. Le seul défaut que je lui ai reconnu c'est d'être un peu trop sensible, mais cet inconvénient dispaçoit en brûlant au dehors de la chambre & maîtrisant la combustion de manière que la chaleur de l'intérieur ne s'élève pas au dessus du 45.^e degré du thermomètre de Réaumur (a).

D'après les premiers résultats, je me décidai à former un établissement plus considérable pour y fabriquer l'alun : l'atelier construit à cet effet est en activité depuis deux ans.

La chambre dans laquelle on brûle le mélange de salpêtre & de soufre a 48 pieds de long, 44 de large, & 27 dans sa plus grande élévation : les murs des côtés sont en maçonnerie ordinaire & sont revêtus intérieurement d'une couche aussi épaisse de plâtre blanc; le sol est un pavé de briques, noyé dans un mortier formé par le mélange de l'argile calcinée & de l'argile crue. Le premier pavé est encore recouvert d'un second pour couper & couvrir les joints que forment les briques du premier, & les briques de ce second pavé sont appliquées & noyées dans une couche de mortier, qu'on emploie chaud en guise de mortier.

(a) Cet enduit est le mélange de parties égales de poix résine, térébenthine & cire. On fait fondre ces trois substances dans un chaudron, on laisse dissiper toute l'huile volatile qui fait monter la matière, & on l'applique bouillant avec un pinceau. Les usages de ce mastic sont très-étendus : on peut s'en servir pour en enduire les tonneaux qui servent sur les vaisseaux; l'eau & les vivres qu'on y renferme ne seroient pas sujets à se corrompre :

on peut en vernisser les vaisseaux eux-mêmes. Cet enduit a sur le goudron le double avantage de ne pas se gercer, d'être moins collant, plus souple, & d'offrir une surface plus unie. Une planche de six pieds de long sur dix-huit pouces de large, enduite de cette matière & exposée pendant dix-neuf mois dans un bassin, ne s'est pas imbibée d'eau, & le mastic n'a pas été altéré. On peut donner de la consistance à ce mastic en y mêlant de la brique pilée.

Le toit de cette chambre est en bois, mais les poutres sont très rapprochées; elles offrent dans leur milieu & dans le sens de leur longueur, des rainures dans lesquelles s'enchaînent les planches qui remplissent l'intervalle entre les poutres, de façon que cette immense charpente ne présente pas un seul clou.

Cette chambre ainsi disposée a été enduite avec mon mortier, & on en a appliqué trois ou quatre couches, dans l'intention d'effacer tous les petits trous que laisse la première couche, & de donner le plus beau poli à la surface. On a eu la précaution encore d'appliquer le mortier de la première couche le plus chaud possible afin d'en imprégner le bois, le plâtre & les briques; avec ces soins, le mortier pénètre dans le tissu même de ces substances & ne fait qu'un seul & même corps avec elles. Cette opération est si délicate, elle est si essentielle, & les conséquences en sont si terribles, qu'il ne faut pas s'en reposer sur une main purement mercenaire, & on sera étonné lorsque je dirai que huit mois du travail le plus assidu ont à peine suffi pour terminer cet ouvrage. J'avois d'abord appliqué le vernis sur la surface intérieure du toit, parce que je craignois déjà que l'impression du froid & du chaud, & l'alternative de l'humidité & de la sécheresse ne fissent travailler ma charpente, & dans ce cas j'aurois pu en juger & y porter remède. Mes doutes ne furent pas long-temps à être éclaircis, & trois ou quatre mois après je vis se former des crevasses & des fentes qui m'alarmèrent; alors je me décidai à enlever les tuiles du toit appliquées immédiatement sur la charpente de ma chambre, & à passer une couche de vernis sur toute la surface extérieure des planches; par ce moyen je mis les planches & tout le couvert entre deux couches de vernis, j'enlevai au bois sa propriété hygrométrique: je réparai la surface inférieure, & le toit existe depuis deux ans & trois mois dans un état d'intégrité & de perfection qui est vraiment étonnant.

Ce mortier a un tel avantage sur le plomb, par rapport

au but économique, que l'intérieur de cette chambre immense appropriée à ses usages ne m'a coûté que six à sept mille livres, tandis qu'il est facile de calculer qu'il faudroit pour huit à neuf cent mille livres de plomb pour en revêtir toutes les surfaces.

II. Le choix & la préparation des terres demandent quelques soins qu'il est nécessaire d'indiquer, afin d'éviter les tâtonnemens à tous ceux qui voudroient suivre la même carrière; ces connoissances préliminaires sont indispensables, sur-tout dans les grandes entreprises, parce que les essais y sont tous importants.

Les argiles les plus pures sont les meilleures : ce n'est pas que l'aluminisation y soit plus prompte, mais l'alun y est plus pur & d'une plus facile extraction. Lorsqu'on emploie des argiles colorées, telles que les grises, les noires ou les jaunes, qui doivent toutes en général leur couleur à des altérations du fer, ces argiles effleurissent plus promptement, & elles paroissent d'abord devoir fournir plus d'alun; mais les premiers indices sont trompeurs, & le sulfate de fer dont il faut le débarrasser, entraîne des soins & des manipulations pénibles & coûteuses.

Lorsqu'on emploie des argiles légèrement marneuses, telles que celles que nous présente presque par-tout notre province, l'alunation s'annonce en peu de temps, mais le sulfate de chaux qu'il faut extraire du mélange nuit à la cristallisation. J'ai observé que dans ce dernier cas, les cristaux n'ont point la même consistance; ils s'égrènent entre les doigts, se délayent dans l'eau avant de s'y dissoudre, & les teinturiers rejettent cette espèce.

Il est donc convenable de choisir une argile blanche & pure; j'en ai trouvé de cette nature à *Cornillon*, diocèse d'*Uzes*; & de toutes celles que j'ai essayées, celle-ci m'a présentée le plus d'avantages.

Lorsqu'il est question de la disposer à se combiner avec l'acide sulfurique, il faut d'abord la calciner : cette calcination doit être modérée & égale dans toutes les parties

de l'argile ; pour remplir cette double condition , il est indispensable de faire concourir la construction du fourneau avec la manière de disposer les argiles. Le fourneau que j'emploie à cet usage , a neuf pieds de haut sur sept de diamètre : on peut se le représenter comme une portion de cylindre terminée par deux voûtes, l'une à sa base & l'autre à son sommet ; les voûtes sont percées de plusieurs trous pour disperser la flamme d'une manière égale dans toute la capacité.

La préparation que je donne aux terres, consiste à les piler & les humecter avec de l'eau, & à former avec cette pâte des boules de 5 à 6 pouces de diamètre ; on remplit le fourneau de ces boules, & ces corps sphériques ne se touchant que par un point, laissent des intervalles qui établissent des cheminées & conséquemment une aspiration égale dans toute la masse. La première impression de la flamme c'est de noircir les boules, mais cette couleur dispaçoit dès que la masse est fortement chauffée, & alors j'arrête le feu (a).

III. Les boules extraites du fourneau sont pilées ou simplement concassées, & c'est dans cet état que je les expose à la vapeur de l'acide sulfurique dans la chambre dont j'ai parlé ; on en forme une couche sur le sol, & au bout de quelques jours on s'aperçoit que les fragmens calcinés de ces terres commencent à se gercer & à s'ouvrir : les crevasses laissent bientôt apercevoir des feuilletés d'alun pur, quelquefois même des cristaux formés par la réunion de plusieurs lames apposées les unes sur les autres. (b)

(a) C'est par un procédé semblable que je calcine les argiles ferrugineuses, & en forme des pozzolanes, qui remplacent avec avantage celles que nous tirions à grands frais d'Italie.

(b) En pratiquant des cloisons & formant des *partenemens* dans le bas de ces chambres, on peut exposer aux vapeurs, du fer, de l'alumine, du

cuivre, de l'eau, & faire tout-à-la-fois des sulfates de fer, de cuivre, d'alumine & de l'acide sulfurique. J'ai fabriqué tous ces sels dans la même chambre & dans le même temps. Mais j'ai observé que cette vapeur sèche se combinait difficilement avec le cuivre, & qu'il étoit même avantageux d'humecter le fer pour faciliter la dissolution.

Lorsque les terres sont parfaitement effleurées & que tout leur tissu présente de l'alun bien caractérisé, je les retire de la chambre & les expose sous un hangard bien aéré & très-déouvert, pour que la terre se pénètre plus intimement de l'acide, & faire disparaître par-là celui qui y prédomine.

Cela fait, on porte les terres dans de grands baquets ; on y fait passer de l'eau pour les lessiver selon l'usage généralement suivi dans tous les ateliers de ce genre, on évapore dans des chaudières de plomb & l'on met à cristalliser.

Dans toutes les fabriques, on est dans l'usage d'employer des alkalis pour saturer l'excès d'acide que présentent presque toujours les lessives ; ces matières servent encore à favoriser la cristallisation, & sans leur secours on n'obtient qu'un *magma* ou un précipité grenu, qui ne présente aucune apparence de cristaux. J'ai même observé que lorsqu'on parvenoit à faire cristalliser l'alun sans cette addition d'alkalis, les cristaux n'avoient point la même dureté ni la même pesanteur qu'ils ont ordinairement.

Le célèbre Bergman avoit annoncé que pour saturer l'excès d'acide des lessives alumineuses, il suffisoit de faire bouillir de l'argile dans la lessive. Ce procédé paroît simple & économique, & sous ce double point de vue il paroît devoir être suivi, mais je me suis convaincu qu'il n'étoit point praticable. Si l'on fait bouillir la lessive acide avec de l'argile cuite ou crue, la dissolution ne se fait que très-lentement & par une forte ébullition ; lorsque la lessive paroît saturée, si on la filtre, elle laisse précipiter par le refroidissement une grande partie de l'argile qu'elle avoit dissoute ; si dans cet état on rapproche la dissolution, l'argile se dégage & forme un précipité qui s'oppose à toute cristallisation : voilà ce que des expériences nombreuses m'ont présenté. Mais lorsqu'au lieu d'employer une terre *aluminisée* avec un excès d'acide, on se contente de dissoudre de l'alun dans l'eau & d'y ajouter quelques gouttes d'acide,

on

on peut saturer cet acide, & obtenir par évaporation des cristaux superbes d'alun, mêlés & confondus avec l'argile qui se dépose, & la quantité d'alun n'augmente pas par cette opération. Ces expériences m'ont paru prouver que la lessive acide dissolvoit la terre alumineuse en tant que dissolution d'alun, & non en raison du seul acide qui surabonde,

Je n'insisterai point sur les avantages que présente cette méthode de fabriquer l'alun ; j'observerai seulement qu'en prenant l'acide sulfurique à l'état de vapeur, on évite les opérations longues, pénibles & coûteuses par lesquelles on le concentre & on le rectifie. J'observerai encore qu'en suivant le procédé, on peut commodément établir des fabriques assez nombreuses pour fournir aux arts une matière précieuse que nous avons jusqu'ici tirée de l'étranger.

F I N.

Errata pour les Mémoires de 1788.

Page 246, ligne 25, *ajoutez* : Déjà en prenant 12 années d'observations de 1777 à 1788, j'ai trouvé 3 pieds 9 pouces seulement pour la hauteur moyenne.

Errata pour le Mémoire intitulé : Recherches sur les principes de la Différentiation, &c.

Page 116, ligne 8, *multiplie*, lisez *divise*.

Ligne 9, 10, 11 & 12 de la même page, mettez avant les cosinus le caractère de division (:), parce que ces cosinus doivent être diviseurs & non multiplicateurs.

Page 117, ligne 4, à compter d'en bas, — $n b g \cos. \pi \mu$, lisez
+ $n b g \cos. \pi \mu$.

Mém. 1788.

F f f f f

778 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Dans les 8.^e & 9.^e lignes de la 118.^e page, à compter d'en bas, mettez à la place des cosinus, l'unité divisée par ces cosinus. De plus, dans lesdites lignes & dans la 7.^e changez le signe du terme qui contient $n d x$.

Page 120, ligne 6, $T V'$: lisez $T' V'$.

J'invite le lecteur à ne lire ni l'exemple de la page 121, ni les deux suivans. Je les croyois nécessaires pour éclaircir cette théorie, je ne le crois plus.

Page 132, avant dernière ligne, $\frac{\Delta y^2}{g^2}$, lisez $\frac{\Delta y^2}{4 n^2 g^2}$.

Ligne dernière de la même page, b^2 , lisez $b^2 (\cos. \pi \frac{x}{g})^2$.

Page 138, ligne 9, $\sqrt{(c + 2 c x^2)}$, lisez $\sqrt{c(c + 2 c x^2)}$.

Errata pour le Mémoire de M. le Gentil, 1788.

Page 392, ligne 30, la zodiaque; lisez le zodiaque.

Page 427, ligne 10, mes mythologistes, lisez les mythologistes.

Page 430, ligne 17, de l'été à l'hiver, lisez de l'hiver à l'été.

Page 435, ligne 30, dans le lien des gémeaux, lisez dans le lieu des gémeaux.

Page 440, ligne 35, la plus grande, lisez la plus petite.





